1. Решите неравенство $\dfrac{\log_3\left(x^4\right)\cdot\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2\right)+\log_3\left(x^2\right)-\log_{\frac{1}{3}}\left(x^4\right)+2}{\left(\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2\right)\right)^3+64}\le 0$.

Ответ. $x\in(-9;-3]\cup\left[-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right]\cup[3;9)$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{2\log_3 x^2\cdot\left(-\log_3 x^2\right)+\log_3 x^2+2\log_3 x^2+2}{64-\log_3^3 x^2}\le 0.$$

После замены $\log_3 x^2=t$ неравенство принимает вид $\dfrac{-2t^2+3t+2}{64-t^3}\le 0$, откуда $\dfrac{(2-t)(1+2t)}{4-t}\le 0$,

$t\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup[2;4)$.

Находим значения x.

При $t\le-\dfrac{1}{2}$ получаем $0<x^2\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right]$.

При $2\le t<4$ получаем $9\le x^2<81\Leftrightarrow x\in(-9;-3]\cup[3;9)$.

2. Решите уравнение $\left(\dfrac{7}{2}\cos 2x+2\right)\cdot\left|2\cos 2x-1\right|=\cos x(\cos x+\cos 5x)$.

Ответ. $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in Z$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\cos x(\cos x+\cos 5x)=\cos x\cdot 2\cos 3x\cos 2x=\cos 2x\cdot(2\cos x\cos 3x)=\cos 2x\cdot(\cos 2x+\cos 4x)=$$
$$=\cos 2x\left(2\cos^2 2x+\cos 2x-1\right)=\cos 2x(2\cos 2x-1)(\cos 2x+1).$$

Обозначим $\cos 2x=t$. Тогда уравнение принимает вид $\left(\dfrac{7}{2}t+2\right)\cdot|2t-1|=t(2t-1)(t+1)$. Возможны три случая.

а) $t=\dfrac{1}{2}$ является корнем уравнения.

б) $t>\dfrac{1}{2}$. Получаем $\dfrac{7}{2}t+2=t^2+t$, $t^2-\dfrac{5}{2}t-2=0$, $t=\dfrac{5\pm\sqrt{57}}{4}$. Корень $t_1=\dfrac{5+\sqrt{57}}{4}$ не подходит, так как $t_1>1$; корень $t_2=\dfrac{5-\sqrt{57}}{4}$ не подходит, так как не удовлетворяет условию $t>\dfrac{1}{2}$.

в) $t<\dfrac{1}{2}$. Получаем $\dfrac{7}{2}t+2=-t^2-t$, $t^2+\dfrac{9}{2}t+2=0$, $t=4$ или $t=-\dfrac{1}{2}$. Подходит $t=-\dfrac{1}{2}$.

Итого: $t=\pm\dfrac{1}{2}$, $\cos 2x=\pm\dfrac{1}{2}$, $2x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in Z$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=-\dfrac{2}{15},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=-\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

Ответ. $(5;-1;-2)$.

Решение. Домножая обе части первого уравнения на $-\dfrac{15}{2}x(y+z)$, обе части второго – на $-\dfrac{3}{2}y(x+z)$, третьего – на $-4z(x+y)$, получаем систему

$$\begin{cases}-7{,}5(x+y+z)=xy+xz,\\ -1{,}5(x+y+z)=xy+yz,\\ -4(x+y+z)=xz+yz.\end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения и разделив полученное равенство пополам, получаем равенство

$$xy+xz+yz=-6{,}5(x+y+z).$$

Вычитая из него каждое из уравнений последней системы, находим, что

$$\begin{cases}-2{,}5(x+y+z)=xy,\\ (x+y+z)=yz,\\ -5(x+y+z)=xz.\end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе (это возможно, так как из ОДЗ исходной системы следует, что $xyz\neq 0$), получаем, что $x=-2{,}5z$, а разделив первое на третье – что $y=0{,}5z$.

Тогда второе уравнение принимает вид $-z=0{,}5z^2$, откуда $z=-2$, $x=5$, $y=-1$.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=2:5$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF:FC=1:4$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Ответ. а) $9:40$, б) $\arccos\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

Решение. а) В треугольнике ABM отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM равнобедренный, а BP является также его медианой. Обозначим $BM=2x$, тогда $AB=2x$, $MC=5x$. По свойству биссектрисы треугольника, $AL:LC=AB:BC=2x:7x=2:7$.

Обозначим площадь треугольника ABC через S. Тогда $S_{ABP}=\dfrac{1}{2}S_{ABM}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{7}S_{ABC}=\dfrac{1}{7}S$. По теореме об отношении площадей треугольников получаем $\dfrac{S_{APL}}{S_{AMC}}=\dfrac{AP}{AM}\cdot\dfrac{AL}{AC}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{9}$, следовательно, $S_{APL}=\dfrac{1}{9}S_{AMC}=\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{5}{7}S$, $S_{LPMC}=\dfrac{8}{9}S_{AMC}=\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{5}{7}S=\dfrac{40}{63}S$. Искомое отношение равно $\dfrac{1}{7}S:\dfrac{40}{63}S=\dfrac{9}{40}$.

