ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ “ФИЗТЕХ-2009”

ДОЛГОПРУДНЫЙ, ЧАСТЬ I

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{2x+1}(4x^2 - y^2 + 8x - 6y - 4) = 2, \\ \log_{y+2}(y^2 + 6y - x + 14) = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(24; 7)$.

Решение: Имеем

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 + 8x - 6y - 4 = 4x^2 + 4x + 1, \\ y^2 + 6y - x + 14 = y^2 + 4y + 4 \end{cases}$$

при условиях $0 < 2x + 1 \neq 1$ и $0 < y + 2 \neq 1$. Получаем $-y^2 - 6y = -4x + 5$ и $-x = -2y - 10$. Следовательно, $-y^2 - 6y = -8y - 35$, т. е. $y^2 - 2y - 35 = 0$. Тогда либо $y = -5$, и в этом случае $y + 2 = -3 < 0$, т. е. это не решение, либо $y = 7$, а $x = 2y + 10 = 24$, и в этом случае $0 < y + 2 = 9 \neq 1$ и $0 < 2x + 1 = 49 \neq 1$, т. е. это решение.

2. Решите неравенство

$$\left|2^{\sqrt{x-1}-1} - 1\right| + \frac{5}{3} \leq \frac{2^{\sqrt{x-1}+3}}{3} - 4^{\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}}.$$

Ответ: $x \in [1, 5]$.

Решение: Введём новую переменную $t = 2^{\sqrt{x-1}} \geq 1$ при $x \geq 1$. Тогда неравенство перепишется в виде $\left|\frac{t}{2} - 1\right| \leq \frac{8}{3}t - \frac{t^2}{2} - \frac{5}{3}$, или так $|t - 2| \leq \frac{16}{3}t - t^2 - \frac{10}{3}$. Пусть $f(t) = |t - 2|$, $g(t) = \frac{16}{3}t - t^2 - \frac{10}{3}$. Уравнение $f(t) = g(t)$ имеет два решения $t_1 = 1$ и $t_2 = 4$. При $t = 0 < t_1$ имеем неравенство $f(0) = 2 > g(0) = -\frac{10}{3}$. Следовательно, $f(t) > g(t)$ при всех $t < t_1$. При $t = 10 > t_2$ имеем неравенство $f(10) = 8 > g(10) = -50$. Следовательно $f(t) > g(t)$ при всех $t > t_2$. Наконец при $t = 2 \in (t_1, t_2)$ имеем неравенство $f(2) = 0 < g(2) = \frac{10}{3}$. Следовательно, получаем $f(t) < g(t)$ при всех $t_1 < t < t_2$. Таким образом, данное неравенство равносильно $1 \leq 2^{\sqrt{x-1}} \leq 4$, т. е. $0 \leq \sqrt{x-1} \leq 2$ и $x \in [1, 5]$.

3. Найдите решения уравнения

$$\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 8\sin x \sin 3x,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x \geq 0$.

Ответ: πk, $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}m + 2\pi k$, $m = 0, 1, 2, 3$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение: При условии $\cos 3x \neq 0$ уравнение перепишется в виде

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x) = 8\sin x \cos x \sin 3x \cos 3x = 2\sin 2x \sin 6x.$$

Тогда $\frac{1-\cos 8x}{2} = \sin^2 4x = \cos 4x - \cos 8x$. Следовательно, $1 - \cos^2 4x = \cos 4x - 2\cos^2 4x + 1$, т. е. $\cos^2 4x = \cos 4x$. Если $\cos 4x = 0$, то $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$. Если при этом $\cos 3x = 0$, то $3x = \frac{\pi}{2} + \pi s = \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi n}{4}$, т. е. $4 + 8s = 3 + 6n$ и $\mathbb{Z} \not\ni \frac{1}{2} = 3n - 4s \in \mathbb{Z}$ — противоречие. Пусть $n = 8k + m$, где $k \in \mathbb{Z}$, а m может принимать целые значения $0, 1, \ldots, 7$. При $m = 0, 1, 2, 3$ получаем $\sin x \geq 0$, а при $m = 4, 5, 6, 7$ имеем $\sin x < 0$. Пусть теперь $\cos 4x = 1$. Тогда $x = \frac{\pi n}{2}$. При $n = 2k+1$ получаем $\cos 3x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3\pi k\right) = 0$, т. е. это не решения. При $n = 2k$ получаем $x = \pi k$, $\sin x = 0$ и $\cos 3x = (-1)^k \neq 0$, т. е. это решения.

4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = CD = 2$, $AD = 4$. Точки K, L, M лежат на отрезках A_1B, B_1C, C_1D соответственно так, что

$$\frac{A_1K}{KB} = \frac{B_1L}{LC} = \frac{C_1M}{MD} = 3.$$

Сфера радиуса $R = 2$ касается прямых A_1B, B_1C, C_1D в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, расстояние от центра сферы до плоскости KLM, и объём призмы.

Ответ: $r = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $V = 6$.

Решение: Заметим, что $AB \perp BD$. Действительно, $BD = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$, т. е. $AD^2 = 16 = AB^2 + BD^2 = 4 + 12$. Пусть O — центр данной сферы, h — высота призмы. Пусть P и P_1 — середины отрезков AD и A_1D_1. Пусть точка P' на отрезке PP_1 такова, что $\frac{P_1P'}{P'P} = 3$. Проведем через P' плоскость $\Pi \perp P_1P$. Плоскость Π содержит точки K, L, M. Пусть A', B', C', D' — проекции точек A, B, C, D на Π, и пусть X — середина отрезка $A'B'$. Из подобия треугольников

$A_1A'K$ и $BB'K$ имеем: $\frac{A'K}{B'K} = 3$. Тогда $A'K = 3t$, $B'K = t$, $A'B' = A'K + B'K = 4t = 2$, откуда $t = \frac{1}{2}$. Следовательно, $XK = \frac{A'B'}{2} - B'K = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Так как $P'X$ — средняя линия в $\triangle A'B'D'$, то $P'X \parallel B'D'$, а $B'D' \perp A'B'$. Следовательно, $P'X \perp A'B'$ и $P'X = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. Тогда $P'K^2 = P'X^2 + XK^2 = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$. Аналогично можно установить, что $P'L^2 = P'M^2 = \frac{13}{4}$. Это означает, что P' — центр окружности радиуса $r = \frac{\sqrt{13}}{2}$, описанной около треугольника KLM, и значит O лежит на перпендикуляре к $\mathit{\Pi}$, проходящем через P', то есть на прямой P_1P.

