РЕШЕНИЕ БИЛЕТА Ш (ДОЛГОПРУДНЫЙ, ФИЗТЕХ-2010)

1. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 1, угол ABC равен $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Точка D лежит на стороне BC так, что площадь треугольника ABC вчетверо больше площади треугольника ADC. Найдите расстояние от точки D до прямой AB и радиус окружности, описанной около треугольника ADC.

Ответ: $\rho = \frac{3}{2\sqrt{5}}$, $R = \frac{\sqrt{265}}{32}$.

Решение. Пусть E — проекция точки D на прямую AB. Так как $S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}\sin\angle ACB$, а $S_{\triangle ADC} = \frac{AC \cdot DC}{2}\sin\angle ACB$, то $\frac{BC}{DC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}} = 4$. Следовательно, $DC = \frac{BC}{4}$ и $BD = \frac{3BC}{4}$. Имеем $BC = \frac{1}{2\sin\operatorname{arctg}\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Тогда $BD = \frac{3\sqrt{5}}{8}$ и $DE = BD\sin\angle ABC = \frac{3\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$ — расстояние от точки D до прямой AB. Далее, по теореме косинусов из $\triangle ADC$ получаем

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2 \cdot AC \cdot DC \cdot \cos\angle ACD = 1 + \frac{5}{64} - \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{53}{64}.$$

Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника ADC, равен

$$R = \frac{AD}{2\sin\angle ACD} = \frac{\sqrt{53}}{16} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{265}}{32}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x\cos 5x - \sin 2x\cos 6x}{\cos x} = 0.$$

Ответ: $\pi n, \quad \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Так как

$$\sin 3x\cos 5x = \frac{1}{2}\left(\sin 8x - \sin 2x\right),$$

$$\sin 2x\cos 6x = \frac{1}{2}\left(\sin 8x - \sin 4x\right),$$

то уравнение равносильно

$$\frac{\sin 4x - \sin 2x}{2\cos x} = \frac{\sin x\cos 3x}{\cos x} = 0.$$

Так как $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, то получаем

$$\sin x\left(4\cos^2 x - 3\right) = \sin x\left(2\cos 2x - 1\right) = 0$$

при условии $\cos x \neq 0$. Тогда либо $\sin x = 0$ и $x = \pi n$ — решения, либо $\cos 2x = \frac{1}{2}$ и $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$ — решения.

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{18-x}{2+x}} > -x.$$

Ответ: $x \in (-2, 18]$.

Решение. ОДЗ: $x \in (-2, 18]$. Если $x \in (0, 18]$, то левая часть неравенства неотрицательна, а правая — отрицательна. Следовательно, это решения. Если же $x \in (-2, 0]$, то обе части неравенства неотрицательны. В этом случае неравенство равносильно

$$0 > x^3 + 2x^2 + x - 18 = (x-2)(x^2+4x+9).$$

Так как $x^2 + 4x + 9 > 0$ при всех x, то получаем $0 > x - 2$ — верно при всех $x \in (-2, 0]$, т. е. это решения.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x(y+1) = 4\log_{x+2}\sqrt{y-1}, \\ \\ \log_{y-1}(x+2) = \log_x\left(\dfrac{x^3}{y+1}\right). \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{7+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Решение. С учётом ОДЗ ($x > 0$, $y > 1$, $x \neq 1$, $y \neq 2$) система преобразуется равносильным переходом к виду

$$\begin{cases} uv = 2, \\ u+v = 3, \end{cases}$$

где $u = \log_x(y+1)$, $v = \log_{y-1}(x+2)$. Отсюда либо $u = 1$, $v = 2$, либо $u = 2$, $v = 1$.

В первом случае имеем

$$\begin{cases} y+1 = x, \\ x+2 = (y-1)^2. \end{cases}$$

Далее $y^2 - 3y - 2 = 0$, откуда $y = \frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, $x = \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$. С учётом ОДЗ, получаем $x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ и $y = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ — в ответ.

Во втором случае имеем

$$\begin{cases} y+1 &= x^2, \\ x+2 &= y-1. \end{cases}$$

Далее $x^2 - x - 4 = 0$, откуда $x = \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$, $y = \frac{7\pm\sqrt{17}}{2}$. С учётом ОДЗ, получаем $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ и $y = \frac{7+\sqrt{17}}{2}$ — в ответ.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x-1| + |x+1| - 2y &= 0, \\ \\ x^2 + y^2 - 2ay + 2a &= 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Ответ: $a = 2 + \sqrt{2}$.

