Московский физико-технический институт

Показательные, логарифмические уравнения и неравенства, метод потенциирования и логарифмирования в решении задач.

Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

Москва 2014

Введение.

Показательные уравнения и неравенства — это уравнения и неравенства, в которых переменная величина входит в аргумент показательных функций.

Показательные уравнения

Рассмотрим простейшее показательное уравнение

$$a^x = b \text{ при } a > 0,\ a \neq 1 \tag{1}$$

Показательная функция $y = a^x$ монотонна и принимает только положительные значения, поэтому:

- при любом $b > 0$ уравнение (1) имеет единственный корень $x = \log_a b$;
- при $b <= 0$ уравнение (1) не имеет корней.

При решении показательных уравнений мы постоянно пользуемся упомянутыми выше свойствами показательной функции: она монотонна и принимает только положительные значения.

Примеры задач

Задача №1. Решить уравнение: $8^{x+2} = 32^{1-x}$.

Решение:

Заметим, что $8 = 2^3$ и $32 = 2^5$, тогда $(2^3)^{x+2} = (2^5)^{1-x}$, т.е. $2^{3(x+2)} = 2^{5(1-x)}$. Поскольку функция $y = 2^x$ монотонно возрастает, равенство $2^a = 2^b$ эквивалентно равенству $a = b$, следовательно, $3(x+2) = 5(1-x) \Rightarrow x = -\frac{1}{8}$.

Ответ: $x = -\frac{1}{8}$.

Задача №2. Решить уравнение: $3^{x+1} + 3^x - 3^{x-2} = 35$.

Решение:

$3^{x-2}(3^3+3^2-1)=35 \Leftrightarrow 3^{x-2}\cdot 35=35 \Leftrightarrow 3^{x-2}=1 \Rightarrow x=2.$

Ответ: $x=2.$

Задача №3. Решить уравнение: $4^x-2^{x+1}-8=0.$

Решение:

$2^{2x}-2\cdot 2^x-8=0,\ 2^x=t,\ t>0 \Rightarrow t^2-2t-8=0 \Rightarrow t_1=4,\ t_2=-2 \Rightarrow 2^x=4 \Rightarrow x=2.$

Ответ: $x=2.$

Задача №4. Решить уравнение $2\cdot 4^x+6\cdot 9^x=7\cdot 6^x.$

Решение:

Подставим в уравнение: $4=2^2,\ 9=3^2,\ 6=2\cdot 3,\ \Rightarrow$ $2\cdot 2^{2x}-7\cdot 2\cdot 2^x\cdot 3^x+6\cdot 3^{2x}=0 \Leftrightarrow 2\cdot(\frac{2}{3})^{2x}-7\cdot(\frac{2}{3})^x+6=0$, делаем замену $t=(\frac{2}{3})^x,\ t>0\ \Rightarrow\ 2t^2-7t+6=0\ \Rightarrow\ t_1=2,\ t_2=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ (\frac{2}{3})^x=2$ или $(\frac{2}{3})^x=\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ x=\log_{\frac{2}{3}}2$ или $x=-1.$

Ответ: $-1;\ \log_{\frac{2}{3}}2.$

Задача №5. Решить уравнение: $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=4.$

Решение:

Заметим, что $(2+\sqrt{3})^x(2-\sqrt{3})^x=(2^2-(\sqrt{3})^2)^x=1^x\equiv 1$. Поэтому делаем замену $t=(2+\sqrt{3})^x$ и получаем: $t+\frac{1}{t}=4\ \Leftrightarrow\ t^2-4t+1=0\ \Rightarrow$ $t_{1,2}=2\pm\sqrt{3}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}(2+\sqrt{3})^x=2+\sqrt{3}\\ (2+\sqrt{3})^x=2-\sqrt{3}\end{array}\right.\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right..$

Ответ: $\pm 1.$

Задачи для самостоятельного решения

1. $3^{x^2+4x}=\frac{1}{25}$
2. $2\cdot 25^x-5\cdot 10^x+2\cdot 4^x=0$
3. $5^x\cdot 8^{\frac{x}{x+1}}=100$
4. $5^{x^2-2x}=128$
5. $16^x-5\cdot 36^x+4\cdot 81^x=0$
6. $3^x\cdot 8^{\frac{x}{x+1}}=36$

7. Решить уравнение:

   (a) $24 \cdot 3^{2x^2-3x-2} - 2 \cdot 3^{2x^2-3x} + 3^{2x^2-3x-1} = 9$

   (b) $5 \cdot 2^{x^2+5x+7} + 2^{x^2+5x+9} - 2^{x^2+5x+10} = 2$

   (c) $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$

   (d) $25^{2x+6} + 16 \cdot 4^{2x+4} = 20 \cdot 10^{2x+5}$

   (e) при каких значениях параметра a уравнение $9^x+3^x+a^2-14a = 0$ имеет единственный корень?

   (f) при каких значениях параметра m уравнение $x^2 - (2^m - 1) - 3(4^{m-1} - 2^{m-2}) = 0$ имеет единственный корень?

   (g) при каких значениях a уравнение $|3^x - a| + |3^x + a| = 2$ имеет бесконечно много корней?

8. Решите систему уравнений:

   (a) $\begin{cases} \frac{\sqrt{6^{x-2y}}}{\sqrt{6x}} = \frac{1}{6} \\ (\frac{1}{3})^{2x-y} \cdot 3^{x-2y} = \frac{1}{3} \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} \sqrt{3^{x-1}} \cdot \sqrt{9^y} = 27 \\ \frac{2^{2x+y}}{2^x} = 64 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} 2^{2x} + 2^x \cdot y = 10 \\ y^2 + y \cdot 2^x = 15 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} 7^{2x} + 7^x \cdot y = 28 \\ y^2 + y \cdot 7^x = -12 \end{cases}$

Показательные неравенства

При решении показательных неравенств мы постоянно пользуемся следующим известным фактом: показательная функция $y = a^x$ является монотонно возрастающей при $a > 1$ и монотонно убывающей при $0 < a < 1$.

Задача №6. Решить неравенство: $4^x < 0,125$.

Решение:

Заметим, что $4 = 2^2$ и $0,125 = \dfrac{1}{8} = 2^{-3}$. Неравенство примет вид: $2^{2x} < 2^{-3}$, функция $y = 2^x$ монотонно возрастает, поэтому неравенство $2^a < 2^b$ эквивалентно неравенству $a < b$. Таким образом, основание степени отбрасывается без изменения знака неравенства: $2x < -3 \;\Rightarrow\; x < -\dfrac{3}{2}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right)$.