Заметим, что $P'X \perp P'C'$. Действительно, $P'C' = \sqrt{3+1} = 2 = C'D' = P'D'$. Следовательно, $\angle C'P'D' = \frac{\pi}{3} = \angle P'D'C' = \angle B'A'P'$, а $\angle A'P'X = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Тогда $\angle XP'C' = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось. Поэтому введём прямоугольную систему координат $P'xyz$ с началом координат в точке P', так что ось $P'x$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'X}$, ось $P'y$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'C'} = \overrightarrow{AB}$, ось $P'z$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'P}$. Запишем координаты точек и векторов: $O(0,0,z)$, $K\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\overrightarrow{OK}\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}, -z\right)$, $\overrightarrow{A_1B}(0,2,h)$. Условия $OK = R = 2$ и $OK \perp A_1B$ запишутся теперь следующим образом:

$$\begin{cases} 3 + \frac{1}{4} + z^2 = 4, \\ 1 - hz = 0. \end{cases}$$

Из второго равенства $z > 0$ и тогда $z = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — искомое расстояние, а высота призмы $h = \frac{2}{\sqrt{3}}$, т. е. искомый объём призмы равен $V = 3\sqrt{3}h = 6$.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ “ФИЗТЕХ-2009”

ДОЛГОПРУДНЫЙ, ЧАСТЬ II

5. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O, а их длины равны соответственно 30, 24 и 18. Найдите площадь треугольников ABC и OA_1C, а также радиус окружности, описанной около треугольника OA_1C.
Ответ: 288, 48, $\frac{25}{4}$.
Решение: Пусть $AA_1 = m_A = 30$, $BB_1 = m_B = 24$, $CC_1 = m_C = 18$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Имеем равенства:

$$4m_A^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2), \quad 4m_B^2 + b^2 = 2(a^2 + c^2), \quad 4m_C^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Сложив эти равенства, находим $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_A^2 + m_B^2 + m_C^2) = 2400$. Тогда $4m_A^2 + a^2 = 2(2400 - a^2)$, откуда $a^2 = \frac{4800-3600}{3} = 400$, $a = 20 = BC$, $A_1C = 10$. Так как $OA_1 = \frac{1}{3}AA_1 = 10$, $OC = \frac{2}{3}CC_1 = 12$, $A_1C = 10$, то по формуле Герона площадь S_1 треугольника OA_1C равна $\sqrt{16 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6} = 48$. Пусть S — площадь треугольника ABC, а S_2 — площадь треугольника BOC. Тогда $S_2 = \frac{1}{3}S$, а $S_1 = \frac{1}{2}S_2 = \frac{1}{6}S$. Следовательно, $S = 6S_1 = 288$. Пусть R_1 — радиус окружности, описанной около треугольника OA_1C. Тогда $R_1 = \frac{OA_1 \cdot OC \cdot A_1C}{4S_1} = \frac{25}{4}$.
6. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 31 & \leq & 8\left(|x| + |y|\right), \\ x^2 + y^2 - 2y & = & a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.
Ответ: $4 \leq |a| \leq \sqrt{41} + 1$.
Решение: Запишем первое неравенство системы в виде

$$(|x| - 4)^2 + (|y| - 4)^2 \leq 1.$$

Этому неравенству удовлетворяет множество E — объединение четырёх кругов C_1, C_2, C_3 и C_4 радиуса 1 с центрами соответственно в точках $O_1(4;4)$, $O_2(4;-4)$, $O_3(-4;4)$ и $O_4(-4;-4)$. Запишем второе равенство системы в виде

$$x^2 + (y-1)^2 = a^2.$$

При $a \neq 0$ это уравнение окружности L с центром в точке $O(0;1)$ радиуса $|a|$. Соединим точку O и точки O_1 и O_2 прямыми ℓ_1 и ℓ_2. Пусть A_1 и B_1 — точки пересечения ℓ_1 с окружностью L_1 (с центром O_1 радиуса 1), а A_2 и B_2 — точки пересечения ℓ_2 с окружностью L_2 (с центром O_2 радиуса 1). Имеем $OO_1 = 5$, $OO_2 = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$, $OA_1 = 4$, $OB_1 = 6$, $OA_2 = \sqrt{41} - 1$, $OB_2 = \sqrt{41} + 1$. При $4 \leq |a| \leq 6$ окружность L пересекается с кругами C_1 и C_3, а при $\sqrt{41} - 1 \leq$ $\leq |a| \leq \sqrt{41} + 1$ окружность L пересекается с кругами C_2 и C_4. Следовательно, система имеет хотя бы одно решение, если $|a|$ принадлежит либо отрезку $I_1 =$ $= [4, 6]$, либо отрезку $I_2 = \left[\sqrt{41} - 1, \sqrt{41} + 1\right]$. Так как $4 < \sqrt{41} - 1 < 6 < \sqrt{41} + 1$, то объединение отрезков I_1 и I_2 есть отрезок $\left[4, \sqrt{41} + 1\right]$.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 2x + 4y - 3z, \\ y^2 - z^2 &= x - 3y + 4z, \\ z^2 - x^2 &= -3x + y - 5z. \end{cases}$$

Ответ: $(0;0;0)$, $(1;-2;-1)$, $\left(\frac{17-\sqrt{37}}{6}; -\frac{1+\sqrt{37}}{3}; -\frac{1+\sqrt{37}}{6}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{37}+17}{6}; \frac{\sqrt{37}-1}{3}; \frac{\sqrt{37}-1}{6}\right)$.

Решение: Сложив уравнения системы, получаем $0 = 2y - 4z$, т. е. $y = 2z$. Сложив первое и третье уравнения, получим $z^2 - y^2 = -x + 5y - 8z$, откуда в силу $y = 2z$ получаем $-3z^2 = -x + 2z$, т. е. $x = 3z^2 + 2z$. Подставляя это в третье уравнение системы, получаем $z^2 - z^2(3z+2)^2 = -9z^2 - 9z$. Если $z = 0$, то $x = y = 0$. Если $z \neq 0$, то $z - z(9z^2 + 12z + 4) = -9z - 9$, т. е. $3z^3 + 4z^2 - 2z - 3 = 0$. Тогда $z = -1$ корень уравнения, и $(z+1)(3z^2 + z - 3) = 0$. Следовательно, корнями уравнения также являются $z = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{6}$. При $z = -1$ получаем $x = 1$ и $y = -2$. При $z = -\frac{1+\sqrt{37}}{6}$ получаем $x = 3z^2 + 2z = 3z^2 + z - 3 + z + 3 = z + 3 = \frac{17-\sqrt{37}}{6}$, $y = -\frac{1+\sqrt{37}}{3}$. При $z = \frac{\sqrt{37}-1}{6}$ получаем $x = z + 3 = \frac{\sqrt{37}+17}{6}$, $y = \frac{\sqrt{37}-1}{3}$.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ “ФИЗТЕХ-2009”

ДОЛГОПРУДНЫЙ, ЧАСТЬ I

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{2x-5}(4x^2-y^2-16x-8y+1) &= 2, \\ \log_{y+3}(y^2+8y-x+24) &= 2. \end{cases}$$

Ответ: $(27; 6)$.

Решение: Имеем

$$\begin{cases} 4x^2-y^2-16x-8y+1 &= 4x^2-20x+25, \\ y^2+8y-x+24 &= y^2+6y+9 \end{cases}$$

при условиях $0 < 2x-5 \neq 1$ и $0 < y+3 \neq 1$. Получаем $-y^2-8y = -4x+24$ и $-x = -2y-15$. Следовательно, $-y^2-8y = -8y-36$, т. е. $y^2-36=0$. Тогда либо $y=-6$, и в этом случае $y+3=-3<0$, т. е. это не решение, либо $y=6$, а $x=2y+15=27$, и в этом случае $0<y+3=9\neq 1$ и $0<2x-5=49\neq 1$, т. е. это решение.

2. Решите неравенство

$$\left|4^{\sqrt{x+2}}-\frac{4}{3}\right|+6 \leq \frac{7}{3}\cdot 4^{\sqrt{x+2}+1}-3\cdot 16^{\sqrt{x+2}}.$$

Ответ: $x \in \left[-2, -\frac{7}{4}\right]$.