б) Так как у треугольников ABP и ALP общая высота, проведённая из вершины A, то $BP:PL=S_{ABP}:S_{ALP}=\dfrac{1}{7}:\dfrac{5}{9\cdot 7}=9:5$. Пусть $BP=9y$, $PL=5y$.

Пусть $\angle CBL=\gamma$. Тогда из треугольника BPM получаем, что $\cos\gamma=\dfrac{9y}{2x}$, а из треугольника BFL – что $\cos\gamma=\dfrac{3x}{14y}$. Приравнивая эти выражения для косинуса, находим, что $x=y\sqrt{21}$, откуда $\cos\gamma=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $5x^2-6xy+y^2=6^{100}$.

Ответ. 19594.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $(5x-y)(x-y)=2^{100}\cdot 3^{100}$. Поскольку каждый из множителей в левой части является целым числом, отсюда следует, что

$$\begin{cases}5x-y=2^k\cdot 3^l,\\ x-y=2^{100-k}\cdot 3^{100-l}\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}5x-y=-2^k\cdot 3^l,\\ x-y=-2^{100-k}\cdot 3^{100-l},\end{cases}$$

где k и l – целые числа из отрезка $[0;100]$.

Найдём количество решений первой системы. Выражая из неё x и y, получаем

$$\begin{cases}x=2^{k-2}\cdot 3^l-2^{98-k}\cdot 3^{100-l},\\ y=2^{k-2}\cdot 3^l-5\cdot 2^{98-k}\cdot 3^{100-l}.\end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. Показатели в степенях тройки неотрицательны. Сумма показателей в степенях двойки равна 96, поэтому хотя бы один из них положителен, т.е соответствующий ему член является целым числом. Так как в левой части равенства также целое число, то и второй член в правой части равенства должен быть целым. Значит, для существования целочисленных решений необходимо и достаточно, чтобы $2 \le k \le 98$, $0 \le l \le 100$ – всего $97 \cdot 101 = 9797$ вариантов.

Вторая система также имеет 9797 решений; итак, всего 19594 решений.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a(a + y - x) = 49, \\ y = 15\cos(x - b) - 8\sin(x - b) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $a \in [-24; 24]$.

Решение. Первое уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x - a)^2 + (y + a)^2 = 7^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 7 с центром $(a; -a)$.

С помощью введения вспомогательного угла второе уравнение системы может быть приведено к виду $y = 17\cos(x - b - \theta)$. При всевозможных $b \in \mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $-17 \le y \le 17$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы окружность, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой, откуда $a \in [-24; 24]$.

7. В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $AC = 4$ и $\angle DBC = 30^\circ$. Сфера проходит через вершины D, A, B, B_1, C_1, D_1.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки B, C и D.

б) Найдите угол A_1CD.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 5. Найдите объём призмы.

Ответ. а) 16π, б) 90°, в) $48\sqrt{3}$.

Решение. а) Так как диагонали ромба являются биссектрисами его углов, получаем, что острый угол ромба равен 60°. В сечении шара плоскостью BCD получаем круг, описанный около треугольника ABD. Центром этого круга является точка C, а его радиус равен стороне ромба, то есть 4. Значит, площадь равна 16π.

б) Пусть O – центр шара. Опустим из точки O перпендикуляр OH на плоскость $ABCD$. Тогда треугольники OHA, OHB и OHD равны по катету и гипотенузе (OH – общая, $OA = OB = OD$ как радиусы сферы). Значит, $HA = HB = HD$, поэтому H – центр окружности, описанной около треугольника ABD, т.е. точка H совпадает с точкой C.

Таким образом, отрезок OC перпендикулярен плоскости основания $ABCD$. Аналогично доказывается, что отрезок OA_1 перпендикулярен плоскости $A_1B_1C_1D_1$. Итак, диагональ A_1C является высотой призмы, а центр сферы O – это её середина. Поэтому $\angle A_1CD = 90^\circ$.

в) В прямоугольном треугольнике AOC известны гипотенуза $AO = 5$ и катет $AC = 4$. Значит, $CO = 3$, $A_1C = 6$; $V = A_1C \cdot S_{ABCD} = 6 \cdot 8\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$.

1. Решите неравенство $\dfrac{125+\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(x^4\right)\right)^3}{\log_2\left(x^4\right)\cdot\log_2\left(x^2\right)+6\log_{\frac{1}{2}}\left(x^4\right)+17\log_2\left(x^2\right)-3}\geq 0$.