Решение. Первое уравнение системы можно записать в виде

$$y = \begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ |x|, & |x| > 1. \end{cases}$$

Второе уравнение системы преобразуется к виду $x^2 + (y-a)^2 = (a-1)^2$ и является уравнением окружности с центром в точке $(0; a)$ и радиусом $|a-1|$. Эта окружность при любом значении a проходит через точку $A(0;1)$ и касается прямой $y = 1$. Если $a < 1$, то окружность лежит ниже прямой $y = 1$, и данная система в этом случае имеет единственное решение $(0;1)$. При $a = 1$ окружность вырождается в точку A, т. е. в этом случае система тоже имеет единственное решение $(0;1)$. Если же $a > 1$, то окружность расположена выше прямой $y = 1$, и система кроме решения $(0;1)$ будет иметь ещё два решения (симметричных относительно прямой $x = 0$) в том случае, когда окружность касается прямых $y = x$ и $y = -x$. Это означает, что система

$$\begin{cases} y = x, \\ x^2 + (y-a)^2 = (a-1)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение, т. е. уравнение $x^2 + (x - a)^2 = (a - 1)^2$ имеет единственный корень. Это уравнение можно записать так $2x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$, откуда $D = 4a^2 - 8(2a - 1) = 4(a^2 - 4a + 2) = 0$, т. е. $a = 2 \pm \sqrt{2}$. Так как $a > 1$, то получаем $a = 2 + \sqrt{2}$.

6. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 8. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 15. Сфера, центр O которой лежит в плоскости SBC, касается рёбер SA, AB и AC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите AA_1, расстояние от точки O до ребра BC, и радиус сферы.

Ответ: $AA_1 = 6$, $\rho = \frac{18}{5}$, $R = \frac{4\sqrt{39}}{5}$.

Решение. Обозначим $AB = 2b = 8$, $SC = h = 15$. Пусть E и K — проекции точки O на прямые BC и SC соответственно. Пусть $OE = x$, $OA_1 = OB_1 = OC_1 = R$ — радиус сферы. Так как OE — перпендикуляр к плоскости ABC, а $OB_1 \perp AB$, то по теореме о трёх перпендикулярах получаем $B_1E \perp AB$. Аналогично $C_1E \perp AC$. Из равенства прямоугольных треугольников OB_1E и OC_1E следует, что $B_1E = C_1E$. Из равенства прямоугольных треугольников BB_1E и CC_1E (так как $\angle B = \angle C = \frac{\pi}{3}$) получаем, что $BE = CE = b = 4$. Тогда $B_1B = \frac{b}{2} = C_1C$, $C_1A = B_1A = \frac{3}{2}b$, $B_1E = \frac{b\sqrt{3}}{2}$. Кроме того, из равенств отрезков касательных, проведённых к сфере из точки A, следует, что $AA_1 = AB_1 = \frac{3}{2}b = 6$.

Для нахождения x и R выразим SO из треугольников SKO и SOA_1. Так как $OK = CE = b$ и $SK = h - x$, то $SO^2 = (h-x)^2 + b^2 = OA_1^2 + SA_1^2$, где $OA_1^2 = R^2 = OE^2 + B_1E^2 = x^2 + \frac{3}{4}b^2$, $SA_1 = SA - AA_1 = \sqrt{h^2 + 4b^2} - \frac{3}{2}b$. Следовательно, $(h - x)^2 + b^2 = x^2 + \frac{3}{4}b^2 + \left(\sqrt{h^2 + 4b^2} - \frac{3}{2}b\right)$, откуда получаем

$$x^2 + h^2 - 2xh + b^2 = x^2 + \frac{3}{4}b^2 + h^2 + 4b^2 + \frac{9}{4}b^2 - 3b\sqrt{h^2 + 4b^2},$$

т. е. $x = \frac{3b}{2h}\left(\sqrt{h^2 + 4b^2} - 2b\right) = \frac{12}{30}\left(\sqrt{15 \cdot 15 + 64} - 8\right) = \frac{2}{5}(17 - 8) = \frac{18}{5}$. Тогда $R = \sqrt{x^2 + \frac{3}{4}b^2} = \sqrt{\frac{18 \cdot 18}{25} + \frac{3}{4} \cdot 16} = \frac{4\sqrt{39}}{5}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА И (ДОЛГОПРУДНЫЙ, ФИЗТЕХ-2010)

1. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 1, угол ABC равен $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Точка D лежит на стороне BC так, что площадь треугольника ABC втрое больше площади треугольника ADC. Найдите расстояние от точки D до прямой AB и радиус окружности, описанной около треугольника ADC.

