Кривые в R^n

Кривые

Определение 1 *Годографом вектор-функции* $\overline{r}\colon T \to \mathbb{R}^n$ *называется множество точек* $\overline{r}(t)$*, где параметр* t *пробегает множество* T*.*

Кривой Γ *называется годограф непрерывной вектор-функции* $\overline{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$*:*

$$\Gamma = \{\overline{r}(t) \mid t \in [a,b]\}.$$

Замечание 1 *Разные вектор-функции могут задавать одну и ту же кривую. Например, кривая* $\Gamma = \{(\cos\varphi, \sin\varphi) \mid \varphi \in [0,\pi]\}$*, задаваемая вектор-функцией* $\overline{r}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$*,* $\varphi \in [0,\pi]$*, может быть задана другой вектор-функцией* $\overline{\varrho} = (x, \sqrt{1-x^2})$*,* $x \in [-1,1]$*,*
$\Gamma = \{(x, \sqrt{1-x^2}) \mid x \in [-1,1]\}$.

Определение 2 *Если концы кривой* $\Gamma = \{\overline{r}(t) \mid t \in [a,b]\}$ *совпадают, то есть* $\overline{r}(a) = \overline{r}(b)$*, то кривая* Γ *называется замкнутой.*

Точка $\overline{r_0}$ *называется точкой самопересечения кривой* $\Gamma = \{\overline{r}(t) \mid t \in [a,b]\}$*, если* $\exists t_1, t_2 \in [a,b]: \ t_1 \neq t_2$ *и* $\overline{r_0} = \overline{r}(t_1) = \overline{r}(t_2)$*.*

Если для кривой $\Gamma = \{\overline{r}(t) \mid t \in [a,b]\}$ *не существует чисел* t_1, t_2 *таких, что* $a \le t_1 < t_2 \le b$ *и* $\overline{r}(t_1) = \overline{r}(t_2)$ *кроме, быть может* $t_1 = a$*,* $t_2 = b$ *(другими словами, нет других точек самопересечения, кроме концов кривой), то кривая* Γ *называется простой кривой.*

Определение 3 *Пусть задана простая незамкнутая кривая* $\Gamma = \{\overline{r}(t) \mid t \in [a,b]\}$*. Будем говорить, что точка* $\overline{r_2} \in \Gamma$ *следует за точкой* $\overline{r_1} \in \Gamma$ *или точка* $\overline{r_1}$ *предшествует точке* $\overline{r_2}$*, если* $\overline{r_1} = \overline{r}(t_1)$*,* $\overline{r_2} = \overline{r}(t_2)$*,* $t_1 < t_2$*. При этом кривую* Γ *называют ориентированной по возрастанию параметра* t*.*

Таким образом определяем ориентацию простой незамкнутой кривой.

Определение 4 *Разбиением отрезка* $[a,b]$ *называется конечный набор точек* $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_I\}$ *таких, что* $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_I = b$*.*

Пусть задана кривая $\Gamma = \{\overline{r}(t) \mid t \in [a,b]\}$ *и разбиение отрезка* $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_I\}$*. Тогда будем говорить, что кривая* Γ *разбита на кривые* $\Gamma_i = \{\overline{r}(t) \mid t \in [t_{i-1}, t_i]\}$*,* $i \in \{1, \ldots, I\}$*.*

Определение 5 *Пусть кривая* Γ *разбита на простые незамкнутые кривые* Γ_i*, ориентированные по возрастанию параметра* t*. Тогда упорядоченная по возрастанию параметра* t *совокупность* Γ_1*,* Γ_2*, …,* Γ_I *называется ориентированной кривой* Γ*:* $\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_I$*.*

Определение 6 *Вектор-функция $\overline{\varrho}(s)$, $s \in [s_1, s_2]$ называется допустимой параметризацией кривой $\Gamma = \{\overline{r}(t) \mid t \in [t_1, t_2]\}$, если существует непрерывная строго возрастающая функция $t(s)$ такая, что $t(s_1) = t_1$, $t(s_2) = t_2$ и $\forall s \in [s_1, s_2] \ \hookrightarrow \ \overline{\varrho}(s) = \overline{r}(t(s))$.*

Считается, что вектор-функции $\overline{r}(t)$ и $\overline{\varrho}(s)$ параметризуют одну и ту же кривую Γ.