<u>**Задача №7.**</u> Решить неравенство: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2-5x+10} \leqslant \dfrac{16}{81}$.

Решение:

Неравенство переписывается в виде $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2-5x+10} > (\dfrac{2}{3})^4$. Функция $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ монотонно убывает, поэтому неравенство $\left(\dfrac{2}{3}\right)^a \geqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^b$ эквивалентно неравенству $a \leqslant b \;\Rightarrow\; x^2 - 5x + 10 \leqslant 4 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 5x + 6x \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 2 \leqslant x \leqslant 3$.

Ответ: $[2; 3]$.

<u>**Задача №8.**</u> Решить неравенство: $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 > 0$.

Решение:

Сделем замену $t = 2x,\; t > 0 \;\Rightarrow\; t^2 - 10t + 16 > 0 \;\Rightarrow\; t > 8$ или $0 < t < 2 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} 2x > 8 \\ 2x < 2 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 1 \end{array}\right.$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

<u>**Задача №9.**</u> Решить неравенство: $5^{2x+1} \leqslant 5^{5^x+4}$.

Решение:

$5 \cdot 5^{2x} - 5^x - 4 \leqslant 0,\; t = 5^x,\; t > 0 \;\Rightarrow\; 5t^2 - t - 4 \leqslant 0 \;\Rightarrow\; -\frac{4}{5} \leqslant t \leqslant 1$,
обратная замена: $\begin{cases} 5^x \geqslant -\frac{4}{5} \\ 5^x \leqslant 1 \end{cases}$.
Первое неравенство системы выполнено при всех значениях x, решение второго — $x \leqslant 0$.

Ответ: $(-\infty; 0]$.

Задача №10. Решить неравенство: $2^x + 2^{1-x} - 3 > 0$.

Решение:

$t = 2^x,\ t > 0 \ \Rightarrow\ t + \frac{2}{t} - 3 > 0 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{t^2 - 3t + 2}{t} > 0$. Его решения: $t < 1$ или $t > 2$. Обратная замена даёт $x < 0$ или $x > 1$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Задача №11. Решить неравенство: $4^x + 2 \cdot 5^{2x} < 10^x$.

Решение:

$2 \cdot 5^{2x} - 2^x \cdot 5^x - 2^{2x} > 0 \ \Leftrightarrow\ \left(\dfrac{5}{2}\right)^{2x} - \left(\dfrac{5}{2}\right)^x - 2 > 0$, делаем замену $t = \left(\dfrac{5}{2}\right)^x :\ t^2 - t - 2 > 0 \ \Rightarrow\ t < -1$ и $t > 2 \ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{5}{2}\right)^x < -1 \\ \left(\dfrac{5}{2}\right)^x > 2 \end{array}\right.$

Из первого неравенства $x \in \varnothing$, решение второго неравенства $x > \log_{\frac{5}{2}} 2$.

Ответ: $\left(\log_{\frac{5}{2}} 2; +\infty\right)$.

Задача №12. Решить неравенство: $\dfrac{1}{3^x + 5} < \dfrac{1}{3^{x+1} - 1}$.

Решение:

$t = 3^x,\ t > 0,\ \dfrac{1}{t+5} < \dfrac{1}{3t-1} \ \Leftrightarrow\ \dfrac{2(t-3)}{(t+5)(3t-1)} < 0 \ \Rightarrow\ t < -5$ или $\dfrac{1}{3} < t < 3 \ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l} 3^x < -5 \\ \dfrac{1}{3} < 3^x < 3 \end{array}\right. \ \Rightarrow\ -1 < x < 1.$

Ответ: $(-1;1)$.

Задачи для самостоятельного решения

9. Решить неравенства:

   (a) $5^{x-1} \cdot 2^{x+2} > 8 \cdot 10^{x^2-3x+2}$

   (b) $3^{2x+1} \cdot 2^{2x-3} < 81 \cdot 16^{1-2x^2}$

   (c) $\sqrt[x]{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt[x]{2} \leqslant \frac{\sqrt[15]{4}}{\sqrt[15]{81}}$

   (d) $5^x \cdot \left(\frac{2}{15}\right)^x \geqslant \frac{4}{9}$

   (e) $3^x \cdot 5^x \leqslant 225^x \cdot \sqrt{15}$

   (f) $37^{\frac{5x-9}{x+6}} \leqslant 1$

   (g) $9^{\sqrt{5+4x-x^2}} \geqslant 1$

   (h) $\left(\frac{1}{4}\right)^{|x|(x-1)} \geqslant \frac{1}{16}$

   (i) $\sqrt{5}^{-3|x|} \geqslant 5^{-|9x-1|}$

10. Решить неравенство: $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{9}{4}\right)\left(\left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + \frac{81}{16}\right) > 0$

11. Решить неравенства:

    (a) $2^{2-x} > 2x - 3$

    (b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \geqslant x^2$

    (c) $x \cdot 2^x < 8$

    (d) $2x + 2 - x^2 \geqslant 3^{x^2-2x+2}$

    (e) $\frac{5}{x} \geqslant 3^{x-1} + 4$

    (f) $x \cdot (0,5)^x \geqslant -8$

    (g) $2^{x^2-4x+5} \geqslant 4x - 2 - x^2$

    (указание: воспользоваться графическим методом решения)

12. При каких значениях a неравенство $4^x - (a-3) \cdot 2^{x+1} + 2a + 2 < 0$ не имеет решения?

13. Решить неравенство $(3^{x+2} - \frac{1}{27}) \cdot (5^{3-2x} - 0,2) \geqslant 0$

Логарифмические уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или в его основании, называется логарифмическим уравнением. Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида

$$\log_a x = b \tag{2}$$

Если $a > 0,\ a \neq 1$, уравнение (2) при любом действительном b имеет единственное решение $x = a^b$.