Ответ: $\rho = \frac{2}{\sqrt{10}}$, $R = \frac{\sqrt{85}}{18}$.

Решение. Пусть E — проекция точки D на прямую AB. Так как $S_{\triangle ABC} = \frac{AC\cdot BC}{2}\sin\angle ACB$, а $S_{\triangle ADC} = \frac{AC\cdot DC}{2}\sin\angle ACB$, то $\frac{BC}{DC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}} = 3$. Следовательно, $DC = \frac{BC}{3}$ и $BD = \frac{2BC}{3}$. Имеем $BC = \frac{1}{2\sin\operatorname{arctg}\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Тогда $BD = \frac{\sqrt{10}}{3}$ и $DE = BD\sin\angle ABC = \frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{2}{\sqrt{10}}$ — расстояние от точки D до прямой AB. Далее, по теореме косинусов из $\triangle ADC$ получаем

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2\cdot AC\cdot DC\cdot\cos\angle ACD = 1 + \frac{5}{18} - \frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{17}{18}.$$

Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника ADC, равен

$$R = \frac{AD}{2\sin\angle ACD} = \frac{\sqrt{17}}{6\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{85}}{18}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x\cos 3x - \sin 7x\cos x}{\cos 2x + \sin 2x} = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $\quad \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $\quad n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Так как

$$\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin 2x\right),$$

$$\sin 7x\cos x = \frac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin 6x\right),$$

то уравнение равносильно

$$\frac{\sin 2x - \sin 6x}{2(\cos 2x + \sin 2x)} = -\frac{\sin 2x\cos 4x}{\cos 2x + \sin 2x} = 0.$$

Так как $\cos 4x = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$, то получаем

$$\sin 2x(\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

при условии $\cos 2x + \sin 2x \neq 0$. Если $\sin 2x = 0$, то $x = \frac{\pi n}{2}$, причём $\cos 2x + \sin 2x = (-1)^n \neq 0$, т. е. это решения. Если $\cos 2x - \sin 2x = 0$, то $\cos 2x \neq 0$ и $\operatorname{tg} 2x = 1$, т. е. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$. При этом $\cos 2x + \sin 2x = 2\cos 2x \neq 0$, т. е. это решения.

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{x+4}{2-x}} > x.$$

Ответ: $x \in [-4, 2)$.

Решение. ОДЗ: $x \in [-4, 2)$. Если $x \in [-4, 0)$, то левая часть неравенства неотрицательна, а правая — отрицательна. Следовательно, это решения. Если же $x \in [0, 2)$, то обе части неравенства неотрицательны. В этом случае неравенство равносильно

$$0 < x^3 - 2x^2 + x + 4 = (x+1)(x^2 - 3x + 4).$$

Так как $x^2 - 3x + 4 > 0$ при всех x, то получаем $0 < x + 1$ — верно при всех $x \in [0, 2)$, т. е. это решения.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{2y-1} \sqrt{x+2} & = & \log_{2y+1} x, \\ \\ \log_x \left(\dfrac{x^3}{2y+1} \right) & = & \log_{2y-1}(x+2). \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{7+\sqrt{17}}{4} \right)$, $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{4} \right)$.

Решение. С учётом ОДЗ ($x > 0$, $y > \frac{1}{2}$, $x \neq 1$, $y \neq 1$) система преобразуется равносильным переходом к виду

$$\begin{cases} uv & = & 2, \\ u + v & = & 3, \end{cases}$$

где $u = \log_x(2y+1)$, $v = \log_{2y-1}(x+2)$. Отсюда либо $u = 1$, $v = 2$, либо $u = 2$, $v = 1$.

В первом случае имеем

$$\begin{cases} 2y + 1 & = & x, \\ x + 2 & = & (2y-1)^2. \end{cases}$$

Далее $2y^2 - 3y - 1 = 0$, откуда $y = \frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$, $x = \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$. С учётом ОДЗ, получаем $x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ и $y = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$ — в ответ.

Во втором случае имеем

$$\begin{cases} 2y+1 &= x^2, \\ x+2 &= 2y-1. \end{cases}$$

Далее $x^2 - x - 4 = 0$, откуда $x = \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$, $y = \frac{7\pm\sqrt{17}}{4}$. С учётом ОДЗ, получаем $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ и $y = \frac{7+\sqrt{17}}{4}$ — в ответ.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |x-2| - 2y &= 0, \\ \\ x^2 - 2x + y^2 - 2ay &= -2a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Ответ: $a = 2 + \sqrt{2}$.

