Мера Жордана в $\mathbb{R}^n$

Обобщим на случай $\mathbb{R}^n$ понятия длины для $n = 1$, площади для $n = 2$, объема для $n = 3$.

Определение 1 *Множество* $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ *называется клеткой (блоком), если оно может быть представлено в следующем виде* $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \le x_i \le b_i,\ i \in \overline{1,n}\}$, *где* $a_i \le b_i$, $i \in \overline{1,n}$ *причем каждое из неравенств может быть как нестрогим, так и строгим.*

Таким образом, в случае $n = 1$ клеткой будет интервал, полуинтервал, отрезок или пустое множество.

Для клеток в $\mathbb{R}^n$ определим функцию μ следующим образом: $\mu\emptyset = 0$, в случае, если клетка не является пустым множеством, то $\mu\Pi = \prod\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

Отметим следующие свойства меры клетки

1) $\mu\Pi \ge 0$;

2) если Π – клетка, представимая в виде объединения клеток $\Pi = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Pi_i$, где $\Pi_i \bigcap \Pi_j = \emptyset$ при $i \ne j$, тогда $\mu\Pi = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu\Pi_i$.

Определение 2 *Множество* $A \subset \mathbb{R}^n$ *называется клеточным (блочным/элементарным), если оно представимо в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся клеток, то есть множество* $A \subset \mathbb{R}^n$ *является клеточным, если найдутся клетки* $\{\Pi_k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{R}^n$, *такие что* $\Pi_i \bigcap \Pi_j = \emptyset$ *при* $i \ne j$ *и* $A = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \Pi_k$. *При этом определим меру клеточного множества* $A \subset \mathbb{R}^n$, *имеющего разбиение* $\{\Pi_k\}_{k=1}^m$, *следующим образом:* $\mu(A) = \sum\limits_{k=1}^{m} \mu(\Pi_k)$.

Замечание 1 *Отметим, что разбиение клеточного множества на клетки неединственно, при этом несложно доказать, что определение меры клеточного множества не зависит от выбора его разбиения.*

Утверждение 1 *Совокупность элементарных множеств замкнута относительно операций объединения, пересечения и разности (объединение, пересечение, разность двух элементарных множеств будет элементарным множеством).*

Утверждение 2 *$A, B \subset \mathbb{R}^n$ – клеточные множества. Тогда*

1) если $A \subset B$, то $0 \le \mu(A) \le \mu(B)$;

2) $\mu(A \bigcup B) \le \mu(A) + \mu(B)$;

3) если $A \bigcap B = \emptyset$, то $\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B)$;

4) если $A \subset B$, то $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Определение 3 *Пусть множество $X \subset R^n$ ограничено. Число $\mu_*(X) = \sup\limits_{A \subset X} \mu(A)$ называется нижней (внутренней) мерой Жордана множества X, число $\mu^*(X) = \inf\limits_{X \subset B} \mu(B)$ называется верхней (внешней) мерой Жордана множества X, где верхняя и нижняя грани берутся по всем элементарным множествам. Ограниченное множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется измеримым по Жордану, если $\mu_* X = \mu^* X$, общее значение верхней и нижней мер Жордана называется мерой Жордана множества X и обозначается $\mu(X)$.*

Теорема 1 *Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ измеримо тогда и только тогда, когда мера его границы равна нулю.*

Теорема 2 *Совокупность множеств, измеримых по Жордану, замкнута относительно операций объединения, пересечения и разности.*

Утверждение 3 *$A, B \subset \mathbb{R}^n$ – измеримые множества. Тогда*

1) если $A \subset B$, то $0 \le \mu(A) \le \mu(B)$;

2) $\mu(A \bigcup B) \le \mu(A) + \mu(B)$;

3) если $A \bigcap B = \emptyset$, то $\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B)$;

4) если $A \subset B$, то $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;

5) $\mu(A \bigcup B) + \mu(A \bigcap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Задача 1 *Доказать, что любое подмножество множества меры нуль измеримо и имеет меру нуль.*

Решение: Пусть $A \subset B$, $\mu(B) = 0$. Заметим, что $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$, поскольку любое элементарное множество, содержащее B, будет содержать и A. При этом $\mu^*(B) = 0$, а значит $0 \le \mu_*(A) \le \mu^*(A) \le 0$. Следовательно, $\mu^*(A) = \mu_*(A) = 0$, откуда множество A измеримо и $\mu(A) = 0$.

Задача 2 *Доказать, что конечное множество точек в* $\mathbb{R}^n$ *имеет меру нуль.*

Решение: По определению клетки, точка является клеткой меры нуль. Тогда конечное объединение клеток будет элементарным множеством, мера которого равна нулю.