Некоторые свойства:

- Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$, где $a > 0,\ a \neq 1$ и $b > 0$.
- Логарифм произведения положительных сомножителей равен сумме логарифмов этих сомножителей:

  $\log_a(N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2,\ (a > 0,\ a \neq 1,\ N_1 > 0,\ N_2 > 0)$

  Замечание: если $N_1 \cdot N_2 > 0$, тогда свойство примет вид:

  $\log_a(N_1 \cdot N_2) = \log_a |N_1| + \log_a |N_2|,\ (a > 0,\ a \neq 1,\ N_1 \cdot N_2 > 0)$
- Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя:

  $\log_a \left(\dfrac{N_1}{N_2}\right) = \log_a N_1 - \log_a N_2,\ (a > 0,\ a \neq 1,\ N_1 > 0,\ N_2 > 0)$

  Замечание: если $\dfrac{N_1}{N_2} > 0$, то

  $$\log_a \left(\frac{N_1}{N_2}\right) = \log_a N_1 - \log_a N_2$$
- Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм этого числа:

  $$\log_a N^k = k \log_a N,\ (a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0)$$

  Замечание: если $k = 2s$, то

  $$\log_a N^{2s} = 2s \log_a |N|,\ (a > 0,\ a \neq 1,\ N \neq 0)$$
- Формула перехода к другому основанию:

  $$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a},\ (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ N > 0)$$

  В частности, если $N = b$, получим $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1)$
- $\log_{a^c} b^d = \dfrac{d}{c} \log_a b\ (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c \neq 0)$
  $\log_{a^c} b^c = \log_a b\ (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c \neq 0)$
  $\log_{a^c} b = \dfrac{1}{c} \log_a b\ (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c \neq 0)$
  Если $c = 2n$, то $\log_{a^{2n}} b = \dfrac{1}{2n} \log_{|a|} b\ (b > 0,\ a \neq 0,\ |a| \neq 1)$

Основные свойства функции $f(x) = \log_a x$

(a) $D_f = \mathbb{R}$ – область определения.

(b) $E_f = \mathbb{R}$ – область значений.

(c) При $a > 1$ логарифмическая функция строго возрастает ($0 < x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; \log_a x_1 < \log_a x_2$), а при $0 < a < 1$ – строго убывает ($0 < x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; \log_a x_1 < \log_a x_2$).

(d) $\log_a 1 = 0$ и $\log_a a = 1,\ (a > 0,\ a \neq 1)$.

(e) Если $a > 1$ и положительна при $x \in (1; +\infty)$, а если $0 < a < 1$, то логарифмическая функция положительна при $x \in (0; 1)$ и отрицательна при $x \in (1; +\infty)$.

(f) Если $a > 1$ и положительна при $x \in (1; +\infty)$, а если $0 < a < 1$, то логарифмическая функция выпукла вверх, а если $a \in (0; 1)$ – выпукла вниз.

Следующие утверждения используются при решении логарифмических уравнений:

Утверждение 1. Уравенение $\log_a f(x) = \log_a g(x),\ (a > 0,\ a \neq 1)$ равносильно одной из систем $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$.

Утверждение 2. Уравнение $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ равносильно одной из систем $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \\ g(x) > 0 \end{cases}$.

Использование определения логарифма

Задача №13. Решить уравнение:

$a)\ \log_2(5 + 3\log_2(x - 3)) = 3;$

$b)\ \log_3 \dfrac{x - 3}{x + 3} = 1;$

$c)\ \log_{x-2} 9 = 2;$

$d)\ \log_{2x+1}(2x^2 - 8x + 15) = 2.$

Решение:

a) Имеем: $5+3\log_2(x-3) = 2^3$ или $\log_2(x-3) = 1 \;\Rightarrow\; x = 5$, проверка: $\log_2(5+3\log_2(5-3)) = 5+3\log_2 2 = \log_2(5+3) = 3$ – верно.

Ответ: 5.

b) Имеем: $\dfrac{x-3}{x+3} = 3 \;\Rightarrow\; x = -6$, проверкой убеждаемся, что -6 — решение.

Ответ: -6.

c) Имеем: $(x-2)^2 = 9 \;\Rightarrow\; x_1 = -1, x_2 = 5$. После проверки остаётся лишь $x = 5$.

Ответ: 5.

d) Используя определение логарифма получим уравнение

$(2x^2-8x+15) = (2x+1)^2 \;\Leftrightarrow\; x^2+6x-7 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -7$ и $x_2 = 1$. После проверки остаётся $x = 1$.

Ответ: 1.

Использование свойств логарифма

Задача №14. Решить уравнение:

$a)\log_3 x + \log_3(x+3) = \log_3(x+24);$
$b)\log_4(x^2-4x+1) - \log_4(x^2-6x+5) = -\dfrac{1}{2};$
$c)\log_2 x + log_3 x = 1;$
$d) 2\log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0;$

$e)16^{\log_4(1-2x)} = 5x^2 - 5.$

Решение:

$a)$ ОДЗ есть множество $x \in (0; +\infty)$, которое определяется из системы неравенств $\begin{cases} x > 0 \\ x + 3 > 0 \\ x + 24 > 0 \end{cases}$.

Имеем $\log_3 x + \log_3(x+3) = \log_3(x+24) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x(x+3) = \log_3(x+24) \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x(x+3) = x + 24 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 24 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -6 \\ x_2 = 4 \end{array} \right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$x = 4$

Ответ: 4.

$b)$ Имеем: $\log_4 \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 6x + 5} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 6x + 5} = 4^{-\dfrac{1}{2}}$ или $x^2 - 4x + 1 = \dfrac{1}{2}(x^2 - 6x + 5) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. После проверки остаётся лишь $x = -1$

Ответ: -1.

$c)$ ОДЗ: $x \in (0; +\infty)$. Имеем: $\log_2 x + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 3} = 1,\ \log_2 x\left(1 + \dfrac{1}{\log_2 3}\right) = 1,\ \log_2 x(1 + \log_3 2) = 1$, откуда: $\log_2 x = \dfrac{1}{1 + \log_3 2}$ или $\log_2 x = \dfrac{1}{\log_3 6}$ или $\log_2 x = \log_6 3$. Следовательно, $x = 2^{\log_6 3}$.

Ответ: $2^{\log_6 3}$.

d) ОДЗ: $(2;4)\cup(4;+\infty)$ определяем из системы неравенств

$$\begin{cases} x-2>0 \\ (x-4)^2\neq 0 \end{cases}$$

Имеем: $2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0$ или $\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)|x-4|=1$. Поскольку по ОДЗ: $x-2=|x-2|$, уравнение можно записать следующим образом $|x-2|\cdot|x-4|=1$ или $|x^2-6x+8=1$, последнее уравнение равносильно совокупности уравнений: $\left[\begin{array}{l} x^2-6x+8=1 \\ x^2-6x+8=-1 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad x_1=3,\ x_2=3+\sqrt{2}$ и $x_3=(3-\sqrt{2})\notin$ ОДЗ $\ \Rightarrow\ x_1=3$ и $x_2=3+\sqrt{2}$.