Решение. Первое уравнение системы можно записать в виде

$$y = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 2, \\ 1-x, & x < 0, \\ x-1, & x > 2. \end{cases}$$

Второе уравнение системы преобразуется к виду $(x-1)^2 + (y-a)^2 = (a-1)^2$ и является уравнением окружности с центром в точке $(1;a)$ и радиусом $|a-1|$. Эта окружность при любом значении a проходит через точку $A(1;1)$ и касается прямой $y = 1$. Если $a < 1$, то окружность лежит ниже прямой $y = 1$, и данная система в этом случае имеет единственное решение $(1;1)$. При $a = 1$ окружность вырождается в точку A, т. е. в этом случае система тоже имеет единственное решение $(1;1)$. Если же $a > 1$, то окружность расположена выше прямой $y = 1$, и система кроме решения $(1;1)$ будет иметь ещё два решения (симметричных относительно прямой $x = 1$) в том случае, когда окружность касается прямых $y = x - 1$ и $y = 1 - x$. Это означает, что система

$$\begin{cases} y = x - 1, \\ (x-1)^2 + (y-a)^2 = (a-1)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение, т. е. уравнение $(x-1)^2+(x-1-a)^2 = (a-1)^2$ имеет единственный корень. Это уравнение можно записать так $2(x-1)^2-2a(x-1)+ + 2a-1 = 0$, откуда $D = 4a^2 - 8(2a-1) = 4(a^2-4a+2) = 0$, т. е. $a = 2 \pm \sqrt{2}$. Так как $a > 1$, то получаем $a = 2+\sqrt{2}$.

6. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 5. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 12. Сфера, центр O которой лежит в плоскости SBC, касается рёбер SA, AB и AC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите AA_1, расстояние от точки O до ребра BC, и радиус сферы.

Ответ: $AA_1 = \frac{15}{4}$, $\rho = \frac{5}{2}$, $R = \frac{5\sqrt{7}}{4}$.

Решение. Обозначим $AB = 2b = 5$, $SC = h = 12$. Пусть E и K — проекции точки O на прямые BC и SC соответственно. Пусть $OE = x$, $OA_1 = OB_1 = = OC_1 = R$ — радиус сферы. Так как OE — перпендикуляр к плоскости ABC, а $OB_1 \perp AB$, то по теореме о трёх перпендикулярах получаем $B_1E \perp AB$. Аналогично $C_1E \perp AC$. Из равенства прямоугольных треугольников OB_1E и OC_1E следует, что $B_1E = C_1E$. Из равенства прямоугольных треугольников BB_1E и CC_1E (так как $\angle B = \angle C = \frac{\pi}{3}$) получаем, что $BE = CE = b = \frac{5}{2}$. Тогда $B_1B = \frac{b}{2} = C_1C$, $C_1A = B_1A = \frac{3}{2}b$, $B_1E = \frac{b\sqrt{3}}{2}$. Кроме того, из равенств отрезков касательных, проведённых к сфере из точки A, следует, что $AA_1 = AB_1 = \frac{3}{2}b = = \frac{15}{4}$.

Для нахождения x и R выразим SO из треугольников SKO и SOA_1. Так как $OK = CE = b$ и $SK = h-x$, то $SO^2 = (h-x)^2+b^2 = OA_1^2+SA_1^2$, где $OA_1^2 = R^2 = = OE^2 + B_1E^2 = x^2 + \frac{3}{4}b^2$, $SA_1 = SA - AA_1 = \sqrt{h^2+4b^2} - \frac{3}{2}b$. Следовательно, $(h-x)^2 + b^2 = x^2 + \frac{3}{4}b^2 + \left(\sqrt{h^2+4b^2} - \frac{3}{2}b\right)$, откуда получаем

$$x^2 + h^2 - 2xh + b^2 = x^2 + \frac{3}{4}b^2 + h^2 + 4b^2 + \frac{9}{4}b^2 - 3b\sqrt{h^2+4b^2},$$

т. е. $x = \frac{3b}{2h}\left(\sqrt{h^2+4b^2} - 2b\right) = \frac{15}{48}\left(\sqrt{12\cdot 12+25} - 5\right) = \frac{5}{16}(13-5) = \frac{5}{2}$. Тогда $R = \sqrt{x^2 + \frac{3}{4}b^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{7}}{4}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА Ф (ДОЛГОПРУДНЫЙ, ФИЗТЕХ-2010)

1. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 1, угол ABC равен $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Точка D лежит на стороне BC так, что площадь треугольника ABC вчетверо больше площади треугольника ADC. Найдите расстояние от точки D до прямой AB и радиус окружности, описанной около треугольника ADC.