Ответ. $x\in\left[-2\sqrt[4]{2};-\sqrt[4]{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cup\left(\sqrt[4]{2};2\sqrt[4]{2}\right]$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{125-\left(2\log_2\left(x^2\right)\right)^3}{2\log_2\left(x^2\right)\cdot\log_2\left(x^2\right)-12\log_2\left(x^2\right)+17\log_5\left(x^2\right)-3}\geq 0.$$

После замены $\log_2 x^2=t$ неравенство принимает вид $\dfrac{125-(2t)^3}{2t^2+5t-3}\geq 0$, откуда $\dfrac{2t-5}{(t+3)(2t-1)}\leq 0$, $t\in(-\infty;-3)\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right]$.

Находим значения x.

При $t<-3$ получаем $0<x^2<\dfrac{1}{8}\Leftrightarrow x\in\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

При $\dfrac{1}{2}<t\leq\dfrac{5}{2}$ получаем $\sqrt{2}<x^2\leq\sqrt{32}\Leftrightarrow x\in\left[-2\sqrt[4]{2};-\sqrt[4]{2}\right)\cup\left(\sqrt[4]{2};2\sqrt[4]{2}\right]$.

2. Решите уравнение $\left(\dfrac{7}{4}-2\cos 2x\right)\cdot\left|2\cos 2x+1\right|=\cos x(\cos x-\cos 5x)$.

Ответ. $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in Z$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\cos x(\cos x-\cos 5x)=\cos x\cdot(2\sin 2x\sin 3x)=\sin 2x\cdot(2\sin 3x\cos x)=\sin 2x\cdot(\sin 4x+\sin 2x)=$$
$$=\sin 2x(2\sin 2x\cos 2x+\sin 2x)=\sin^2 2x(1+2\cos 2x)=\left(1-\cos^2 2x\right)(1+2\cos 2x).$$

Обозначим $\cos 2x=t$. Тогда уравнение принимает вид $\left(\dfrac{7}{4}-2t\right)\cdot|1+2t|=(1+2t)\left(1-t^2\right)$. Возможны три случая.

а) $t=-\dfrac{1}{2}$ является корнем уравнения.

б) $t>-\dfrac{1}{2}$. Получаем $\dfrac{7}{4}-2t=1-t^2$, $t^2-2t+\dfrac{3}{4}=0$, $t=\dfrac{1}{2}$ или $t=\dfrac{3}{2}$. Подходит $t=\dfrac{1}{2}$.

в) $t<-\dfrac{1}{2}$. Получаем $\dfrac{7}{4}-2t=t^2-1$, $t^2+2t-\dfrac{11}{4}=0$, $t=\dfrac{-2\pm\sqrt{15}}{2}$. Корень $t_1=\dfrac{-2-\sqrt{15}}{2}$ не подходит, так как $t_1<-1$; корень $t_2=\dfrac{-2+\sqrt{15}}{2}$ не подходит, так как не удовлетворяет условию $t<-\dfrac{1}{2}$.

Итого: $t=\pm\dfrac{1}{2}$, $\cos 2x=\pm\dfrac{1}{2}$, $2x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in Z$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{12},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{1}{6},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Ответ. $(-4;2;1)$.

Решение. Домножая обе части первого уравнения на $12x(y+z)$, обе части второго – на $6y(x+z)$, третьего – на $2z(x+y)$, получаем систему

$$\begin{cases}12(x+y+z)=xy+xz,\\6(x+y+z)=xy+yz,\\2(x+y+z)=xz+yz.\end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения и разделив полученное равенство пополам, получаем равенство

$$xy+xz+yz=10(x+y+z).$$

Вычитая из него каждое из уравнений последней системы, находим, что

$$\begin{cases}8(x+y+z)=xy,\\-2(x+y+z)=yz,\\4(x+y+z)=xz.\end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе (это возможно, так как из ОДЗ исходной системы следует, что $xyz\neq 0$), получаем, что $x=-4z$, а разделив первое на третье – что $y=2z$.

Тогда второе уравнение принимает вид $2z=2z^2$, откуда $z=1$, $x=-4$, $y=2$.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=2:7$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка T такая, что $MT:TC=1:6$. Пусть дополнительно известно, что прямые LT и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Ответ. а) $11:70$, б) $\arccos\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$.

Решение. а) В треугольнике ABM отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM равнобедренный, а BP является также его медианой. Обозначим $BM=2x$, тогда $AB=2x$, $MC=7x$. По свойству биссектрисы треугольника, $AL:LC=AB:BC=2x:9x=2:9$.

Обозначим площадь треугольника ABC через S. Тогда $S_{ABP}=\frac{1}{2}S_{ABM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}S_{ABC}=\frac{1}{9}S$. По теореме об отношении площадей треугольников получаем $\frac{S_{APL}}{S_{AMC}}=\frac{AP}{AM}\cdot\frac{AL}{AC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{11}=\frac{1}{11}$, следовательно, $S_{APL}=\frac{1}{11}S_{AMC}=\frac{1}{11}\cdot\frac{7}{9}S$, $S_{LPMC}=\frac{10}{11}S_{AMC}=\frac{10}{11}\cdot\frac{7}{9}S=\frac{70}{99}S$. Искомое отношение равно $\frac{1}{9}S:\frac{70}{99}S=\frac{11}{70}$.