Ответ: $3;\ 3+\sqrt{2}$.

e) Поскольку $16^{\log_4(1-2x)}=4^{2\log_4(1-2x)}=(4^{\log_4(1-2x)})^2$ и, учтя ОДЗ: $x\in(-\infty;-1)$, уравнение равносильно уравнению $(1-2x)^2=2x^2-5$ или $x^2+4x-6=0$, откуда следует: $x_1=-2-\sqrt{10}$ и $x_1=-2+\sqrt{10}$. Последнее значение x не входит в ОДЗ $\Rightarrow\ x=-2-\sqrt{10}$.

Ответ: $-2-\sqrt{10}$.

Метод подстановки

В некоторых случаях логарифмическое уравенение можно свести к алгеброическому уравнению относительно новой переменной. Например, уравнение $F(\log_a x)=0$, где $F(x)$ – алгебраическая рациональная функция, посредством подстановки сводится к алгебраическому уравнению относительно $t: R(t)=0$.

Задача №15. Решить уравнение:

a) $\lg^2 x-3\lg x+2=0$;
b) $\log_2^2(x-1)^2-3\log_2(x-1)-1=0$;
c) $\lg^2 100x+\lg^2 10x+\lg x=14$;

$d) 5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$.

Решение:

$a)$ ОДЗ уравнения есть множество $x \in (0; +\infty)$. Обозначив $\lg x = t$ (тогда $\lg^2 x = (\lg x)^2 = t^2$), получим: $t^2 - 3t + 2 = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. Следовательно, $\left[\begin{array}{l} \lg x = 1 \\ \lg x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow\; x_1 = 10,\; x_2 = 100$. Оба корня входят в ОДЗ.

Ответ: 10; 100.

$b)$ ОДЗ уравнения — множество $(1; +\infty)$, поскольку $\log_2^2(x-1)^2 = (\log_2(x-1)^2)^2 = (2\log_2(x-1))^2 = 4(\log_2(x-1))^2$, сделаем замену, $t = \log_2(x-1) \;\Rightarrow\; 4t^2 - 3t - 1 = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = -\dfrac{1}{4}$ и $t_2 = 1 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \log_2(x-1) = -\dfrac{1}{4} \\ \log_2(x-1) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = -2^{\frac{1}{4}} \\ x - 1 = 2^1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ x = 3 \end{array}\right.$

Ответ: $3; 1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

$c)$ ОДЗ уравнения: $x \in (0; +\infty)$, т.к. $\lg^2 100x = (\lg 100x)^2 = (\lg 100 + lgx)^2 = (2 + \lg x)^2$, $\lg^2 10x = (\lg 10x)^2 = (\lg 10 + \lg x)^2 = (1 + \lg x)^2$, подстановкой $t = \lg x$ сведем исходное уравнение к квадратному уравнению $(2+t)^2 + (1+t)^2 + t = 14$ или $t^2 + 7t - 9 = 0$, откуда $t_1 = -\dfrac{9}{2}$ и $t_2 = 1$. Возвращаясь к исходной переменой, получим $x_1 = 10^{-\frac{9}{2}}$ и $x_2 = 10$.

Ответ: 10; $10^{-\frac{9}{2}}$.

$d)$ ОДЗ уравнения — множество $x \in (0;1) \cup (1; +\infty)$,поскольку $x^{\lg 5} = x^{\frac{\log_x 5}{\log_x 10}} = (x^{\log_x 5})^{\frac{1}{\log_x 10}} = 5^{\frac{1}{\log_x 10}} = 5^{\lg x}$, уравнение примет вид $5^{\lg x} = 50 - 5^{\lg x}$ или $2 \cdot 5^{\lg x} = 50 \;\Rightarrow\; \lg x = 2 \;\Leftrightarrow\; x = 100$

Ответ: 100.

Уравнение, содержащие выражения вида $f(x)^{\log_a g(x)}$

Задача №16. Решить уравнения

$a)(x+2)^{\log_2(x+2)} = 4(x+2)$;
$b)5^{\log_2 x} + x^{\log_2 5} = 10$.

Решение:

a) ОДЗ уравнения определяется из системы

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x+2 \neq 1 \end{cases}$$

Получим множество $x \in (-2;-1) \cup (-1;+\infty)$. В ОДЗ обе части уравнения положительны, потому, логарифмируя обе части уравнение $\log_2(x+2)^{\log_2(x+2)} = \log_2(4(x+2))$ или $\log_2(x+2)\cdot\log_2(x+2) = \log_2 4 + \log_2(x+2)$. Пусть $\log_2(x+2) = t$, получим $t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow$ $t_1 = -1,\ t_2 = 2 \ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(x+2) = -1 \\ \log_2(x+2) = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{3}{2} \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$
Оба корня входят в ОДЗ.

Ответ: $-\dfrac{3}{2}; 2$.

b) ОДЗ уравнения — множество $X \in (0;1)\cup(1;+\infty)$, имеем, $5^{\log_2 x} = 5^{\dfrac{\log_2 x}{\log_5 2}} = \left(5^{\log_2 x}\right)^{\dfrac{1}{\log_5 2}} = x^{\log_2 5}$, тогда $x^{\log_2 5} + x^{\log_2 5} = 10$ или $x^{\log_2 5} = 5$. Логарифмируя обе части уравнения по основанию 2, получим $\log_2 x^{\log_2 5} = \log_2 5 \ \Rightarrow\ \log_2 x = 1 \ \Rightarrow\ x = 2$

Ответ: 2.

Логарифмические неравенства

Неравенство, содержащее неизвестное под знаком логарифма или в его основании называется логарифмическим неравенством. В процессе решения логарифмических неравенств часто используются следующие утверждения относительно равносильности неравенств и учитываются свойства монотонности логарифмической функции.