Ответ: $\rho = \frac{9}{4\sqrt{10}}$, $R = \frac{\sqrt{145}}{24}$.

Решение. Пусть E — проекция точки D на прямую AB. Так как $S_{\triangle ABC} = \frac{AC\cdot BC}{2}\sin\angle ACB$, а $S_{\triangle ADC} = \frac{AC\cdot DC}{2}\sin\angle ACB$, то $\frac{BC}{DC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}} = 4$. Следовательно, $DC = \frac{BC}{4}$ и $BD = \frac{3BC}{4}$. Имеем $BC = \frac{1}{2\sin\operatorname{arctg}\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Тогда $BD = \frac{3\sqrt{10}}{8}$ и $DE = BD\sin\angle ABC = \frac{3\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{3}{10} = \frac{9}{4\sqrt{10}}$ — расстояние от точки D до прямой AB. Далее, по теореме косинусов из $\triangle ADC$ получаем

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2\cdot AC\cdot DC\cdot\cos\angle ACD = 1 + \frac{5}{32} - \frac{\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{29}{32}.$$

Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника ADC, равен

$$R = \frac{AD}{2\sin\angle ACD} = \frac{\sqrt{29}}{8\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{145}}{24}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x\cos 10x - \sin 4x\cos 8x}{\cos 2x} = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}$, $\quad \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $\quad n\in\mathbb{Z}$.

Решение. Так как

$$\sin 2x\cos 10x = \frac{1}{2}\left(\sin 12x - \sin 8x\right),$$

$$\sin 4x\cos 8x = \frac{1}{2}\left(\sin 12x - \sin 4x\right),$$

то уравнение равносильно

$$\frac{\sin 4x - \sin 8x}{2\cos 2x} = -\frac{\sin 2x\cos 6x}{\cos 2x} = 0.$$

Так как $\cos 6x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x$, то получаем

$$\sin 2x(4\cos^2 2x - 3) = \sin 2x(2\cos 4x - 1) = 0$$

при условии $\cos 2x \neq 0$. Тогда либо $\sin 2x = 0$ и $x = \frac{\pi n}{2}$ — решения, либо $\cos 4x = \frac{1}{2}$ и $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ — решения.

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{3-x}{1+x}} > -x.$$

Ответ: $x \in (-1, 3]$.

Решение. ОДЗ: $x \in (-1, 3]$. Если $x \in (0, 3]$, то левая часть неравенства неотрицательна, а правая — отрицательна. Следовательно, это решения. Если же $x \in (-1, 0]$, то обе части неравенства неотрицательны. В этом случае неравенство равносильно

$$0 > x^3 + x^2 + x - 3 = (x-1)(x^2 + 2x + 3).$$

Так как $x^2 + 2x + 3 > 0$ при всех x, то получаем $0 > x - 1$ — верно при всех $x \in (-1, 0]$, т. е. это решения.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_y(x+1) &= \log_{y+2}(x-1)^2, \\ \log_{x-1}(y+2) &= \log_y\left(\dfrac{y^3}{x+1}\right). \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{7+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Решение. С учётом ОДЗ ($y > 0$, $x > 1$, $y \neq 1$, $x \neq 2$) система преобразуется равносильным переходом к виду

$$\begin{cases} uv &= 2, \\ u + v &= 3, \end{cases}$$

где $u = \log_y(x+1)$, $v = \log_{x-1}(y+2)$. Отсюда либо $u = 1$, $v = 2$, либо $u = 2$, $v = 1$.

В первом случае имеем

$$\begin{cases} x + 1 &= y, \\ y + 2 &= (x-1)^2. \end{cases}$$

Далее $x^2-3x-2=0$, откуда $x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, $y=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$. С учётом ОДЗ, получаем $x=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ и $y=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ — в ответ.

Во втором случае имеем

$$\begin{cases} x+1 &= y^2, \\ y+2 &= x-1. \end{cases}$$

Далее $y^2-y-4=0$, откуда $y=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$, $x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{2}$. С учётом ОДЗ, получаем $x=\frac{7+\sqrt{17}}{2}$ и $y=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ — в ответ.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x-1|+|x-3|-2y &= 0, \\ \\ x^2-4x+y^2-2ay+2a &= -3 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Ответ: $a=2+\sqrt{2}$.