Решение: Введём новую переменную $t = 4^{\sqrt{x+2}} \geq 1$ при $x \geq -2$. Тогда неравенство перепишется в виде $\left|t-\frac{4}{3}\right| \leq \frac{28}{3}t-3t^2-6$. Пусть $f(t)=\left|t-\frac{4}{3}\right|$, $g(t) = \frac{28}{3}t-3t^2-6$. Уравнение $f(t)=g(t)$ имеет два решения $t_1=1$ и $t_2=2$. При $t=0<t_1$ имеем неравенство $f(0)=\frac{4}{3}>g(0)=-6$. Следовательно, $f(t)>g(t)$ при всех $t<t_1$. При $t=3>t_2$ имеем неравенство $f(3)=\frac{5}{3}>g(3)=-5$. Следовательно $f(t)>g(t)$ при всех $t>t_2$. Наконец при $t=\frac{4}{3}\in(t_1,t_2)$ имеем неравенство $f\left(\frac{4}{3}\right)=0<g\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{10}{9}$. Следовательно, получаем $f(t)<g(t)$ при всех $t_1<t<t_2$. Таким образом, данное неравенство равносильно $1\leq 4^{\sqrt{x+2}}\leq 2$, т. е. $0\leq\sqrt{x+2}\leq\frac{1}{2}$ и $x\in\left[-2,-\frac{7}{4}\right]$.

3. Найдите решения уравнения

$$\frac{\sin x}{\cos 3x} + \frac{\cos 5x}{\sin x} + 4(\sin 4x + \sin 2x) = 8\cos x \sin 3x,$$

удовлетворяющие неравенству $\cos x > 0$.

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}m + 2\pi k, \quad m = 0, 1, 6, 7, \ k \in \mathbb{Z}$.

Решение: При условиях $\cos 3x \neq 0$ и $\sin x \neq 0$ уравнение перепишется в виде

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{\cos 8x + \cos 2x}{2} + 2(\sin 4x + \sin 2x)(\sin 4x - \sin 2x) = 2\sin 2x \sin 6x.$$

Следовательно, $\frac{1+\cos 8x}{2} + 2(\sin^2 4x - \sin^2 2x) = \cos 4x - \cos 8x$. Отсюда получаем $\cos^2 4x + 2 - 2\cos^2 4x + \cos 4x - 1 = \cos 4x - 2\cos^2 4x + 1$, т. е. $\cos^2 4x = 0$. Следовательно, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$. Пусть $n = 8k + m$, где $k \in \mathbb{Z}$, а m принимает целые значения $0, 1, \ldots, 7$. Условию $\cos x > 0$ удовлетворяют значения $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{4} + 2\pi k$ при $m = 0, 1, 6, 7$. Заметим, что из равенства $0 = \cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$ следует $\sin^2 2x = \frac{1}{2}$, и поэтому $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$. Далее, т. к. $\cos 3x = \cos x(2\cos 2x - 1)$, а $\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = \frac{1}{2}$, то $\cos 2x \neq \frac{1}{2}$, и поэтому $\cos 3x \neq 0$.

4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = CD = 2$, $AD = 4$. Точки K, L, M лежат на отрезках A_1B, B_1C, C_1D соответственно так, что

$$\frac{A_1K}{KB} = \frac{B_1L}{LC} = \frac{C_1M}{MD} = 2.$$

Сфера радиуса $R = 2$ касается прямых A_1B, B_1C, C_1D в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, расстояние от центра сферы до плоскости KLM, и объём призмы.

Ответ: $r = \frac{2\sqrt{7}}{3}, \quad \rho = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad V = 3\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Решение: Заметим, что $AB \perp BD$. Действительно, $BD = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$, т. е. $AD^2 = 16 = AB^2 + BD^2 = 4 + 12$. Пусть O — центр данной сферы, h — высота призмы. Пусть P и P_1 — середины отрезков AD и A_1D_1. Пусть точка P' на отрезке PP_1 такова, что $\frac{P_1P'}{P'P} = 2$. Проведем через P' плоскость $\mathit{\Pi} \perp P_1P$. Плоскость $\mathit{\Pi}$ содержит точки K, L, M. Пусть A', B', C', D' — проекции точек A, B, C, D на $\mathit{\Pi}$, и пусть X — середина отрезка $A'B'$. Из подобия треугольников

$A_1A'K$ и $BB'K$ имеем: $\frac{A'K}{B'K} = 2$. Тогда $A'K = 2t$, $B'K = t$, $A'B' = A'K + B'K = 3t = 2$, откуда $t = \frac{2}{3}$. Следовательно, $XK = \frac{A'B'}{2} - B'K = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Так как $P'X$ — средняя линия в $\triangle A'B'D'$, то $P'X \parallel B'D'$, а $B'D' \perp A'B'$. Следовательно, $P'X \perp A'B'$ и $P'X = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. Тогда $P'K^2 = P'X^2 + XK^2 = 3 + \frac{1}{9} = \frac{28}{9}$. Аналогично можно установить, что $P'L^2 = P'M^2 = \frac{28}{9}$. Это означает, что P' — центр окружности радиуса $r = \frac{2\sqrt{7}}{3}$, описанной около треугольника KLM, и значит O лежит на перпендикуляре к $\mathit{\Pi}$, проходящем через P', то есть на прямой P_1P.

Заметим, что $P'X \perp P'C'$. Действительно, $P'C' = \sqrt{3+1} = 2 = C'D' = P'D'$. Следовательно, $\angle C'P'D' = \frac{\pi}{3} = \angle P'D'C' = \angle B'A'P'$, а $\angle A'P'X = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Тогда $\angle XP'C' = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось. Поэтому введём прямоугольную систему координат $P'xyz$ с началом координат в точке P', так что ось $P'x$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'X}$, ось $P'y$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'C'} = \overrightarrow{AB}$, ось $P'z$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'P}$. Запишем координаты точек и векторов: $O(0,0,z)$, $K\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, $\overrightarrow{OK}\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3}, -z\right)$, $\overrightarrow{A_1B}(0,2,h)$. Условия $OK = R = 2$ и $OK \perp A_1B$ запишутся теперь следующим образом:

$$\begin{cases} 3 + \frac{1}{9} + z^2 & = & 4, \\ \frac{2}{3} - hz & = & 0. \end{cases}$$

Из второго равенства $z > 0$ и тогда $z = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ — искомое расстояние, а высота призмы $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т. е. искомый объём призмы равен $V = 3\sqrt{3}h = 3\sqrt{\frac{3}{2}}$.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ “ФИЗТЕХ-2009”

ДОЛГОПРУДНЫЙ, ЧАСТЬ II

5. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O, а их длины равны соответственно 18, 24 и 30. Найдите площадь треугольников ABC и AOC_1, а также радиус окружности, описанной около треугольника AOC_1.

Ответ: 288, 48, $\frac{25}{4}$.