Утверждение 1. Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств: $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Утверждение 2. Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств: $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Утверждение 3. Неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ равносильно совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Замечание: Все эти три утверждения эквивалентны следующей системе:

$$\begin{cases} (h-1)(f-g) > 0 \\ h > 0, f > 0, g > 0 \end{cases}$$

Это так называемый метод интервалов.

Задача №17. Решить неравенства:

$a)$ $\log_3(x^2 - x) \geqslant \log_3(x+8)$;

$b)$ $\log_{0,2}(5-x) > \log_{0,2} \dfrac{2}{x-2}$;

$c)$ $\log_2(\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)) > 0$;

$d)$ $\log_{\frac{x+2}{x-3}}(5-x) > \log_{\frac{x+2}{x-3}}(4-x)$;

$e)$ $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$.

Решение:

$a)$ $\log_3(x^2-x) \geqslant \log_3(x+8) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2-x \geqslant x+8 \\ x+8>0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leqslant -2 \\ x \geqslant 4 \end{array}\right. \\ x>-8 \end{cases} \;\Leftrightarrow$

Ответ: $x \in (2;3] \cup [4;+\infty)$.

$b)$ $\log_{0,2}(5-x) > \log_{0,2}\dfrac{2}{x-2} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 5-x<\dfrac{2}{x-2} \\ 5-x>0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dfrac{7x-x^2-12}{x-2}<0 \\ x<5 \end{cases} \;\Leftrightarrow$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2<x<3 \\ \quad\; x>4 \end{array}\right. \\ x<5 \end{cases} \;\Leftrightarrow$

Ответ: $x \in (2;3) \cup (4;+\infty)$.

$c)$ Запишем $0=\log_2 1$, получим $\log_2(\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)) > \log_2 1 \;\Leftrightarrow\; \log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x) >$ 1, $1=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x) > \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \log_8 x<\frac{1}{3} \\ \log_8 x>0 \end{cases} \;\Leftrightarrow$

$\begin{cases} 0<x<8^{\frac{1}{3}} \\ x>1 \end{cases} \;\Leftrightarrow$

Ответ: $x \in (1;2)$.

$d)$ Имеем: $\log_{\dfrac{x+2}{x-3}}(5-x) > \log_{\dfrac{x+2}{x-3}}(4-x) \;\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-3}>1 \\ 5-x>4-x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<\frac{x+2}{x-3}<1 \\ 0<5-x<4-x \end{cases} \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x \in (3;4) \\ x \in \varnothing \end{array}\right.$$

Заметим, этот же пример можно решить проще, через метод интервалов. Согласно замечанию выше, получим:

$$\begin{cases} 5-x>0, \;\; 4-x>0 \\ \left(\dfrac{x+2}{x-3}-1\right)(5-x-4+x)>0 \quad \Rightarrow \quad x\in(3;4) \\ \text{ОДЗ} \end{cases}$$

Ответ: $(3;4)$.

e) Запишем $1=\log_{2x}2x \quad \Rightarrow \quad \log_{2x}(x^2-5x+6)<\log_{2x}2x \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x>1 \\ x^2-5x+6<2x \\ x^2-5x+6>0 \end{cases} \quad \text{или} \begin{cases} 0<2x<1 \\ x^2-5x+6>2x \\ 2x>0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

Ответ:$x\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup(1;2)\cup(3;6)$.

Неравенства вида $F(\log_a x)>0$ сводятся подстановкой $t=\log_a x$ к алгебраическому неравенству.

Задача №18. Решить неравенства: $a)\log^2_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} x\geqslant 0$;

$b)\dfrac{1}{5-\lg x}+\dfrac{2}{5+\lg x}<1$.

Решение:

a) Обозначив $t=\log_{\frac{1}{2}} x$, получим $t^2+t-2\geqslant 0$, откуда $t\leqslant -2$ или $t\geqslant 1$, таким образом:

$$\left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} x\leqslant -2 \\ \log_{\frac{1}{2}} x\geqslant 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant (\frac{1}{2})^{-2} \\ 0<x<(\frac{1}{2})^{1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant 4 \\ 0<x<\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[4;+\infty\right)$.

b) Обозначив $t = \lg x$, получим рациональное неравенство:

$$\frac{1}{5-t} + \frac{2}{5+t} < 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{(t-2)(t-3)}{(5-t)(t+1)} < 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} t < -1 \\ 2 < t < 3 \\ t > 5 \end{array}\right. .$$

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{10}\right] \cup \left[100; 1000\right) \cup \left(10^5; +\infty\right)$.

<u>Задача №19.</u>

Решить неравенства: $a) \lg(x-2) + \lg(x-5) < \lg 4;$

$b) \log_{9x} 3x + \log_{3x^2} 9x^2 \leqslant \dfrac{5}{2};$

$c) \dfrac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)} > \dfrac{1}{2};$.

$d) \dfrac{1}{\log_2(x-1)} < \dfrac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}.$

Решение:

a) ОДЗ неравенства — множество $(5; +\infty)$, имеем:

$$\lg(x-2)(x-5) < \lg 4 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (x-2)(x-5) < 4 \\ (x-2)(x-5) > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 1 < x < 6 \\ \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 5 \end{array}\right. \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$x \in (1; 2) \cup (5; 6)$, с учетом ОДЗ получим ответ.

Ответ: $(5; 6)$.

b) ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} 3x > 0 \\ 9x > 0 \\ 9x \neq 1 \\ 3x^2 > 0 \\ 3x^2 \neq 1 \\ 9x^2 > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \dfrac{1}{9} \\ x \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x \in \left(0; \frac{1}{0}\right) \cup \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup$$

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$. Приведя логарифмы к основанию 3, получим:

$$\frac{\log_3 3x}{\log_3 9x} + \frac{\log_3 9x^2}{\log_3 3x^2} \leqslant \frac{5}{2}$$

$$\frac{1+\log_3 x}{2+\log_3 x}+\frac{2+2\log_3 x}{1+2\log_3 x}\leqslant\frac{5}{2}$$

Обозначим $t=\log_3 x$, получим:

$$\frac{1+t}{2+t}+\frac{2+2t}{1+2t}\leqslant\frac{5}{2}\ \Leftrightarrow\ \frac{t(2t+7)}{(2+t)(1+2t)}\geqslant 0\ \Leftrightarrow\ t\in(-\infty;-7/2]\cup(-2;-\frac{1}{2})\cup[0;+\infty)$$

Следовательно:

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 x\leqslant-\dfrac{7}{2}\\ -2<\log_3 x<-\dfrac{1}{2}\\ \log_3 x\geqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}0<x\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{37}}\\ \dfrac{1}{9}<x<\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ x\geqslant 1\end{array}\right.$$

Откуда, учитывая ОДЗ, получим множество решений исходного неравенства:

Ответ: $x\in\left(0;\dfrac{1}{27\sqrt{3}}\right]\cup\left(\dfrac{1}{9};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left[1;+\infty\right).$

c) Определим ОДЗ неравенства:

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{4x+5}-1>0\\ \sqrt{4x+5}+11>0\\ \sqrt{4x+5}+11\neq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{l}x>-1\\ x\geqslant-\dfrac{5}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\ x>-1.$$

Поскольку $\log_2(\sqrt{4x+5}+11)=\log_2(1+(\sqrt{4x+5}+10))>\log_2 1=0$, неравенство равносильно следующему:

$$2\log_2(\sqrt{4x+5}-1)>\log_2(\sqrt{4x+5}+11)$$

Откуда следует $(\sqrt{4x+5}-1)^2>\sqrt{4x+5}+11$. Обозначив $t=\sqrt{4x+5},\ t\geqslant 0$, получим $(t-1)^2>t+11$ или $t^2-3t-10>0\ \Rightarrow\ t<-2$ или $t>5$. Поскольку $t>0$, то $t>5$ или $\sqrt{4x+5}>5\ \Leftrightarrow\ x>5$

Ответ: $(5;+\infty)$.

d) ОДЗ неравенства есть множество $(1;2)\cup(2;+\infty)$. Используя метод интервалов, получим:

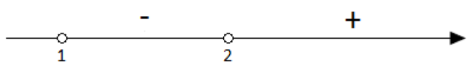
$$\frac{1}{\log_2(x-1)}<\frac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}$$

$$\frac{\log_2\sqrt{x+1}-\log_2(x-1)}{\log_2(x-1)\log_2\sqrt{x+1}}<0$$

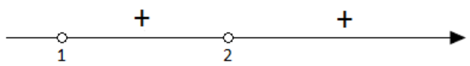
$$\frac{\log_2\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}}{\log_2(x-1)\log_2\sqrt{x+1}}<0$$

$$\log_2\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}\cdot\log_2(x-1)\cdot\log_2\sqrt{x+1}<0$$

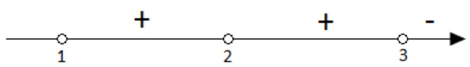
Т.к. в ОДЗ $\log_2(x-1)>0$ при $x>0$ и $\log_2(x-1)<0$ при $1<x<2$, то $\log_2\sqrt{x+1}>0,\ x\in$ ОДЗ, $\log_2\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}>0$ при $x\in(1;2)\cup(2;3)$ и $\log_2\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}<0$ при $x>3$, значит:



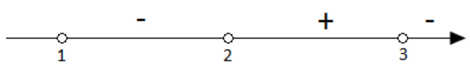
$\log_2(x-1)$



$\log_2\sqrt{x+1}$



$\log_2\frac{x+1}{x-1}$



$\log_2\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}\cdot\log_2(x-1)\cdot\log_2\sqrt{x+1}$

В итоге получим ответ.

Ответ: $x\in(1;2)\cup(3;+\infty)$.

Метод потенциирования и логарифмирования

Основная идея этих методов заключается в следующем: если $a=b$, где $a,b>0$, то $c^a=c^b$ или $\log_c a=\log_c b$, где $c>0, c\neq1$. При этом вместо чисел a и b могут стоять выражения $f(x)$ и $g(x)$.

Замечание: можно несколько расширить этот метод на случай произвольных функций $a(x)$ и $b(x)$, получим:

$$a(x)^{b(x)} < a(x)^{c(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a(x)-1)(b(x)-c(x)) < 0 \\ a(x) > 0, a(x) \neq 1 \end{cases}$$

однако условие $a(x) \neq 1$ иногда бывает лишним, но это уже зависит от формулировки задачи. Рассмотрим эти методы на некоторых примерах.

Задача №20. Решить неравенства

$a) x^{\log_2 x} = 64x;$

$b) x^{2\lg x^3 - 3\lg x} = 0,1;$

$c) \frac{1}{4} x^{\log_4 x} = 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x};$

$d) \begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 8 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases};$

$e) \begin{cases} 2^{2\log_2 x} + 3^{2\log_3 y} = 8 \\ 2^{2\log_{\frac{1}{2}} x} + 3^{2\log_{\frac{1}{3}} y} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Решение:

$a)$ ОДЗ: $x > 0,\ x \neq 1$, т.к. обе части уравнения положительны при $x > 0$, то прологарифмируем по основанию 2 обе части $\Rightarrow\ \log_2^2 x = \log_2 2^6 + \log_2 x = 6 + \log_2 x$. Пусть $t = \log_2 x$, тогда $t^2 - t - 6 = 0\ \Rightarrow$

$$t_1 = 3,\ t_2 = -2\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 3 \\ \log_2 x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{1}{4}; 8.$

$b)$ Т.к. $x > 0,\ x \neq 1$, то прологарифмируем по основанию 10 обе части уравнения $\Rightarrow\ (2\lg_x^3 x - 3\lg x)\lg x = -1\ \Leftrightarrow\ 2\lg^4 x - 3\lg^2 x + 1 = 0$. Пусть $t = \lg^2 x,\ t \geqslant 0\ \Rightarrow\ 2t^2 - 3t + 1 = 0\ \Rightarrow\ t_1 = 1,\ t_2 = \frac{1}{2}\ \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \lg^2 x = 1 \\ \lg^2 x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = 0,1 \\ x = 10^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ x = -10^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{array}\right.$$

Ответ: $10; 0,1; 10^{\frac{1}{\sqrt{2}}}; -10^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

c)Т.к. $x > 0,\ x \neq 1$, то прологарифмируем по основанию 2 $\Rightarrow$ $\log_2 \dfrac{1}{4} + \log_2 x \cdot \log_2 x = \dfrac{\log_2 2 \cdot \log_2^2 x}{4} \Leftrightarrow -8 + 4\log_2 x \log_4 x = \log_2^2 x$, $(\log_4 x = \dfrac{\log_2 x}{2}) \Rightarrow \log_2^2 x - 2\log_2^2 x + 8 = 0 \Rightarrow \log_2 x = \pm 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2^{2\sqrt{2}} \\ x = 2^{-2\sqrt{2}} \end{array}\right.$