б) Так как у треугольников ABP и ALP общая высота, проведённая из вершины A, то $BP:PL=S_{ABP}:S_{ALP}=\frac{1}{9}:\frac{7}{9\cdot 11}=11:7$. Пусть $BP=11y$, $PL=7y$.

Пусть $\angle CBL=\gamma$. Тогда из треугольника BPM получаем, что $\cos\gamma=\frac{11y}{2x}$, а из треугольника BFL – что $\cos\gamma=\frac{3x}{18y}$. Приравнивая эти выражения для косинуса, находим, что $x=y\sqrt{33}$, откуда $\cos\gamma=\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $6x^2-7xy+y^2=10^{100}$.

Ответ. 19998.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $(6x-y)(x-y)=2^{100}\cdot 5^{100}$. Поскольку каждый из множителей в левой части является целым числом, отсюда следует, что

$$\begin{cases}6x-y=2^k\cdot 5^l,\\x-y=2^{100-k}\cdot 5^{100-l}\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}6x-y=-2^k\cdot 5^l,\\x-y=-2^{100-k}\cdot 5^{100-l},\end{cases}$$

где k и l – целые числа из отрезка $[0;100]$.

Найдём количество решений первой системы. Выражая из неё x и y, получаем

$$\begin{cases}x=2^k\cdot 5^{l-1}-2^{100-k}\cdot 5^{99-l},\\y=2^k\cdot 5^{l-1}-6\cdot 2^{100-k}\cdot 5^{99-l}.\end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. Показатели в степенях двойки неотрицательны. Сумма показателей в степенях пятёрки равна 98, поэтому хотя бы один из них положителен, т.е соответствующий ему член является целым числом. Так как в левой части равенства также целое число, то и второй член в правой части равенства должен быть целым. Значит, для существования целочисленных решений необходимо и достаточно, чтобы $0 \le k \le 100$, $1 \le l \le 99$ – всего $99 \cdot 101 = 9999$ вариантов.

Вторая система также имеет 9999 решений; итак, всего 19998 решений.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2b(b - x + y) = 4, \\ y = 5\cos(x - a) - 12\sin(x - a) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $b \in [-15; 15]$.

Решение. Первое уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x - b)^2 + (y + b)^2 = 2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 9 с центром $(-b; -b)$.

С помощью введения вспомогательного угла второе уравнение системы может быть приведено к виду $y = 13\cos(x - a - \theta)$. При всевозможных $a \in \mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $-13 \le y \le 13$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы окружность, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой, откуда $b \in [-15; 15]$.

7. В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $CD = 3$ и $\angle ABD = 30^\circ$. Сфера проходит через вершины D, C, B, B_1, A_1, D_1.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки A, C и D.

б) Найдите угол C_1AB.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 6. Найдите объём призмы.

Ответ. а) 9π, б) 90°, в) 81.

Решение. а) Так как диагонали ромба являются биссектрисами его углов, получаем, что острый угол ромба равен 60°. В сечении шара плоскостью ACD получаем круг, описанный около треугольника BCD. Центром этого круга является точка A, а его радиус равен стороне ромба, то есть 3. Значит, площадь равна 9π.

б) Пусть O – центр шара. Опустим из точки O перпендикуляр OH на плоскость $ABCD$. Тогда треугольники OHC, OHB и OHD равны по катету и гипотенузе (OH – общая, $OC = OB = OD$ как радиусы сферы). Значит, $HC = HB = HD$, поэтому H – центр окружности, описанной около треугольника CBD, т.е. точка H совпадает с точкой C.

Таким образом, отрезок OA перпендикулярен плоскости основания $ABCD$. Аналогично доказывается, что отрезок OC_1 перпендикулярен плоскости $A_1B_1C_1D_1$. Итак, диагональ AC_1 является высотой призмы, а центр сферы O – это её середина. Поэтому $\angle C_1AB = 90^\circ$.

в) В прямоугольном треугольнике AOC известны гипотенуза $CO = 6$ и катет $AC = 3$. Значит, $AO = 3\sqrt{3}$, $C_1A = 6\sqrt{3}$; $V = AC_1 \cdot S_{ABCD} = 6\sqrt{3} \cdot \dfrac{9\sqrt{3}}{2} = 81$.

1. Решите неравенство $\dfrac{\log_2\left(x^6\right)\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(x^6\right)-8\log_2\left(x^2\right)+2}{8+\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)\right)^3}\le 0$.