Решение: Пусть $AA_1 = m_A = 18$, $BB_1 = m_B = 24$, $CC_1 = m_C = 30$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Имеем равенства:

$$4m_A^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2), \quad 4m_B^2 + b^2 = 2(a^2 + c^2), \quad 4m_C^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Сложив эти равенства, находим $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_A^2 + m_B^2 + m_C^2) = 2400$. Тогда $4m_C^2 + c^2 = 2(2400 - c^2)$, откуда $c^2 = \frac{4800-3600}{3} = 400$, $c = 20 = AB$, $AC_1 = 10$. Так как $OC_1 = \frac{1}{3}CC_1 = 10$, $OA = \frac{2}{3}AA_1 = 12$, $AC_1 = 10$, то по формуле Герона площадь S_1 треугольника AOC_1 равна $\sqrt{16 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6} = 48$. Пусть S — площадь треугольника ABC, а S_2 — площадь треугольника AOB. Тогда $S_2 = \frac{1}{3}S$, а $S_1 = \frac{1}{2}S_2 = \frac{1}{6}S$. Следовательно, $S = 6S_1 = 288$. Пусть R_1 — радиус окружности, описанной около треугольника AOC_1. Тогда $R_1 = \frac{AC_1 \cdot OC_1 \cdot OA}{4S_1} = \frac{25}{4}$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 7 & \leq & 4\Big(|x| + |y|\Big), \\ x^2 + y^2 + 2y & = & a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $\sqrt{5} - 1 \leq |a| \leq \sqrt{13} + 1$.

Решение: Запишем первое неравенство системы в виде

$$(|x| - 2)^2 + (|y| - 2)^2 \leq 1.$$

Этому неравенству удовлетворяет множество E — объединение четырёх кругов C_1, C_2, C_3 и C_4 радиуса 1 с центрами соответственно в точках $O_1(2; 2)$, $O_2(2; -2)$, $O_3(-2; 2)$ и $O_4(-2; -2)$. Запишем второе равенство системы в виде

$$x^2 + (y + 1)^2 = a^2.$$

При $a \neq 0$ это уравнение окружности L с центром в точке $O(0;-1)$ радиуса $|a|$. Соединим точку O и точки O_1 и O_2 прямыми ℓ_1 и ℓ_2. Пусть A_1 и B_1 — точки пересечения ℓ_1 с окружностью L_1 (с центром O_1 радиуса 1), а A_2 и B_2 — точки пересечения ℓ_2 с окружностью L_2 (с центром O_2 радиуса 1). Имеем $OO_1 = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, $OO_2 = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, $OA_1 = \sqrt{13}-1$, $OB_1 = \sqrt{13}+1$, $OA_2 = \sqrt{5}-1$, $OB_2 = \sqrt{5}+1$. При $\sqrt{13}-1 \leq |a| \leq \sqrt{13}+1$ окружность L пересекается с кругами C_1 и C_3, а при $\sqrt{5}-1 \leq |a| \leq \sqrt{5}+1$ окружность L пересекается с кругами C_2 и C_4. Следовательно, система имеет хотя бы одно решение, если $|a|$ принадлежит либо отрезку $I_1 = \left[\sqrt{13}-1, \sqrt{13}+1\right]$, либо отрезку $I_2 = \left[\sqrt{5}-1, \sqrt{5}+1\right]$. Так как $\sqrt{5}-1 < \sqrt{13}-1 < 3 < \sqrt{5}+1 < \sqrt{13}+1$, то объединение отрезков I_1 и I_2 есть отрезок $\left[\sqrt{5}-1, \sqrt{13}+1\right]$.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= -4x - 2y + 3z, \\ z^2 - x^2 &= 3x - y - 4z, \\ y^2 - z^2 &= -x + 3y + 5z. \end{cases}$$

Ответ: $(0;0;0)$, $(-2;1;-1)$, $\left(-\frac{1+\sqrt{37}}{3}; \frac{17-\sqrt{37}}{6}; -\frac{1+\sqrt{37}}{6}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{37}-1}{3}; \frac{\sqrt{37}+17}{6}; \frac{\sqrt{37}-1}{6}\right)$.

Решение: Сложив уравнения системы, получаем $0 = -2x + 4z$, т. е. $x = 2z$. Сложив первое и третье уравнения, получим $x^2 - z^2 = -5x + y + 8z$, откуда в силу $x = 2z$ получаем $3z^2 = y - 2z$, т. е. $y = 3z^2 + 2z$. Подставляя это в третье уравнение системы, получаем $z^2(3z+2)^2 - z^2 = 9z^2 + 9z$. Если $z = 0$, то $x = y = 0$. Если $z \neq 0$, то $z(9z^2 + 12z + 4) - z = 9z + 9$, т. е. $3z^3 + 4z^2 - 2z - 3 = 0$. Тогда $z = -1$ корень уравнения, и $(z+1)(3z^2 + z - 3) = 0$. Следовательно, корнями этого уравнения также являются $z = \frac{-1\pm\sqrt{37}}{6}$. При $z = -1$ получаем $x = -2$ и $y = 1$. При $z = -\frac{1+\sqrt{37}}{6}$ получаем $x = -\frac{1+\sqrt{37}}{3}$, $y = 3z^2 + 2z = 3z^2 + z - 3 + z + 3 = z + 3 = \frac{17-\sqrt{37}}{6}$. При $z = \frac{\sqrt{37}-1}{6}$ получаем $x = \frac{\sqrt{37}-1}{3}$, $y = z + 3 = \frac{\sqrt{37}+17}{6}$.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ “ФИЗТЕХ-2009”

ДОЛГОПРУДНЫЙ, ЧАСТЬ I

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{2y+3}(4y^2-x^2+16y+6x+8) &=& 2, \\ \log_{x-4}(x^2-6x-y+13) &=& 2. \end{cases}$$

Ответ: $(13; 23)$.

Решение: Имеем

$$\begin{cases} 4y^2-x^2+16y+6x+8 &=& 4y^2+12y+9, \\ x^2-6x-y+13 &=& x^2-8x+16 \end{cases}$$

при условиях $0 < 2y+3 \neq 1$ и $0 < x-4 \neq 1$. Получаем $-x^2+6x = -4y+1$ и $-y = -2x+3$. Следовательно, $-x^2+6x = -8x+13$, т. е. $x^2-14x+13 = 0$. Тогда либо $x = 1$, и в этом случае $x-4 = -3 < 0$, т. е. это не решение, либо $x = 13$, а $y = 2x-3 = 23$, и в этом случае $0 < x-4 = 9 \neq 1$ и $0 < 2y+3 = 49 \neq 1$, т. е. это решение.

2. Решите неравенство

$$\left|2^{\sqrt{x-2}-2}-2\right| + \frac{10}{3} \leq \frac{2^{\sqrt{x-2}+2}}{3} - 4^{\sqrt{x-2}-2}.$$

Ответ: $x \in [6, 18]$.