Решение. Первое уравнение системы можно записать в виде

$$y=\begin{cases} 1, & 1\le x\le 3, \\ 2-x, & x<1, \\ x-2, & x>3. \end{cases}$$

Второе уравнение системы преобразуется к виду $(x-2)^2+(y-a)^2=(a-1)^2$ и является уравнением окружности с центром в точке $(2;a)$ и радиусом $|a-1|$. Эта окружность при любом значении a проходит через точку $A(2;1)$ и касается прямой $y=1$. Если $a<1$, то окружность лежит ниже прямой $y=1$, и данная система в этом случае имеет единственное решение $(2;1)$. При $a=1$ окружность вырождается в точку A, т. е. в этом случае система тоже имеет единственное решение $(2;1)$. Если же $a>1$, то окружность расположена выше прямой $y=1$, и система кроме решения $(2;1)$ будет иметь ещё два решения (симметричных относительно прямой $x=2$) в том случае, когда окружность касается прямых $y=x-2$ и $y=2-x$. Это означает, что система

$$\begin{cases} y=x-2, \\ (x-2)^2+(y-a)^2=(a-1)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение, т. е. уравнение $(x-2)^2+(x-2-a)^2=(a-1)^2$ имеет единственный корень. Это уравнение можно записать так $2(x-2)^2-2a(x-2)+$ $+2a-1=0$, откуда $D=4a^2-8(2a-1)=4(a^2-4a+2)=0$, т. е. $a=2\pm\sqrt{2}$. Так как $a>1$, то получаем $a=2+\sqrt{2}$.

6. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 16. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 30. Сфера, центр O которой лежит в плоскости SBC, касается рёбер SA, AB и AC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите AA_1, расстояние от точки O до ребра BC, и радиус сферы.

Ответ: $AA_1=12$, $\rho=\frac{36}{5}$, $R=\frac{8\sqrt{39}}{5}$.

Решение. Обозначим $AB=2b=16$, $SC=h=30$. Пусть E и K — проекции точки O на прямые BC и SC соответственно. Пусть $OE=x$, $OA_1=OB_1=$ $=OC_1=R$ — радиус сферы. Так как OE — перпендикуляр к плоскости ABC, а $OB_1\perp AB$, то по теореме о трёх перпендикулярах получаем $B_1E\perp AB$. Аналогично $C_1E\perp AC$. Из равенства прямоугольных треугольников OB_1E и OC_1E следует, что $B_1E=C_1E$. Из равенства прямоугольных треугольников BB_1E и CC_1E (так как $\angle B=\angle C=\frac{\pi}{3}$) получаем, что $BE=CE=b=8$. Тогда $B_1B=\frac{b}{2}=C_1C$, $C_1A=B_1A=\frac{3}{2}b$, $B_1E=\frac{b\sqrt{3}}{2}$. Кроме того, из равенств отрезков касательных, проведённых к сфере из точки A, следует, что $AA_1=AB_1=\frac{3}{2}b=$ $=12$.

Для нахождения x и R выразим SO из треугольников SKO и SOA_1. Так как $OK=CE=b$ и $SK=h-x$, то $SO^2=(h-x)^2+b^2=OA_1^2+SA_1^2$, где $OA_1^2=R^2=$ $=OE^2+B_1E^2=x^2+\frac{3}{4}b^2$, $SA_1=SA-AA_1=\sqrt{h^2+4b^2}-\frac{3}{2}b$. Следовательно, $(h-x)^2+b^2=x^2+\frac{3}{4}b^2+\left(\sqrt{h^2+4b^2}-\frac{3}{2}b\right)$, откуда получаем

$$x^2+h^2-2xh+b^2=x^2+\frac{3}{4}b^2+h^2+4b^2+\frac{9}{4}b^2-3b\sqrt{h^2+4b^2},$$

т. е. $x=\frac{3b}{2h}\left(\sqrt{h^2+4b^2}-2b\right)=\frac{24}{60}\left(\sqrt{30\cdot30+4\cdot64}-16\right)=\frac{2}{5}(2\cdot17-16)=\frac{36}{5}$. Тогда $R=\sqrt{x^2+\frac{3}{4}b^2}=\sqrt{\frac{36\cdot36}{25}+\frac{3}{4}\cdot64}=\frac{4}{5}\sqrt{81+75}=\frac{8\sqrt{39}}{5}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА P (ДОЛГОПРУДНЫЙ, ФИЗТЕХ-2010)

1. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 1, угол ABC равен $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$. Точка D лежит на стороне BC так, что площадь треугольника ABC втрое больше площади треугольника ADC. Найдите расстояние от точки D до прямой AB и радиус окружности, описанной около треугольника ADC.