Ответ. $x\in\left(-2;-\sqrt[6]{2}\right]\cup\left[-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\left[\sqrt[6]{2};2\right)$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{3\log_2 x^2\cdot\left(-\log_2 x^2\right)+3\log_2 x^2-8\log_2 x^2+2}{8-\log_2^3 x^2}\le 0.$$

После замены $\log_2 x^2=t$ неравенство принимает вид $\dfrac{-3t^2-5t+2}{8-t^3}\le 0$, откуда $\dfrac{(2+t)(1-3t)}{2-t}\le 0$,

$t\in(-\infty;-2]\cup\left[\frac{1}{3};2\right)$.

Находим значения x.

При $t\le -2$ получаем $0<x^2\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

При $\frac{1}{3}\le t<2$ получаем $\sqrt[3]{2}\le x^2<4\Leftrightarrow x\in\left(-2;-\sqrt[6]{2}\right]\cup\left[\sqrt[6]{2};2\right)$.

2. Решите уравнение $\left(3\cos 2x+\frac{9}{4}\right)\cdot\left|1-2\cos 2x\right|=\sin x(\sin x-\sin 5x)$.

Ответ. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\sin x(\sin x-\sin 5x)=\sin x\cdot(-2\sin 2x\cos 3x)=-\sin 2x\cdot(2\sin x\cos 3x)=-\sin 2x\cdot(\sin 4x-\sin 2x)=$$
$$=-\sin 2x(2\sin 2x\cos 2x-\sin 2x)=\sin^2 2x(1-2\cos 2x)=\left(1-\cos^2 2x\right)(1-2\cos 2x).$$

Обозначим $\cos 2x=t$. Тогда уравнение принимает вид $\left(\frac{9}{4}+3t\right)\cdot|1-2t|=(1-2t)\left(1-t^2\right)$. Возможны три случая.

а) $t=\frac{1}{2}$ является корнем уравнения.

б) $t<\frac{1}{2}$. Получаем $\frac{9}{4}+3t=1-t^2$, $t^2+3t+\frac{5}{4}=0$, $t=-\frac{1}{2}$ или $t=-\frac{5}{2}$. Подходит $t=-\frac{1}{2}$.

в) $t>\frac{1}{2}$. Получаем $\frac{9}{4}+3t=t^2-1$, $t^2-3t-\frac{13}{4}=0$, $t=\frac{3\pm\sqrt{22}}{2}$. Корень $t_1=\frac{3+\sqrt{22}}{2}$ не подходит, так как $t_1>1$; корень $t_2=\frac{3-\sqrt{22}}{2}$ не подходит, так как не удовлетворяет условию $t>\frac{1}{2}$.

Итого: $t=\pm\frac{1}{2}$, $\cos 2x=\pm\frac{1}{2}$, $2x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=1,\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{x+z}=\frac{4}{3},\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=-\frac{4}{5}.\end{cases}$

Ответ. $(2;3;-1)$.

Решение. Домножая обе части первого уравнения на $x(y+z)$, обе части второго – на $\frac{3}{4}y(x+z)$, третьего – на $-\frac{5}{4}z(x+y)$, получаем систему

$$\begin{cases} (x+y+z)=xy+xz, \\ \dfrac{3}{4}(x+y+z)=xy+yz, \\ -\dfrac{5}{4}(x+y+z)=xz+yz. \end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения и разделив полученное равенство пополам, получаем равенство

$$xy+xz+yz=\frac{1}{4}(x+y+z).$$

Вычитая из него каждое из уравнений последней системы, находим, что

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}(x+y+z)=xy, \\ -\dfrac{3}{4}(x+y+z)=yz, \\ -\dfrac{1}{2}(x+y+z)=xz. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе (это возможно, так как из ОДЗ исходной системы следует, что $xyz\neq 0$), получаем, что $x=-2z$, а разделив первое на третье – что $y=-3z$.

Тогда второе уравнение принимает вид $3z=-3z^2$, откуда $z=-1$, $x=2$, $y=3$.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=3:8$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF:FC=1:7$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Ответ. а) $21:100$, б) $\arccos\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{33}}$.

Решение. а) В треугольнике ABM отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM равнобедренный, а BP является также его медианой. Обозначим $BM=3x$, тогда $AB=3x$, $MC=8x$. По свойству биссектрисы треугольника, $AL:LC=AB:BC=3x:11x=3:11$.

Обозначим площадь треугольника ABC через S. Тогда $S_{ABP}=\frac{1}{2}S_{ABM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{11}S_{ABC}=\frac{3}{22}S$. По теореме об отношении площадей треугольников получаем $\dfrac{S_{APL}}{S_{AMC}}=\dfrac{AP}{AM}\cdot\dfrac{AL}{AC}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{14}=\dfrac{3}{28}$, следовательно, $S_{APL}=\frac{3}{28}S_{AMC}=\frac{3}{28}\cdot\frac{8}{11}S$, $S_{LPMC}=\frac{25}{28}S_{AMC}=\frac{25}{28}\cdot\frac{8}{11}S=\frac{50}{77}S$. Искомое отношение равно $\frac{3}{22}S:\frac{50}{77}S=\frac{21}{100}$.