Так как при допустимой замене параметра старый параметр является строго возрастающей функцией нового параметра, то ориентация кривой не меняется.

Длина кривой

Определение 7 *Отрезком $\overline{r_1}, \overline{r_2}$ в $\mathbb{R}^n$ называется множество точек $\{\overline{r_1} + t(\overline{r_2} - \overline{r_1}) \mid t \in [0, 1]\}$.*

Пусть задана кривая $\Gamma = \{\overline{r}(t) \mid t \in [a, b]\}$ и разбиение $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_I\}$ отрезка $[a, b]$. Ломанной P, вписанной в кривую Γ, называется упорядоченный по возрастанию параметра t набор отрезков $[\overline{r}(t_{i-1}), \overline{r}(t_i)]$:

$$P = \left(\overline{r}(t_0), \overline{r}(t_1)], [\overline{r}(t_1), \overline{r}(t_2)], \ldots, [\overline{r}(t_{I-1}), \overline{r}(t_I)]\right).$$

При этом говорят, что разбиение T порождает ломанную P. Отрезки $[\overline{r}(t_{i-1}), \overline{r}(t_i)]$ называются звеньями ломанной P.

Длинной ломанной P называется сумма длин ее звеньев:

$$|P| = \sum_{i=1}^{I} |\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})|.$$

Определение 8 *Длинной кривой Γ называется точная верхняя грань длин ломанных, вписанных в Γ:*

$$\Gamma = \sup_P |P| = \sup_T \sum_{i=1}^{I} |\overline{r}(t_i) - \overline{r}(t_{i-1})|.$$

Если $|\Gamma| < +\infty$, то кривая Γ называется спрямляемой.

Лемма 1 *Если спрямляемая кривая Γ разбита на кривые Γ_1 и Γ_2, то кривые Γ_1 и Γ_2 спрямляемы, причем $\Gamma| = |\Gamma_1| + |\Gamma_2|$*

Определение 9 *Функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ называется непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$, если*
1) $\forall t \in [a, b] \quad \exists f'(t)$ где при $t = a$ под $f'(t)$ понимается правая, а при $t = b$ – левая производная;
2) функция $f'(t)$ непрерывна на $[a, b]$.

Непрерывная дифференцируемость вектор-функции $\overline{r}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ определяется аналогично.

Теорема 1 ***(достаточное условие спрямляемости прямой)*** *Пусть вектор-функция* $\overline{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, *параметризующая кривую* $\Gamma = \{\overline{r}(t) \mid t \in [a,b]\}$, *непрерывно дифференцируема. Тогда* Γ *спрямляема и*

$$|\Gamma| \leq (b-a) \max_{t\in[a,b]} |\overline{r'}(t)|.$$

Определение 10 *Пусть кривая* $\Gamma = \{\overline{r}(t) \mid t \in [a,b]\}$ *спрямляема. Определим переменную дугу* $\Gamma_t = \{\overline{r}(u) \mid u \in [a,t]\}$. *Функцию* $s(t) = |\Gamma_t|$ *называют переменной длиной дуги кривой* Γ.

Будем говорить, что вектор-функция $\overline{\varrho}\colon [0,|\Gamma|] \to \mathbb{R}^n$ *является натуральной параметризацией кривой* $\Gamma = \{\overline{\varrho}(t) \mid t \in [0,|\Gamma|]\}$, *если параметр* t *является переменной длиной дуги, то есть* $\forall t \in [0,|\Gamma|] \hookrightarrow s(t) = t$.