Ответ: $\rho = \frac{8}{3\sqrt{17}}$, $R = \frac{\sqrt{697}}{48}$.

Решение. Пусть E — проекция точки D на прямую AB. Так как $S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}\sin\angle ACB$, а $S_{\triangle ADC} = \frac{AC \cdot DC}{2}\sin\angle ACB$, то $\frac{BC}{DC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}} = 3$. Следовательно, $DC = \frac{BC}{3}$ и $BD = \frac{2BC}{3}$. Имеем $BC = \frac{1}{2\sin\operatorname{arctg}\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$. Тогда $BD = \frac{\sqrt{17}}{3}$ и $DE = BD\sin\angle ABC = \frac{\sqrt{17}}{3}\cdot\frac{8}{17} = \frac{8}{3\sqrt{17}}$ — расстояние от точки D до прямой AB. Далее, по теореме косинусов из $\triangle ADC$ получаем

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2 \cdot AC \cdot DC \cdot \cos\angle ACD = 1 + \frac{17}{36} - \frac{\sqrt{17}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{41}{36}.$$

Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника ADC, равен

$$R = \frac{AD}{2\sin\angle ACD} = \frac{\sqrt{41}}{12}\cdot\frac{\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{697}}{48}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 7x\cos x - \sin 5x\cos 3x}{\cos 2x - \sin 2x} = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}, \quad -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Так как

$$\sin 7x\cos x = \frac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin 6x\right),$$

$$\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin 2x\right),$$

то уравнение равносильно

$$\frac{\sin 6x - \sin 2x}{2(\cos 2x - \sin 2x)} = \frac{\sin 2x\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} = 0.$$

Так как $\cos 4x = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$, то получаем

$$\sin 2x(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

при условии $\cos 2x - \sin 2x \neq 0$. Если $\sin 2x = 0$, то $x = \frac{\pi n}{2}$, причём $\cos 2x - \sin 2x = (-1)^n \neq 0$, т. е. это решения. Если $\cos 2x + \sin 2x = 0$, то $\cos 2x \neq 0$ и $\operatorname{tg} 2x = -1$, т. е. $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$. При этом $\cos 2x - \sin 2x = 2\cos 2x \neq 0$, т. е. это решения.

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{x+14}{1-x}} > x.$$

Ответ: $x \in [-14, 1)$.

Решение. ОДЗ: $x \in [-14, 1)$. Если $x \in [-14, 0)$, то левая часть неравенства неотрицательна, а правая — отрицательна. Следовательно, это решения. Если же $x \in [0, 1)$, то обе части неравенства неотрицательны. В этом случае неравенство равносильно

$$0 < x^3 - x^2 + x + 14 = (x+2)(x^2 - 3x + 7).$$

Так как $x^2 - 3x + 7 > 0$ при всех x, то получаем $0 < x + 2$ — верно при всех $x \in [0, 1)$, т. е. это решения.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{x-1}\sqrt{y+2} &= \log_{x+1} y, \\ \log_y\left(\dfrac{y^3}{x+1}\right) &= \log_{x-1}(y+2) \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{7+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Решение. С учётом ОДЗ ($y > 0$, $x > 1$, $y \neq 1$, $x \neq 2$) система преобразуется равносильным переходом к виду

$$\begin{cases} uv &= 2, \\ u + v &= 3, \end{cases}$$

где $u = \log_y(x+1)$, $v = \log_{x-1}(y+2)$. Отсюда либо $u = 1$, $v = 2$, либо $u = 2$, $v = 1$.

В первом случае имеем

$$\begin{cases} x + 1 &= y, \\ y + 2 &= (x-1)^2. \end{cases}$$

Далее $x^2-3x-2=0$, откуда $x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, $y=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$. С учётом ОДЗ, получаем $x=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$, $y=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ — в ответ.

Во втором случае имеем

$$\begin{cases} x+1 &= y^2, \\ y+2 &= x-1. \end{cases}$$

Далее $y^2-y-4=0$, откуда $y=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$, $x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{2}$. С учётом ОДЗ, получаем $x=\frac{7+\sqrt{17}}{2}$, $y=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ — в ответ.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x|+|x+2|-2y &= 0, \\ \\ x^2+2x+y^2-2ay &= -2a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Ответ: $a=2+\sqrt{2}$.