Ответ: $4^{\sqrt{2}}; 4^{-\sqrt{2}}$.

d) Покажем, что $x^{\log_8 y} = y^{\log_8 x}$, т.к. по ОДЗ: $x > 0,\ x \neq 1$ и $x > 0,\ x \neq 1$, то пусть это равенство верно, тогда верно и $\log_8(x^{\log_8 y}) = \log_2(y^{\log_8 x})$ – ч.т.д. Тогда первое уравнение примет вид: $x^{\log_8 y} = 4$, то прологарифмируем по основанию 4 $\Rightarrow$ $\log_4 x \log_8 y = \log_4 4$ $(\log_4 4 = 1,\ \log_8 y = \dfrac{\log_4 y}{\log_4 8})$. Имеем:

$$\begin{cases} \log_4 x \log_4 y = \dfrac{3}{2} \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$$

Пусть $a = \log_4 x$ и $b = \log_4 y$, тогда $\begin{cases} ab = \frac{3}{2} \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = \frac{1}{2}(1-\sqrt{7}) \\ b = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{7}) \end{cases} \\ \begin{cases} a = \frac{1}{2}(1+\sqrt{7}) \\ b = \frac{1}{2}(\sqrt{7}-1) \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_4 x = \frac{1}{2}(1-\sqrt{7}) \\ \log_4 y = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{7}) \end{cases} \\ \begin{cases} \log_4 x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{7}) \\ \log_4 y = \frac{1}{2}(\sqrt{7}-1) \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{7})} \\ y = 4^{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{7})} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{7})} \\ y = 4^{\frac{1}{2}(\sqrt{7}-1)} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2^{1-\sqrt{7}}; 2^{-1-\sqrt{7}}); (2^{1+\sqrt{7}}; 2^{\sqrt{7}} - 1)$.

e) Первое уравнение системы эквивалентно: $2^{\log_2 x^2} + 3^{\log_3 y^2} = 8,\ x > 0,\ y > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8$, во втором преобразуем $\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$

и $\log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{2}$. Имеем: $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x^2y^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ y^2=4 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$$

Ответ: $(2;2)$.

Покажем ещё один пример, в котором удобно использовать метод логарифмирования.

Задача №21.

Пусть функции $u = u(x)$; $v = v(x)$ — дифференцируемы по x для любого $x \in \mathbb{R}$. Найти производную функции $u(x)^{v(x)} = y(x) = u^v$, $y'-?$

Решение:

Прологарифмируем обе части по основанию e — основание натурального логарифма: $\ln y = v \ln u$. Теперь продифференцируем обе части уравнения по $x \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = v' \ln u + \dfrac{v}{u}u' \Rightarrow y' = y(v' \ln u + \dfrac{v}{u}u') = u^v(v' \ln u + \dfrac{v}{u}u')$. Тем самым мы получили самую общую формулу для производной функции $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$. Приведем некоторые примеры её использования:

(a) $\begin{matrix} u \equiv a = const \\ v = x \end{matrix} \Rightarrow y = u^v = a^x$ и $y' = a^x \ln a$

(b) $\begin{matrix} u \equiv e \\ v = x \end{matrix} \Rightarrow y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

(c) $\begin{matrix} u = x \\ v = x \quad x > 0 \end{matrix} \Rightarrow y = x^x \Rightarrow y' = x^x(\ln x + 1)$

Ответ: $y' = u^v(v' \ln u + \dfrac{v}{u}u')$.

Некоторые особые задачи и приёмы решения

Задача №22. Решить систему:

$$\begin{cases} \log_2(x^2+1)+\log_2(y^2+1)=4 \\ x^2+y^2=2\cos^2 z+4 \end{cases}$$

Решение:

Преобразуем 1-ое уравнение: $\log_2(x^2+1)(y^2+1)=\log_2 16 \Leftrightarrow (x^2+1)(y^2+1)=16$. Пусть $a=x^2+1$ и $b=y^2+1$, где $a\geqslant 1$ и $b\geqslant 1$.
Преобразуем 2-ое уравнение: $a+b=2\cos^2 z+6=\cos 2z+7$
Имеем:

$$\begin{cases} ab=16 \\ a+b=\cos 2z+7 \end{cases}$$

$\Rightarrow\ a+\dfrac{16}{a}=\cos 2z+7 \ \Rightarrow\ a^2-(\cos 2z+7)a+16=0,\ D=(\cos 2z+7)^2-64\geqslant 0$ (чтобы были решения), а т.к. $|\cos 2z|\leqslant 1$, то $D\leqslant 0 \ \Rightarrow$ чтобы были решения, $\cos 2z=1 \ \Rightarrow\ z=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, тогда:

$$\begin{cases} ab=16 \\ a+b=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=3 \\ y^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ y=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt{3};\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3};-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3};\sqrt{3})$.

Задача №23. Решить систему: $\begin{cases} \dfrac{\log_5(5x-3y-1)}{\log_5(2y-x-3)}=\dfrac{\log_2(5+4y-3x)-1}{\log_2(3x-y+1)} \\ 2x^2+y^2=3xy+x+1 \end{cases}$

Решение:

1) Найдем решения 2-го уравнения: $2x^2-x(2y+1)+y^2-1=0,\ D=y^2+6y+9=(y+3)^2 \ \Rightarrow\ x=y+1$ или $2x+1=y$
2) Преобразуем 1-е уравнение к виду:

$$\log_{(2y-x-3)}(5x-3y-1)=\frac{\log_2(5+4y-3x)-1}{\log_2(3x-y+1)}$$

Если $x = y + 1$, то $\log_{(2y-x-3)}(5x - 3y - 1) = \log_{(y+2)}(2y + 4) = 1 + \log_{y+2} 2 \equiv \dfrac{\log_2(5 + 4y - 3x) - 1}{\log_2(3x - y + 1)} = \dfrac{\log_2(y + 2) - 1}{\log_2(2y + 4)} = \dfrac{\log_2(y + 2) - 1}{\log_2(y + 2) + 1}$.
Имеем:

$$1 + \log_2 2 = \frac{\log_2(y + 2) - 1}{\log_2(y + 2) + 1},\ \log_{(y+2)} 2 = \frac{1}{\log_2(y + 2)}$$

Пусть $t = \log_2(y+2) \ \Rightarrow\ 1+\dfrac{1}{t} = \dfrac{t-1}{t+1} \ \Leftrightarrow\ 3t+1 = 0 \ \Rightarrow\ t = -\dfrac{1}{3} \ \Leftrightarrow$ $\log_2(y + 2) = -\dfrac{1}{3} \ \Rightarrow\ \begin{cases} y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} - 2 \\ x = -1 + \sqrt[3]{2} \end{cases}$.
С учетом ОДЗ видим, что это решение подходит. Если $y = 2x + 1$, то $5x - 3y - 1 = -x - 4$ и $3x - y + 1 = x$. Т.к. неравенства $-x - 4 > 0$ и $x > 0$ несовместны, то в этом случае решений нет.