Кривая Γ *называется гладкой, если*
1) возможна натуральная параметризация кривой Γ*:* $\Gamma = \{\overline{\varrho}(s) \mid s \in [0,|\Gamma|]\}$ *;*
2) вектор-функция $\overline{\varrho}\colon [0,|\Gamma|] \to \mathbb{R}^n$, *задающая натуральную параметризацию кривой* Γ, *непрерывно дифференцируема на* $[0,|\Gamma|]$.

Первое приближение кривой (касательная)

Определение 11 *Прямая* $\overline{r} = \overline{r}_{KAC}(u) = \overline{r}_0 + \overline{\tau}u$ *называется касательной к кривой* $\Gamma = \{\overline{r}(s) \mid s \in [0,|\Gamma|]\}$ *в точке* $\overline{r}_0$, *если эта прямая является предельным положением секущей:*

$$\forall u \in \mathbb{R} \ \hookrightarrow\ \lim_{\Delta s\to 0}\left(\overline{r}_0 + \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta s}u\right) = \overline{r}_{KAC}(u) = \overline{r}_0 + \overline{\tau}u.$$

Теорема 2 *Пусть кривая* $\Gamma = \{\overline{r}(s) \mid s \in [0,|\Gamma|]\}$ *задана в натуральной параметризации. Тогда существование касатлеьной к кривой* Γ *в точке* $\overline{r}(s_0)$ *эквивалентно существованию производной* $\frac{d\overline{r}}{s}$ *в точке* s_0. *При этом вектор* $\overline{\tau} = \frac{d\overline{r}}{s}$ *является единичным вектором касательной, направленным по возрастанию параметра* s.

Задача 1 *Составить уравнение касательной к кривой*

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1-\cos t), \quad z = 4a\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

при $t_0 = \frac{\pi}{2}$. *Какой угол образует эта касательная с осью* Oz.

Решение: $\overline{r}(t_0) = \left(a\left(\frac{\pi}{2}-1\right), a, 2a\sqrt{2}\right)$.
$\overline{\tau}(t) = \left(a(1-\cos t), a\sin t, 2a\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$, $\overline{\tau}(t_0) = (a, a, a\sqrt{2})$. Таким образом, уравнение касательной примет вид: $\begin{cases} x = a\left(\frac{\pi}{2}-1\right) + au, \\ y = a + au, \\ z = 2a\sqrt{2} + a\sqrt{2}u. \end{cases}$ Направляющий вектор данной прямой имеет координаты $(1, 1, \sqrt{2})$, один из векторов, направленных вдоль оси Oz, имеет координаты $(0, 0, 1)$. Тогда искомый угол равен: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{\pi}{4}$.

Второе приближение кривой

Определение 12 *Пусть кривая* $\Gamma = \{\overline{r}(s) \mid s \in [0, |\Gamma|]\}$ *задана в натуральной параметризации. Пусть вектор-функция* $\overline{r}\colon [0, |\Gamma|] \to \mathbb{R}^n$ *дважды дифференцируема на* $[0, |\Gamma|]$. *Пусть* $\overline{\tau}(s)$ *– единичный вектор касательной. Тогда число* $k = k(s_0) = \left|\frac{d\overline{\tau}}{ds}(s_0)\right|$ *называется кривизной кривой* Γ *в точке* $\overline{r}_0 = \overline{r}(s_0)$.

Задача 2 *Найти наименьшее значение кривизны кривой* $x(t) = 3\cos t - \sin t$, $y(t) = 3\cos t + \sin t$.

Решение: Отметим, что для плоской кривой кривизна вычисляется по формуле $k = \frac{|x'y''-x''y'|}{((x')^2+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$. Вычислим первые и вторые производные: $x'(t) = -3\sin t - \cos t$, $x''(t) = -3\cos t + \sin t$, $y'(t) = -3\sin t + \cos t$, $y''(t) = -3\cos t - \sin t$. Отсюда найдем кривизну: $k(t) = \frac{6}{(18-16\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$. Очевидно, что минимум данной функции будет достигаться при наибольшем знаменателе, то есть при $\cos t_0 = 0$. Откуда получаем $k_{\min} = \frac{6}{(18-16\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{9\sqrt{2}}$