Решение. Первое уравнение системы можно записать в виде

$$y=\begin{cases} 1, & -2\le x\le 0, \\ -1-x, & x<-2, \\ x+1, & x>0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы преобразуется к виду $(x+1)^2+(y-a)^2=(a-1)^2$ и является уравнением окружности с центром в точке $(-1;a)$ и радиусом $|a-1|$. Эта окружность при любом значении a проходит через точку $A(-1;1)$ и касается прямой $y=1$. Если $a<1$, то окружность лежит ниже прямой $y=1$, и данная система в этом случае имеет единственное решение $(-1;1)$. При $a=1$ окружность вырождается в точку A, т. е. в этом случае система тоже имеет единственное решение $(-1;1)$. Если же $a>1$, то окружность расположена выше прямой $y=1$, и система кроме решения $(-1;1)$ будет иметь ещё два решения (симметричных относительно прямой $x=-1$) в том случае, когда окружность касается прямых $y=x+1$ и $y=-x-1$. Это означает, что система

$$\begin{cases} y=x+1, \\ (x+1)^2+(y-a)^2=(a-1)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение, т. е. уравнение $(x+1)^2+(x+1-a)^2=(a-1)^2$ имеет единственный корень. Это уравнение можно записать так $2(x+1)^2-2a(x+1)+ + 2a-1=0$, откуда $D=4a^2-8(2a-1)=4(a^2-4a+2)=0$, т. е. $a=2\pm\sqrt{2}$. Так как $a>1$, то получаем $a=2+\sqrt{2}$.

6. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 10. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 24. Сфера, центр O которой лежит в плоскости SBC, касается рёбер SA, AB и AC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите AA_1, расстояние от точки O до ребра BC, и радиус сферы.

Ответ: $AA_1=\frac{15}{2}$, $\rho=5$, $R=\frac{5\sqrt{7}}{2}$.

Решение. Обозначим $AB=2b=10$, $SC=h=24$. Пусть E и K — проекции точки O на прямые BC и SC соответственно. Пусть $OE=x$, $OA_1=OB_1= =OC_1=R$ — радиус сферы. Так как OE — перпендикуляр к плоскости ABC, а $OB_1\perp AB$, то по теореме о трёх перпендикулярах получаем $B_1E\perp AB$. Аналогично $C_1E\perp AC$. Из равенства прямоугольных треугольников OB_1E и OC_1E следует, что $B_1E=C_1E$. Из равенства прямоугольных треугольников BB_1E и CC_1E (так как $\angle B=\angle C=\frac{\pi}{3}$) получаем, что $BE=CE=b=5$. Тогда $B_1B=\frac{b}{2}=C_1C$, $C_1A=B_1A=\frac{3}{2}b$, $B_1E=\frac{b\sqrt{3}}{2}$. Кроме того, из равенств отрезков касательных, проведённых к сфере из точки A, следует, что $AA_1=AB_1=\frac{3}{2}b= =\frac{15}{2}$.

Для нахождения x и R выразим SO из треугольников SKO и SOA_1. Так как $OK=CE=b$ и $SK=h-x$, то $SO^2=(h-x)^2+b^2=OA_1^2+SA_1^2$, где $OA_1^2=R^2= =OE^2+B_1E^2=x^2+\frac{3}{4}b^2$, $SA_1=SA-AA_1=\sqrt{h^2+4b^2}-\frac{3}{2}b$. Следовательно, $(h-x)^2+b^2=x^2+\frac{3}{4}b^2+\left(\sqrt{h^2+4b^2}-\frac{3}{2}b\right)$, откуда получаем

$$x^2+h^2-2xh+b^2=x^2+\frac{3}{4}b^2+h^2+4b^2+\frac{9}{4}b^2-3b\sqrt{h^2+4b^2},$$

т. е. $x=\frac{3b}{2h}\left(\sqrt{h^2+4b^2}-2b\right)=\frac{15}{48}\left(\sqrt{24\cdot 24+4\cdot 25}-10\right)=\frac{5}{16}(2\cdot 13-10)=5$. Тогда $R=\sqrt{x^2+\frac{3}{4}b^2}=\sqrt{25+\frac{3}{4}\cdot 25}=\frac{5\sqrt{7}}{2}$.