МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 5 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\frac{\log_3\left(x^4\right)\cdot\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2\right)+\log_3\left(x^2\right)-\log_{\frac{1}{3}}\left(x^4\right)+2}{\left(\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2\right)\right)^3+64}\le 0.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{7}{2}\cos 2x+2\right)\cdot\left|2\cos 2x-1\right|=\cos x\left(\cos x+\cos 5x\right).$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=-\dfrac{2}{15},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=-\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=2:5$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF:FC=1:4$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $5x^2-6xy+y^2=6^{100}$.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases}x^2+y^2+2a(a+y-x)=49,\\ y=15\cos(x-b)-8\sin(x-b)\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

7. В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $AC=4$ и $\angle DBC=30^\circ$. Сфера проходит через вершины D, A, B, B_1, C_1, D_1.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки B, C и D.

б) Найдите угол A_1CD.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 5. Найдите объём призмы.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 6 ШИФР ______________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\frac{125+\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(x^4\right)\right)^3}{\log_2\left(x^4\right)\cdot\log_2\left(x^2\right)+6\log_{\frac{1}{2}}\left(x^4\right)+17\log_2\left(x^2\right)-3}\geq 0.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{7}{4}-2\cos 2x\right)\cdot\left|2\cos 2x+1\right|=\cos x(\cos x-\cos 5x).$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{12},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{1}{6},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=2:7$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка T такая, что $MT:TC=1:6$. Пусть дополнительно известно, что прямые LT и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $6x^2-7xy+y^2=10^{100}$.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases}x^2+y^2+2b(b-x+y)=4,\\ y=5\cos(x-a)-12\sin(x-a)\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

7. В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $CD=3$ и $\angle ABD=30^\circ$. Сфера проходит через вершины D, C, B, B_1, A_1, D_1.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки A, C и D.

б) Найдите угол C_1AB.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 6. Найдите объём призмы.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 7 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\frac{\log_2\left(x^6\right)\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(x^6\right)-8\log_2\left(x^2\right)+2}{8+\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)\right)^3}\leq 0.$$

2. Решите уравнение

$$\left(3\cos 2x+\frac{9}{4}\right)\cdot\left|1-2\cos 2x\right|=\sin x(\sin x-\sin 5x).$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=1,\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{4}{3},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=-\dfrac{4}{5}.\end{cases}$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=3:8$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF:FC=1:7$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $x^2+6xy+5y^2=10^{100}$.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases}x^2+y^2+2a(a-x-y)=64,\\ y=8\sin(x-2b)-6\cos(x-2b)\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

7. В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $BD=12$ и $\angle BAC=60^\circ$. Сфера проходит через вершины D, A, B, B_1, C_1, D_1.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки A_1, B_1 и C_1.

б) Найдите угол A_1CB.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 8. Найдите объём призмы.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 8 ШИФР ________________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\frac{64+\left(\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2\right)\right)^3}{\log_{\frac{1}{5}}\left(x^6\right)\cdot\log_5\left(x^2\right)+5\log_5\left(x^6\right)+14\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2\right)+2}\leq 0.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{7}{4}-3\cos 2x\right)\cdot|1+2\cos 2x|=\sin x(\sin x+\sin 5x).$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{6}{5},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=3:7$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка T такая, что $MT:TC=1:6$. Пусть дополнительно известно, что прямые LT и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $x^2+7xy+6y^2=15^{50}$.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases}x^2+y^2+2b(b+x+y)=81,\\ y=4\cos(x+3a)-3\sin(x+3a)\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

7. В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $BD=3$ и $\angle ADC=60^\circ$. Сфера проходит через вершины D, C, B, B_1, A_1, D_1.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки A_1, C_1 и D_1.

б) Найдите угол B_1C_1A.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 2. Найдите объём призмы.