Решение: Введём новую переменную $t = 2^{\sqrt{x-2}} \geq 1$ при $x \geq 2$. Тогда неравенство перепишется в виде $\left|\frac{t}{4}-2\right| \leq \frac{4}{3}t - \frac{t^2}{16} - \frac{10}{3}$. Пусть $f(t) = \left|\frac{t}{4}-2\right|$, $g(t) = \frac{4}{3}t - \frac{t^2}{16} - \frac{10}{3}$. Уравнение $f(t) = g(t)$ имеет два решения $t_1 = 4$ и $t_2 = 16$. При $t = 0 < t_1$ имеем неравенство $f(0) = 2 > g(0) = -\frac{10}{3}$. Следовательно, $f(t) > g(t)$ при всех $t < t_1$. При $t = 24 > t_2$ имеем неравенство $f(24) = 4 > g(24) = -\frac{22}{3}$. Следовательно $f(t) > g(t)$ при всех $t > t_2$. Наконец при $t = 8 \in (t_1, t_2)$ имеем неравенство $f(8) = 0 < g(8) = \frac{10}{3}$. Следовательно, получаем $f(t) < g(t)$ при всех $t_1 < t < t_2$. Таким образом, данное неравенство равносильно $4 \leq 2^{\sqrt{x-2}} \leq 16$, т. е. $2 \leq \sqrt{x-2} \leq 4$ и $x \in [6, 18]$.

3. Найдите решения уравнения

$$\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} + 8\sin x \sin 3x = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x \geq 0$.

Ответ: πk, $\alpha + 2\pi k$, $\frac{\pi}{2} \pm \alpha + 2\pi k$, $\pi - \alpha + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha = \frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Решение: При условии $\cos 3x \neq 0$ уравнение перепишется в виде

$$\frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x) = -8\sin x\cos x\sin 3x\cos 3x = -2\sin 2x \sin 6x.$$

Тогда $\frac{1-\cos 8x}{2} = \sin^2 4x = \cos 8x - \cos 4x$, т. е. $1-\cos^2 4x = 2\cos^2 4x - 1 - \cos 4x$, и $3\cos^2 4x - \cos 4x - 2 = 0$. Отсюда либо $\cos 4x = 1$, либо $\cos 4x = -\frac{2}{3}$. Если $\cos 4x = {}$ $= 1$, то $x = \frac{\pi n}{2}$. При $n = 2k+1$ получаем $\cos 3x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3\pi k\right) = 0$, т. е. это не решения. При $n = 2k$ получаем $x = \pi k$. Тогда $\sin x = 0$ и $\cos 3x = (-1)^k \neq 0$, т. е. это решения. Если $\cos 4x = -\frac{2}{3}$, то $x = \pm\alpha + \frac{\pi n}{2}$, где $\alpha = \frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = {}$ $= \frac{1}{4}\left(\pi - \arccos\frac{2}{3}\right)$. Так как $\frac{\pi}{3} = \arccos\frac{1}{2} > \arccos\frac{2}{3}$, то $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Если $\cos 3x = 0$, то $3x = \frac{\pi}{2} + \pi s = \pm 3\alpha + \frac{3\pi n}{2}$, т. е. $1 + 2s = \pm\frac{6\alpha}{\pi} + 3n$. Так как $1 < \frac{6\alpha}{\pi} < \frac{3}{2}$, то $\mathbb{Z} \not\ni \pm\frac{6\alpha}{\pi} = 1 + 2s - 3n \in \mathbb{Z}$ — противоречие. Пусть $n = 4k + m$, где $k \in \mathbb{Z}$, а m может принимать целые значения $0, 1, 2, 3$. Тогда $x = \pm\alpha + \frac{\pi m}{2} + 2\pi k$. При $m = 0$ имеем $\sin x = \pm\sin\alpha \geq 0$ при $x = \alpha + 2\pi k$. При $m = 1$ имеем $\sin x = {}$ $= \sin\left(\pm\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha \geq 0$, т. е. $x = \pm\alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ — решения. При $m = 2$ имеем $\sin x = \sin(\pm\alpha + \pi) = \mp\sin\alpha \geq 0$ при $x = -\alpha + \pi + 2\pi k$. При $m = 3$ имеем $\sin x = \sin\left(\pm\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\alpha < 0$, т. е. нет решений.

4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = CD = 2$, $AD = 4$. Точки K, L, M лежат на отрезках A_1B, B_1C, C_1D соответственно так, что

$$\frac{A_1K}{KB} = \frac{B_1L}{LC} = \frac{C_1M}{MD} = \frac{5}{3}.$$

Сфера радиуса $R = 2$ касается прямых A_1B, B_1C, C_1D в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, расстояние от центра сферы до плоскости KLM, и объём призмы.

Ответ: $r = \frac{7}{4}$, $\rho = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $V = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

Решение: Заметим, что $AB \perp BD$. Действительно, $BD = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$, т. е. $AD^2 = 16 = AB^2 + BD^2 = 4 + 12$. Пусть O — центр данной сферы, h — высота призмы. Пусть P и P_1 — середины отрезков AD и A_1D_1. Пусть точка P' на отрезке PP_1 такова, что $\frac{P_1P'}{P'P} = \frac{5}{3}$. Проведем через P' плоскость $\mathit{\Pi} \perp P_1P$. Плоскость $\mathit{\Pi}$ содержит точки K, L, M. Пусть A', B', C', D' — проекции точек A, B, C, D на $\mathit{\Pi}$, и пусть X — середина отрезка $A'B'$. Из подобия треугольников $A_1A'K$ и $BB'K$ имеем: $\frac{A'K}{B'K} = \frac{5}{3}$. Тогда $A'K = 5t$, $B'K = 3t$, $A'B' = A'K + B'K = 8t = 2$, откуда $t = \frac{1}{4}$. Следовательно, $XK = \frac{A'B'}{2} - B'K = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Так как $P'X$ — средняя линия в $\triangle A'B'D'$, то $P'X \parallel B'D'$, а $B'D' \perp A'B'$. Следовательно, $P'X \perp A'B'$ и $P'X = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. Тогда $P'K^2 = P'X^2 + XK^2 = 3 + \frac{1}{16} = \frac{49}{16}$. Аналогично можно установить, что $P'L^2 = P'M^2 = \frac{49}{16}$. Это означает, что P' — центр окружности радиуса $r = \frac{7}{4}$, описанной около треугольника KLM, и значит O лежит на перпендикуляре к $\mathit{\Pi}$, проходящем через P', то есть на прямой P_1P.

Заметим, что $P'X \perp P'C'$. Действительно, $P'C' = \sqrt{3+1} = 2 = C'D' = P'D'$. Следовательно, $\angle C'P'D' = \frac{\pi}{3} = \angle P'D'C' = \angle B'A'P'$, а $\angle A'P'X = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Тогда $\angle XP'C' = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось. Поэтому введём прямоугольную систему координат $P'xyz$ с началом координат в точке P', так что ось $P'x$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'X}$, ось $P'y$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'C'} = \overrightarrow{AB}$, ось $P'z$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'P}$. Запишем координаты точек и векторов: $O(0,0,z)$, $K\left(\sqrt{3}, \frac{1}{4}, 0\right)$, $\overrightarrow{OK}\left(\sqrt{3}, \frac{1}{4}, -z\right)$, $\overrightarrow{A_1B}(0,2,h)$. Условия $OK = R = 2$ и $OK \perp A_1B$ запишутся теперь следующим образом:

$$\begin{cases} 3 + \frac{1}{16} + z^2 = 4, \\ \frac{1}{2} - hz = 0. \end{cases}$$

Из второго равенства $z > 0$ и тогда $z = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ — искомое расстояние, а высота призмы $h = \frac{2}{\sqrt{15}}$, т. е. искомый объём призмы равен $V = 3\sqrt{3}h = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ “ФИЗТЕХ-2009”