Задача 3 *Доказать неизмеримость по Жордану*

1) *рациональных точек отрезка* $[0,1]$ *в* $\mathbb{R}^1$*;*

2) *точек квадрата* $[0,1]\times[0,1]$ *в* $\mathbb{R}^2$*, обе координаты которых рациональны.*

Решение: 1) <u>Способ 1.</u> Пусть $A=[0,1]\bigcap\mathbb{Q}$. Тогда $\partial A=[0,1]$. Действительно, в любой окрестности рациональной точки из отрезка $[0,1]$ лежит как рациональная точка отрезка $[0,1]$ (точки из множества), так и иррациональная точка отрезка $[0,1]$ (точка не из множества). Таким образом, любая рациональная точка отрезка $[0,1]$ является граничной точкой множества A. Аналогично, в любой окрестности иррациональной точки из отрезка $[0,1]$ лежит как рациональная точка отрезка $[0,1]$ (точки из множества), так и иррациональная точка отрезка $[0,1]$ (точка не из множества). Таким образом, любая иррациональная точка отрезка $[0,1]$ является граничной точкой множества A. $\mu(\partial A)=1\neq 0$. Следовательно, пользуясь критерием измеримости, доказываем, что множество A не является измеримым.
<u>Способ 2.</u> Несложно понять, что $\mu_*(A)=0$ (элементарные множества, содержащиеся в A либо являются пустым множеством, либо конечным набором рациональных точек отрезка $[0,1]$, а значит их мера не больше 0), а $\mu^*(A)=1$ (элементарные множества, содержащие A содержат отрезок $[0,1]$ без конечного числа точек, а значит их мера не меньше 1). Следовательно, по определению, множество A не является измеримым.
2) <u>Способ 1.</u> Пусть $A=[0,1]\bigcap\mathbb{Q}$, $B=A\times A$. Тогда $\partial B=[0,1]\times[0,1]$, $\mu(\partial B)=1\neq 0$. Следовательно, пользуясь критерием измеримости, доказываем, что множество B не является измеримым.
<u>Способ 2.</u> Аналогично пункту 1) доказывается, что $\mu_*(B)=0$, а $\mu^*(B)=1$. Следовательно, по определению, множество B не является измеримым.

Задача 4 *Доказать, что множество* $(\mathbb{Q}\bigcap[0,1])\times\{0\}$ *измеримо в* $\mathbb{R}^2$*.*

Решение: <u>Способ 1.</u> $A = (\mathbb{Q} \bigcap [0,1]) \times \{0\}$. $\partial A = [0,1] \times \{0\}$ и является клеткой в $\mathbb{R}^2$, мера которой равна нулю.
<u>Способ 2.</u> $\mu_*(A) = 0$ (элементарные множества, содержащиеся в A либо являются пустым множеством, либо конечным набором рациональных точек отрезка $[0,1]$, а значит их мера не больше 0), $\mu^*(A) = 0$ (элементарные множества, содержащие A содержат отрезок $[0,1]$ в $\mathbb{R}^2$ без конечного числа точек, а значит их мера не меньше 0).

Задача 5 *Привести пример неизмеримого по Жордану множества, замыкание которого измеримо по Жордану.*

Решение: Простейшим примером такого множества служит множество $A = [0,1] \bigcap \mathbb{Q}$ из задачи 3.

Задача 6 *Последовательность $x^k \in \mathbb{R}^n$ сходится к $x \in \mathbb{R}^n$. Доказать, что множество $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ имеет меру нуль.*

Решение: По определению сходящейся последовательности $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ \forall k \geq N(\varepsilon) \ \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(x)$. Определим клетку $A_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^n \mid x_i - \varepsilon \leq y_i \leq x_i + \varepsilon, \ i \in \overline{1,n}\}$. Заметим, что $U_\varepsilon(x) \subset A_\varepsilon$. Таким образом, вне клетки A_ε лежит конечное число элементов исходной последовательности. Причем, мера A_ε равна $(2\varepsilon)^n$. Определим элементарное множество $B_\varepsilon = A_\varepsilon \bigcup \left(\bigcup\limits_{m=1}^{N(\varepsilon)-1} \right)$. Очевидно, что $\mu(B_\varepsilon) = (2\varepsilon)^n$ и $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset B_\varepsilon$. Причем, $\mu(B_\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Откуда получаем $\mu^* \left(\{x^k \mid k \in \mathbb{N}\} \right) = 0$. Следовательно, мера множества $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ равна нулю.