б) Так как у треугольников ABP и ALP общая высота, проведённая из вершины A, то $BP:PL=S_{ABP}:S_{ALP}=\frac{3}{22}:\frac{6}{77}=7:4$. Пусть $BP=7y$, $PL=4y$.

Пусть $\angle CBL=\gamma$. Тогда из треугольника BPM получаем, что $\cos\gamma=\dfrac{7y}{3x}$, а из треугольника BFL – что $\cos\gamma=\dfrac{4x}{11y}$. Приравнивая эти выражения для косинуса, находим, что $x=\dfrac{y\sqrt{77}}{2\sqrt{3}}$, откуда $\cos\gamma=\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{33}}$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $x^2+6xy+5y^2=10^{100}$.

Ответ. 19594.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $(x+5y)(x+y)=2^{100}\cdot 5^{100}$.

Поскольку каждый из множителей в левой части является целым числом, отсюда следует, что

$$\begin{cases} x+5y=2^k\cdot 5^l, \\ x+y=2^{100-k}\cdot 5^{100-l} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+5y=-2^k\cdot 5^l, \\ x+y=-2^{100-k}\cdot 5^{100-l} \end{cases}$$

где k и l – целые числа из отрезка $[0;100]$.

Найдём количество решений первой системы. Выражая из неё x и y, получаем

$$\begin{cases} y = 2^{k-2} \cdot 5^l - 2^{98-k} \cdot 5^{100-l}, \\ x = 5 \cdot 2^{98-k} \cdot 5^{100-l} - 2^{k-2} \cdot 5^l. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. Показатели в степенях пятёрки неотрицательны. Сумма показателей в степенях двойки равна 96, поэтому хотя бы один из них положителен, т.е соответствующий ему член является целым числом. Так как в левой части равенства также целое число, то и второй член в правой части равенства должен быть целым. Значит, для существования целочисленных решений необходимо и достаточно, чтобы $2 \le k \le 98$, $0 \le l \le 100$ – всего $97 \cdot 101 = 9797$ вариантов.

Вторая система также имеет 9797 решений; итак, всего 19594 решений.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a(a - x - y) = 64, \\ y = 8\sin(x - 2b) - 6\cos(x - 2b) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $a \in [-18; 18]$.

Решение. Первое уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 8^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 8 с центром $(a; a)$.

С помощью введения вспомогательного угла второе уравнение системы может быть приведено к виду $y = 10\cos(x - 2b - \theta)$. При всевозможных $b \in \mathsf{R}$ графики этих функций заметают полосу $-10 \le y \le 10$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы окружность, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой, откуда $a \in [-18; 18]$.

7. В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $BD = 12$ и $\angle BAC = 60^\circ$. Сфера проходит через вершины D, A, B, B_1, C_1, D_1.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки A_1, B_1 и C_1.

б) Найдите угол A_1CB.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 8. Найдите объём призмы.

Ответ. а) 48π, б) 90°, в) $192\sqrt{3}$.

Решение. а) Так как диагонали ромба являются биссектрисами его углов, то острый угол ромба равен 60°, а $AC = 4\sqrt{3}$. В сечении шара плоскостью $A_1C_1B_1$ получаем круг, описанный около треугольника $C_1B_1D_1$. Центром этого круга является точка A_1, а его радиус равен стороне ромба, то есть $4\sqrt{3}$. Значит, площадь равна 48π.

б) Пусть O – центр шара. Опустим из точки O перпендикуляр OH на плоскость $ABCD$. Тогда треугольники OHA, OHB и OHD равны по катету и гипотенузе (OH – общая, $OA = OB = OD$ как радиусы сферы). Значит, $HA = HB = HD$, поэтому H – центр окружности, описанной около треугольника ABD, т.е. точка H совпадает с точкой C.

Таким образом, отрезок OC перпендикулярен плоскости основания $ABCD$. Аналогично доказывается, что отрезок OA_1 перпендикулярен плоскости $A_1B_1C_1D_1$. Итак, диагональ A_1C является высотой призмы, а центр сферы O – это её середина. Поэтому $\angle A_1CB = 90^\circ$.

в) В прямоугольном треугольнике AOC известны гипотенуза $AO = 8$ и катет $AC = 4\sqrt{3}$. Значит, $CO = 4$, $A_1C = 8$; $V = A_1C \cdot S_{ABCD} = 8 \cdot 24\sqrt{3} = 192\sqrt{3}$.

1. Решите неравенство $\dfrac{64+\left(\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2\right)\right)^3}{\log_{\frac{1}{5}}\left(x^6\right)\cdot\log_5\left(x^2\right)+5\log_5\left(x^6\right)+14\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2\right)+2}\le 0$.