ДОЛГОПРУДНЫЙ, ЧАСТЬ II

5. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O, а их длины равны соответственно 30, 24 и 18. Найдите площадь треугольников ABC и AOC_1, а также радиус окружности, описанной около треугольника AOC_1.
Ответ: 288, 48, $\frac{5\sqrt{73}}{4}$.
Решение: Пусть $AA_1 = m_A = 30$, $BB_1 = m_B = 24$, $CC_1 = m_C = 18$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Имеем равенства:

$$4m_A^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2), \quad 4m_B^2 + b^2 = 2(a^2 + c^2), \quad 4m_C^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Сложив эти равенства, находим $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_A^2 + m_B^2 + m_C^2) = 2400$. Тогда $4m_C^2 + c^2 = 2(2400 - c^2)$, откуда $c^2 = \frac{4800-4\cdot 18\cdot 18}{3} = 1168 = 16 \cdot 73$, $c = 4\sqrt{73} = BC$, $AC_1 = 2\sqrt{73}$. Так как $OC_1 = \frac{1}{3}CC_1 = 6$, $OA = \frac{2}{3}AA_1 = 20$, $AC_1 = 2\sqrt{73}$, то по теореме косинусов из треугольника AOC_1 получаем $292 = 400 + 36 - 240\cos\angle AOC_1$, откуда $\cos\angle AOC_1 = \frac{144}{240} = \frac{3}{5}$. Следовательно, $\sin\angle AOC_1 = \frac{4}{5}$, и площадь S_1 треугольника AOC_1 равна $\frac{6\cdot 20}{2} \cdot \frac{4}{5} = 48$. Пусть S — площадь треугольника ABC, а S_2 — площадь треугольника AOB. Тогда $S_2 = \frac{1}{3}S$, а $S_1 = \frac{1}{2}S_2 = \frac{1}{6}S$. Следовательно, $S = 6S_1 = 288$. Пусть R_1 — радиус окружности, описанной около треугольника AOC_1. Тогда $R_1 = \frac{AC_1}{2\sin\angle AOC_1} = \frac{5\sqrt{73}}{4}$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 17 & \leq & 6\left(|x| + |y|\right), \\ x^2 + y^2 + 2x & = & a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.
Ответ: $\sqrt{13} - 1 \leq |a| \leq 6$.
Решение: Запишем первое неравенство системы в виде

$$(|x| - 3)^2 + (|y| - 3)^2 \leq 1.$$

Этому неравенству удовлетворяет множество E — объединение четырёх кругов C_1, C_2, C_3 и C_4 радиуса 1 с центрами соответственно в точках $O_1(3;3)$, $O_2(-3;3)$,

$O_3(3;-3)$ и $O_4(-3;-3)$. Запишем второе равенство системы в виде

$$(x+1)^2+y^2=a^2.$$

При $a\neq 0$ это уравнение окружности L с центром в точке $O(-1;0)$ радиуса $|a|$. Соединим точку O и точки O_1 и O_2 прямыми ℓ_1 и ℓ_2. Пусть A_1 и B_1 — точки пересечения ℓ_1 с окружностью L_1 (с центром O_1 радиуса 1), а A_2 и B_2 — точки пересечения ℓ_2 с окружностью L_2 (с центром O_2 радиуса 1). Имеем $OO_1=5$, $OO_2=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$, $OA_1=4$, $OB_1=6$, $OA_2=\sqrt{13}-1$, $OB_2=\sqrt{13}+1$. При $4\leq|a|\leq 6$ окружность L пересекается с кругами C_1 и C_3, а при $\sqrt{13}-1\leq$ $\leq|a|\leq\sqrt{13}+1$ окружность L пересекается с кругами C_2 и C_4. Следовательно, система имеет хотя бы одно решение, если $|a|$ принадлежит либо отрезку $I_1=$ $=[4,6]$, либо отрезку $I_2=\left[\sqrt{13}-1,\sqrt{13}+1\right]$. Так как $\sqrt{13}-1<4<\sqrt{13}+1<6$, то объединение отрезков I_1 и I_2 есть отрезок $\left[\sqrt{13}-1,6\right]$.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2 &= -2x-4y-3z,\\ y^2-z^2 &= -x+3y+4z,\\ z^2-x^2 &= 3x-y-5z. \end{cases}$$

Ответ: $(0;0;0)$, $(-1;2;-1)$, $\left(\frac{\sqrt{37}-17}{6};\frac{1+\sqrt{37}}{3};-\frac{1+\sqrt{37}}{6}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{37}+17}{3};\frac{1-\sqrt{37}}{3};\frac{\sqrt{37}-1}{6}\right)$.

Решение: Сложив уравнения системы, получаем $0=-2y-4z$, т. е. $y=-2z$. Сложив первое и третье уравнения, получим $z^2-y^2=x-5y-8z$, откуда в силу $y=-2z$ получаем $-3z^2=x+2z$, т. е. $x=-3z^2-2z$. Подставляя это в третье уравнение системы, получаем $z^2-z^2(3z+2)^2=-9z^2-9z$. Если $z=0$, то $x=y=$ $=0$. Если $z\neq 0$, то $z-z(9z^2+12z+4)=-9z-9$, т. е. $3z^3+4z^2-2z-3=0$. Тогда $z=-1$ корень уравнения, и $(z+1)(3z^2+z-3)=0$. Следовательно, корнями уравнения также являются $z=\frac{-1\pm\sqrt{37}}{6}$. При $z=-1$ получаем $x=-1$ и $y=2$. При $z=-\frac{1+\sqrt{37}}{6}$ получаем $x=-3z^2-2z=-3z^2-z+3-z-3=-z-3=\frac{\sqrt{37}-17}{6}$, $y=\frac{1+\sqrt{37}}{3}$. При $z=\frac{\sqrt{37}-1}{6}$ получаем $x=-z-3=-\frac{\sqrt{37}+17}{6}$, $y=\frac{1-\sqrt{37}}{3}$.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ "ФИЗТЕХ-2009"

ДОЛГОПРУДНЫЙ, ЧАСТЬ I

1. Решите систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} \log_{2y-3}(4y^2-x^2-8y-4x+1) & = & 2, \\ \log_{x+1}(x^2+4x-y+11) & = & 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $(8;26)$.

Решение: Имеем

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4y^2-x^2-8y-4x+1 & = & 4y^2-12y+9, \\ x^2+4x-y+11 & = & x^2+2x+1 \end{array}\right.$$

при условиях $0<2y-3\neq 1$ и $0<x+1\neq 1$. Получаем $-x^2-4x=-4y+8$ и $-y=-2x-10$. Следовательно, $-x^2-4x=-8x-32$, т. е. $x^2-4x-32=0$. Тогда либо $x=-4$, и в этом случае $x+1=-3<0$, т. е. это не решение, либо $x=8$, а $y=2x+10=26$, и в этом случае $0<x+1=9\neq 1$ и $0<2y-3=49\neq 1$, т. е. это решение.

2. Решите неравенство

$$\left|4^{\sqrt{x+3}-\frac{1}{2}}-2\right|+\frac{10}{3}\leq\frac{4^{\sqrt{x+3}+\frac{3}{2}}}{3}-16^{\sqrt{x+3}-\frac{1}{2}}.$$

Ответ: $x\in\left[-\frac{11}{4},-\frac{3}{4}\right]$.