Ответ. $x\in\left[-25;-\sqrt{5}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)\cup\left(\sqrt{5};25\right]$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{64-\left(\log_5\left(x^2\right)\right)^3}{-3\log_5\left(x^2\right)\cdot\log_5\left(x^2\right)+15\log_5\left(x^2\right)-14\log_5\left(x^2\right)+2}\le 0.$$

После замены $\log_5 x^2=t$ неравенство принимает вид $\dfrac{64-t^3}{-3t^2+t+2}\le 0$, откуда $\dfrac{4-t}{(1-t)(2+3t)}\le 0$,

$t\in\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)\cup(1;4]$.

Находим значения x.

При $t<-\dfrac{2}{3}$ получаем $0<x^2<5^{-2/3}\Leftrightarrow x\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)$.

При $1<t\le 4$ получаем $5<x^2\le 625\Leftrightarrow x\in\left[-25;-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};25\right]$.

2. Решите уравнение $\left(\dfrac{7}{4}-3\cos 2x\right)\cdot\left|1+2\cos 2x\right|=\sin x(\sin x+\sin 5x)$.

Ответ. $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in Z$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\sin x(\sin x+\sin 5x)=\sin x\cdot 2\sin 3x\cos 2x=\cos 2x\cdot(2\sin x\sin 3x)=\cos 2x\cdot(\cos 2x-\cos 4x)=$$
$$=\cos 2x\left(-2\cos^2 2x+\cos 2x+1\right)=\cos 2x(1-\cos 2x)(2\cos 2x+1).$$

Обозначим $\cos 2x=t$. Тогда уравнение принимает вид $\left(\dfrac{7}{4}-3t\right)\cdot|2t+1|=t(2t+1)(1-t)$. Возможны три случая.

а) $t=-\dfrac{1}{2}$ является корнем уравнения.

б) $t>-\dfrac{1}{2}$. Получаем $\dfrac{7}{4}-3t=t-t^2$, $t^2-4t+\dfrac{7}{4}=0$, $t=\dfrac{1}{2}$ или $t=\dfrac{7}{2}$. Подходит $t=\dfrac{1}{2}$.

в) $t<-\dfrac{1}{2}$. Получаем $-\dfrac{7}{4}+3t=t-t^2$, $t^2+2t-\dfrac{7}{4}=0$, $t=\dfrac{-2\pm\sqrt{11}}{2}$. Корень $t_1=\dfrac{-2-\sqrt{11}}{2}$ не подходит, так как $t_1<-1$; корень $t_2=\dfrac{-2+\sqrt{11}}{2}$ не подходит, так как не удовлетворяет условию $t<-\dfrac{1}{2}$.

Итого: $t=\pm\dfrac{1}{2}$, $\cos 2x=\pm\dfrac{1}{2}$, $2x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in Z$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{6}{5},\\[2mm] \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{3}{4},\\[2mm] \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

Ответ. $(1;2;3)$.

Решение. Домножая обе части первого уравнения на $\dfrac{5}{6}x(y+z)$, обе части второго – на $\dfrac{4}{3}y(x+z)$, третьего – на $\dfrac{3}{2}z(x+y)$, получаем систему

$$\begin{cases} \frac{5}{6}(x+y+z)=xy+xz, \\ \frac{4}{3}(x+y+z)=xy+yz, \\ \frac{3}{2}(x+y+z)=xz+yz. \end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения и разделив полученное равенство пополам, получаем равенство

$$xy+xz+yz=\frac{11}{6}(x+y+z).$$

Вычитая из него каждое из уравнений последней системы, находим, что

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x+y+z)=xy, \\ (x+y+z)=yz, \\ \frac{1}{2}(x+y+z)=xz. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе (это возможно, так как из ОДЗ исходной системы следует, что $xyz \neq 0$), получаем, что $x=\frac{1}{3}z$, а разделив первое на третье – что $y=\frac{2}{3}z$.

Тогда второе уравнение принимает вид $2z=\frac{2}{3}z^2$, откуда $z=3$, $x=1$, $y=2$.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=3:7$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка T такая, что $MT:TC=1:6$. Пусть дополнительно известно, что прямые LT и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Ответ. а) $39:161$, б) $\arccos\sqrt{\frac{13}{15}}$.

Решение. а) В треугольнике ABM отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM равнобедренный, а BP является также его медианой. Обозначим $BM=3x$, тогда $AB=3x$, $MC=7x$. По свойству биссектрисы треугольника, $AL:LC=AB:BC=3x:10x=3:10$.

Обозначим площадь треугольника ABC через S. Тогда $S_{ABP}=\frac{1}{2}S_{ABM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}S_{ABC}=\frac{3}{20}S$. По теореме об отношении площадей треугольников получаем $\frac{S_{APL}}{S_{AMC}}=\frac{AP}{AM}\cdot\frac{AL}{AC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{13}=\frac{3}{26}$, следовательно, $S_{APL}=\frac{3}{26}S_{AMC}=\frac{3}{26}\cdot\frac{7}{10}S$, $S_{LPMC}=\frac{23}{26}S_{AMC}=\frac{23}{26}\cdot\frac{7}{10}S=\frac{161}{260}S$. Искомое отношение равно $\frac{3}{20}S:\frac{161}{260}S=\frac{39}{161}$.

б) Так как у треугольников ABP и ALP общая высота, проведённая из вершины A, то $BP:PL=S_{ABP}:S_{ALP}=\frac{3}{20}:\frac{21}{260}=13:7$. Пусть $BP=13y$, $PL=7y$.

Пусть $\angle CBL=\gamma$. Тогда из треугольника BPM получаем, что $\cos\gamma=\frac{13y}{3x}$, а из треугольника BTL – что $\cos\gamma=\frac{4x}{20y}$. Приравнивая эти выражения для косинуса, находим, что $x=y\sqrt{\frac{65}{3}}$, откуда $\cos\gamma=\sqrt{\frac{13}{15}}$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $x^2+7xy+6y^2=15^{50}$.

Ответ. 4998.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $(x+6y)(x+y)=5^{50}\cdot 3^{50}$. Поскольку каждый из множителей в левой части является целым числом, отсюда следует, что

$$\begin{cases} x+6y=5^k\cdot 3^l, \\ x+y=5^{50-k}\cdot 3^{50-l} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+6y=-5^k\cdot 3^l, \\ x+y=-5^{50-k}\cdot 3^{50-l} \end{cases}$$

где k и l – целые числа из отрезка $[0;50]$.

Найдём количество решений первой системы. Выражая из неё x и y, получаем

$$\begin{cases} x = 6\cdot 5^{49-k}\cdot 3^{50-l} - 5^{k-1}\cdot 3^{l}, \\ y = 5^{k-1}\cdot 3^{l} - 5^{49-k}\cdot 3^{50-l}. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. Показатели в степенях тройки неотрицательны. Сумма показателей в степенях пятёрки равна 48, поэтому хотя бы один из них положителен, т.е соответствующий ему член является целым числом. Так как в левой части равенства также целое число, то и второй член в правой части равенства должен быть целым. Значит, для существования целочисленных решений необходимо и достаточно, чтобы $1 \le k \le 49$, $0 \le l \le 50$ – всего $49\cdot 51 = 2499$ вариантов.

Вторая система также имеет 2499 решений; итак, всего 4998 решений.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2b(b+x+y) = 81, \\ y = 4\cos(x+3a) - 3\sin(x+3a) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $b \in [-14;14]$.

Решение. Первое уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+b)^2 + (y+b)^2 = 9^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 9 с центром $(-b;-b)$.

С помощью введения вспомогательного угла второе уравнение системы может быть приведено к виду $y = 5\cos(x+3a-\theta)$. При всевозможных $a \in \mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $-5 \le y \le 5$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы окружность, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой, откуда $b \in [-14;14]$.

7. В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $BD = 3$ и $\angle ADC = 60^\circ$. Сфера проходит через вершины D, C, B, B_1, A_1, D_1.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки A_1, C_1 и D_1.

б) Найдите угол B_1C_1A.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 2. Найдите объём призмы.

Ответ. а) 3π, б) 90°, в) $3\sqrt{3}$.

Решение. а) Так как $BD = 3$ и острый угол ромба равен 60°, то $AC = \sqrt{3}$. В сечении шара плоскостью $A_1C_1D_1$ получаем круг, описанный около треугольника $A_1B_1D_1$. Центром этого круга является точка C_1, а его радиус равен стороне ромба, то есть $\sqrt{3}$. Значит, площадь равна 3π.

б) Пусть O – центр шара. Опустим из точки O перпендикуляр OH на плоскость $ABCD$. Тогда треугольники OHC, OHB и OHD равны по катету и гипотенузе (OH – общая, $OC = OB = OD$ как радиусы сферы). Значит, $HC = HB = HD$, поэтому H – центр окружности, описанной около треугольника BCD, т.е. точка H совпадает с точкой A.

Таким образом, отрезок OA перпендикулярен плоскости основания $ABCD$. Аналогично доказывается, что отрезок OC_1 перпендикулярен плоскости $A_1B_1C_1D_1$. Итак, диагональ AC_1 является высотой призмы, а центр сферы O – это её середина. Поэтому $\angle B_1C_1A = 90^\circ$.

в) В прямоугольном треугольнике AOC известны гипотенуза $CO = 2$ и катет $AC = \sqrt{3}$. Значит, $AO = 1$, $AC_1 = 2$;

$$V = AC_1 \cdot S_{ABCD} = 2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$