Решение: Введём новую переменную $t=4^{\sqrt{x+3}}\geq 1$ при $x\geq -3$. Тогда неравенство перепишется в виде $\left|\frac{t}{2}-2\right|\leq\frac{8}{3}t-\frac{t^2}{4}-\frac{10}{3}$. Пусть $f(t)=\left|\frac{t}{2}-2\right|$, $g(t)=$ $=\frac{8}{3}t-\frac{t^2}{4}-\frac{10}{3}$. Уравнение $f(t)=g(t)$ имеет два решения $t_1=2$ и $t_2=8$. При $t=0<t_1$ имеем неравенство $f(0)=2>g(0)=-\frac{10}{3}$. Следовательно, $f(t)>g(t)$ при всех $t<t_1$. При $t=10>t_2$ имеем неравенство $f(10)=3>g(10)=-\frac{5}{3}$. Следовательно $f(t)>g(t)$ при всех $t>t_2$. Наконец при $t=4\in(t_1,t_2)$ имеем неравенство $f\left(4\right)=0<g\left(4\right)=\frac{10}{3}$. Следовательно, получаем $f(t)<g(t)$ при всех $t_1<t<t_2$. Таким образом, данное неравенство равносильно $2\leq 4^{\sqrt{x+3}}\leq 8$, т. е. $\frac{1}{2}\leq\sqrt{x+3}\leq\frac{3}{2}$ и $x\in\left[-\frac{11}{4},-\frac{3}{4}\right]$.

3. Найдите решения уравнения

$$\frac{\sin x}{\cos 3x}+\frac{\cos 5x}{\sin x}+4(\sin 4x+\sin 2x)+8\cos x\sin 3x=0,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin 3x<0$.

Ответ: $-\alpha+2\pi k,\quad \alpha+\pi+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z},\quad \pm\alpha+\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\quad \alpha=\frac{1}{4}\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{3}$.

Решение: При условиях $\cos 3x\neq 0$ и $\sin x\neq 0$ уравнение перепишется в виде

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\cos 8x+\cos 2x}{2}+2(\sin 4x+\sin 2x)(\sin 4x-\sin 2x)+2\sin 2x\sin 6x=0.$$

Следовательно, $\frac{1+\cos 8x}{2}+2(\sin^2 4x-\sin^2 2x)+\cos 4x-\cos 8x=0$. Отсюда получаем $\cos^2 4x+2-2\cos^2 4x+\cos 4x-1+\cos 4x-2\cos^2 4x+1=0$, т. е. справедливо равенство $3\cos^2 4x-2\cos 4x-2=0$. Тогда либо $\cos 4x=\frac{1+\sqrt{7}}{3}>1$ — не имеет решений, либо $\cos 4x=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$, т. е. $x=\pm\alpha+\frac{\pi n}{2}$, где $\alpha=\frac{1}{4}\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{3}=$ $=\frac{1}{4}\left(\pi-\arccos\frac{\sqrt{7}-1}{3}\right)$. Так как $\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{7}-1}{3}$, то $\frac{\pi}{3}=\arccos\frac{1}{2}>\arccos\frac{\sqrt{7}-1}{3}$, и поэтому $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{4}$. Если $\sin x=0$, то $x=\pi s=\pm\alpha+\frac{\pi n}{2}$. Следовательно, $2s-n=\pm\frac{2\alpha}{\pi}$. Так как $\frac{1}{3}<\frac{2\alpha}{\pi}<\frac{1}{2}$, то получаем $\mathbb{Z}\ni 2s-n=\pm\frac{2\alpha}{\pi}\notin\mathbb{Z}$ — противоречие. Следовательно, $\sin x\neq 0$. Если $\cos 3x=0$, то $3x=\frac{\pi}{2}+\pi s=\pm 3\alpha+\frac{3\pi n}{2}$. Следовательно, $1+2s-3n=\pm\frac{6\alpha}{\pi}$. Так как $1<\frac{6\alpha}{\pi}<\frac{3}{2}$, то получаем $\mathbb{Z}\ni 1+2s-3n=\pm\frac{6\alpha}{\pi}\notin\mathbb{Z}$ — противоречие. Следовательно, $\cos 3x\neq 0$. Имеем $x=\pm\alpha+\frac{\pi m}{2}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$, а $m=0,1,2,3$. При $m=0$ имеем $\sin 3x=\pm\sin 3\alpha<0$ при $x=-\alpha+2\pi k$. При $m=1$ имеем $\sin 3x=\sin\left(\pm 3\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos 3\alpha>0$, т. е. нет решений. При $m=2$ имеем $\sin 3x=\sin(\pm 3\alpha+3\pi)=\mp\sin 3\alpha<0$ при $x=\alpha+\pi+2\pi k$. При $m=3$ имеем $\sin 3x=\sin\left(\pm 3\alpha+\frac{9\pi}{2}\right)=\cos 3\alpha<0$, т. е. $x=\pm\alpha+\frac{3\pi}{2}+2\pi k$ — решения.

4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция $ABCD$, в которой $AB=BC=CD=2$, $AD=4$. Точки K, L, M лежат на отрезках A_1B, B_1C, C_1D соответственно так, что

$$\frac{A_1K}{KB}=\frac{B_1L}{LC}=\frac{C_1M}{MD}=4.$$

Сфера радиуса $R=2$ касается прямых A_1B, B_1C, C_1D в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, расстояние от центра сферы до плоскости KLM, и объём призмы.

Ответ: $r = \frac{2\sqrt{21}}{5}$, $\rho = \frac{4}{5}$, $V = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Решение: Заметим, что $AB \perp BD$. Действительно, $BD = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$, т. е. $AD^2 = 16 = AB^2 + BD^2 = 4 + 12$. Пусть O — центр данной сферы, h — высота призмы. Пусть P и P_1 — середины отрезков AD и A_1D_1. Пусть точка P' на отрезке PP_1 такова, что $\frac{P_1P'}{P'P} = 4$. Проведем через P' плоскость $\Pi \perp P_1P$. Плоскость Π содержит точки K, L, M. Пусть A', B', C', D' — проекции точек A, B, C, D на Π, и пусть X — середина отрезка $A'B'$. Из подобия треугольников $A_1A'K$ и $BB'K$ имеем: $\frac{A'K}{B'K} = 4$. Тогда $A'K = 4t$, $B'K = t$, $A'B' = A'K + B'K = 5t = 2$, откуда $t = \frac{2}{5}$. Следовательно, $XK = \frac{A'B'}{2} - B'K = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$. Так как $P'X$ — средняя линия в $\triangle A'B'D'$, то $P'X \parallel B'D'$, а $B'D' \perp A'B'$. Следовательно, $P'X \perp A'B'$ и $P'X = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. Тогда $P'K^2 = P'X^2 + XK^2 = 3 + \frac{9}{25} = \frac{84}{25}$. Аналогично можно установить, что $P'L^2 = P'M^2 = \frac{84}{25}$. Это означает, что P' — центр окружности радиуса $r = \frac{2\sqrt{21}}{5}$, описанной около треугольника KLM, и значит O лежит на перпендикуляре к Π, проходящем через P', то есть на прямой P_1P.

Заметим, что $P'X \perp P'C'$. Действительно, $P'C' = \sqrt{3+1} = 2 = C'D' = P'D'$. Следовательно, $\angle C'P'D' = \frac{\pi}{3} = \angle P'D'C' = \angle B'A'P'$, а $\angle A'P'X = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Тогда $\angle XP'C' = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось. Поэтому введём прямоугольную систему координат $P'xyz$ с началом координат в точке P', так что ось $P'x$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'X}$, ось $P'y$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'C'} = \overrightarrow{AB}$, ось $P'z$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'P}$. Запишем координаты точек и векторов: $O(0,0,z)$, $K\left(\sqrt{3}, \frac{3}{5}, 0\right)$, $\overrightarrow{OK}\left(\sqrt{3}, \frac{3}{5}, -z\right)$, $\overrightarrow{A_1B}(0,2,h)$. Условия $OK = R = 2$ и $OK \perp A_1B$ запишутся теперь следующим образом:

$$\begin{cases} 3 + \frac{9}{25} + z^2 = 4, \\ \frac{6}{5} - hz = 0. \end{cases}$$

Из второго равенства $z > 0$ и тогда $z = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ — искомое расстояние, а высота призмы $h = \frac{3}{2}$, т. е. искомый объём призмы равен $V = 3\sqrt{3}h = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ “ФИЗТЕХ-2009”

ДОЛГОПРУДНЫЙ, ЧАСТЬ II

5. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O, а их длины равны соответственно 18, 24 и 30. Найдите площадь треугольников ABC и OA_1C, а также радиус окружности, описанной около треугольника OA_1C.
Ответ: 288, 48, $\frac{5\sqrt{73}}{4}$.
Решение: Пусть $AA_1 = m_A = 18$, $BB_1 = m_B = 24$, $CC_1 = m_C = 30$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Имеем равенства:

$$4m_A^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2), \quad 4m_B^2 + b^2 = 2(a^2 + c^2), \quad 4m_C^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Сложив эти равенства, находим $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_A^2 + m_B^2 + m_C^2) = 2400$. Тогда $4m_A^2 + a^2 = 2(2400 - a^2)$, откуда $a^2 = \frac{4800 - 4\cdot 18\cdot 18}{3} = 1168 = 16\cdot 73$, $a = 4\sqrt{73} = BC$, $A_1C = 2\sqrt{73}$. Так как $OA_1 = \frac{1}{3}AA_1 = 6$, $OC = \frac{2}{3}CC_1 = 20$, $A_1C = 2\sqrt{73}$, то по теореме косинусов из треугольника AOC_1 получаем $292 = 400 + 36 - 240\cos\angle COA_1$, откуда $\cos\angle COA_1 = \frac{144}{240} = \frac{3}{5}$. Следовательно, $\sin\angle COA_1 = \frac{4}{5}$, и площадь S_1 треугольника OA_1C равна $\frac{6\cdot 20}{2}\cdot\frac{4}{5} = 48$. Пусть S — площадь треугольника ABC, а S_2 — площадь треугольника BOC. Тогда $S_2 = \frac{1}{3}S$, а $S_1 = \frac{1}{2}S_2 = \frac{1}{6}S$. Следовательно, $S = 6S_1 = 288$. Пусть R_1 — радиус окружности, описанной около треугольника OA_1C. Тогда $R_1 = \frac{A_1C}{2\sin\angle COA_1} = \frac{5\sqrt{73}}{4}$.
6. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 49 & \le & 10\left(|x| + |y|\right), \\ x^2 + y^2 - 4x & = & a^2 - 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.
Ответ: $\sqrt{34} - 1 \le |a| \le \sqrt{34} + 1$ или $\sqrt{74} - 1 \le |a| \le \sqrt{74} + 1$.
Решение: Запишем первое неравенство системы в виде

$$(|x| - 5)^2 + (|y| - 5)^2 \le 1.$$

Этому неравенству удовлетворяет множество E — объединение четырёх кругов C_1, C_2, C_3 и C_4 радиуса 1 с центрами соответственно в точках $O_1(5;5)$, $O_2(-5;5)$,

$O_3(5;-5)$ и $O_4(-5;-5)$. Запишем второе равенство системы в виде

$$(x-2)^2+y^2=a^2.$$

При $a\neq 0$ это уравнение окружности L с центром в точке $O(2;0)$ радиуса $|a|$. Соединим точку O и точки O_1 и O_2 прямыми ℓ_1 и ℓ_2. Пусть A_1 и B_1 — точки пересечения ℓ_1 с окружностью L_1 (с центром O_1 радиуса 1), а A_2 и B_2 — точки пересечения ℓ_2 с окружностью L_2 (с центром O_2 радиуса 1). Имеем $OO_1=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$, $OO_2=\sqrt{49+25}=\sqrt{74}$, $OA_1=\sqrt{34}-1$, $OB_1=\sqrt{34}+1$, $OA_2=\sqrt{74}-1$, $OB_2=\sqrt{74}+1$. При $\sqrt{34}-1\leq|a|\leq\sqrt{34}+1$ окружность L пересекается с кругами C_1 и C_3, а при $\sqrt{74}-1\leq|a|\leq\sqrt{74}+1$ окружность L пересекается с кругами C_2 и C_4. Следовательно, система имеет хотя бы одно решение, если $|a|$ принадлежит либо отрезку $I_1=\left[\sqrt{34}-1,\sqrt{34}+1\right]$, либо отрезку $I_2=\left[\sqrt{74}-1,\sqrt{74}+1\right]$. Так как $\sqrt{34}+1<7<\sqrt{74}-1$, то отрезки I_1 и I_2 не пересекаются.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-z^2 &= 2x-3y+4z,\\ z^2-y^2 &= x+4y-3z,\\ y^2-x^2 &= -3x-5y+z. \end{cases}$$

Ответ: $(0;0;0)$, $(1;-1;-2)$, $\left(\frac{17-\sqrt{37}}{6};-\frac{1+\sqrt{37}}{6};-\frac{1+\sqrt{37}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{37}+17}{6};\frac{\sqrt{37}-1}{6};\frac{\sqrt{37}-1}{3}\right)$.

Решение: Сложив уравнения системы, получаем $0=-4y+2z$, т. е. $z=2y$. Сложив первое и третье уравнения, получим $y^2-z^2=-x-8y+5z$, откуда в силу $z=2y$ получаем $-3y^2=-x+2y$, т. е. $x=3y^2+2y$. Подставляя это в третье уравнение системы, получаем $y^2-y^2(3y+2)^2=-9y^2-9y$. Если $y=0$, то $x=z==0$. Если $y\neq 0$, то $y-y(9y^2+12y+4)=-9y-9$, т. е. $3y^3+4y^2-2y-3=0$. Тогда $y=-1$ корень уравнения, и $(y+1)(3y^2+y-3)=0$. Следовательно, корнями уравнения также являются $y=\frac{-1\pm\sqrt{37}}{6}$. При $y=-1$ получаем $x=1$ и $z=-2$. При $y=-\frac{1+\sqrt{37}}{6}$ получаем $x=3y^2+2y=3y^2+y-3+y+3=y+3=\frac{17-\sqrt{37}}{6}$, $z=-\frac{1+\sqrt{37}}{3}$. При $y=\frac{\sqrt{37}-1}{6}$ получаем $x=y+3=\frac{\sqrt{37}+17}{6}$, $z=\frac{\sqrt{37}-1}{3}$.