Ответ: $\left(-1 + \sqrt[3]{2}; \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} - 2\right)$.

<u>**Задача №24.**</u> Найдите значение $\log_2 \dfrac{x}{2^x}$, если $|\log_{\sqrt{2}} x^{\frac{x}{2}} - 2\log_2 x| + |\,|2 - x| - |\log_2 x|\,| \leqslant (x - 2)\log_8 x^3$

Решение:

$|x\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x} - 2\log_2 x| + |\,|x - 2| - |\log_2 x|\,| \leqslant (x - 2)\log_2 x$;
$|(x-2)\log_2 x| + |\,|x-2| - |\log_2 x|\,| \leqslant (x-2)\log_2 x$ (после преобразований). Пусть $x - 2 = a$, $\log_2 x = b$, тогда наше неравенство примет вид: $|ab| + \big||a + b|\big| \leqslant ab \ \Rightarrow\ |a| = |b|$. Т.к. $|a| = |b|$, то $(a-b)(a+b) = 0$, а т.к. a и b одного знака, то имеет место лишь случай $a = b$, т.е. $x-2 = \log_2 x,\ \log_2 x - x = -2,\ \log_2 x - \log_2 2^x = -2,\ \log_2\left(\dfrac{x}{2^x}\right) = -2$

Ответ: $\log_2(\dfrac{x}{2^x}) = -2$.

<u>**Задача №25.**</u> Решить неравенство: $\log_{\frac{x+5}{x+1}}(x+25) \leqslant \log_{\frac{x+5}{x+1}}\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^2$

Решение:

ОДЗ имеет вид: $\begin{cases} \dfrac{x+5}{x+1} > 0 \\ x+5 \neq x+1 \\ x > -25 \end{cases} \Leftrightarrow \ x \in (-25; -5) \cup (-1; +\infty).$

Перепишем неравенство в виде: $\log_{\frac{x+5}{x+1}}(\dfrac{(x+25)(x+1)^2}{(x+5)^2}) \leqslant 0.$

Покажем, как можно быстро и легко решить это неравенство: пусть $\log_{f(x)} g(x) \leqslant 0$

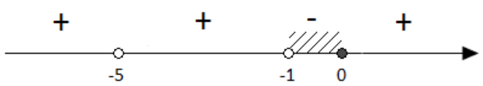
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)-1 > 0 \\ g(x)-1 \leqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)-1 < 0 \\ g(x)-1 \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \ (f(x)-1)(g(x)-1) \leqslant 0$$

т.е. мы получили неравенство, которое эквивалентно совокупности данных систем; воспользуемся им в нашем случае:

$$\left(\frac{x+5-x-1}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{(x+25)(x+1)^2-(x+5)^2}{(x+5)^2}\right) \leqslant 0$$

$$4\frac{(x^2+2x+1)(x+25)-x^2-10x-25}{(x+1)(x+5)^2} \leqslant 0$$

$$\frac{x(x^2+x+41)}{(x+1)(x+5)^2} \leqslant 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{x}{(x+1)(x+5)^2} \leqslant 0$$



$\Rightarrow \ x \in (-1; 0]$

Ответ: $(-1; 0]$.

Задача №26. Решить неравенство:

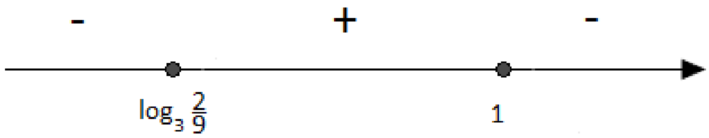
$$\frac{10^x}{2\log_2^2(x+1)^2\log_3(x+2)} \leqslant \frac{(15 \cdot 3^x)^x}{9 \cdot \log_2^2(x+1)^2\log_3(x+2)}$$

Решение:

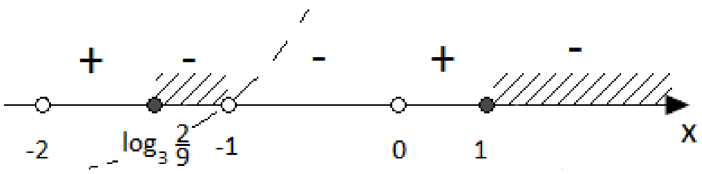
1) ОДЗ: $x \in (-2; -1) \cup (-1; +\infty)$.
2) Перепишем неравенство в виде:

$$\frac{9 \cdot 10^x - 2(15 \cdot 3^x)^x}{\log_2^2(x+1)^2 \log_3(x+2)} \leqslant 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{9 \cdot 10^x - 2(15 \cdot 3^x)^x}{\log_3(x+2)} \leqslant 0$$

Изучим числитель: $\dfrac{9}{2} = \left(\dfrac{3^{x+1}}{2}\right)^x$; логарифмируя по основанию 3 $\Rightarrow$ $\log_3 9 - \log_3 2 = x(\log_3 3^{x+1} - \log_3 2)$ $\Leftrightarrow$ $2 - \log_3 2 = x(x+1) - x\log_3 2$ $\Leftrightarrow$ $x^2 + x(1 - \log_3 2) + \log_3 2 - 2 = 0$, $D = 1 - 2\log_3 2 + \log_3^2 2 - 4\log_3 2 + 8 = \log_3^2 2 - 6\log_3 2 + 9 = (\log_3 2 - 3)^2$ $\Rightarrow$
$x_{1,2} = \dfrac{\log_3 2 - 1 \pm (\log_3 2 - 3)}{2}$ $\Rightarrow$ $x_1 = \log_3 \dfrac{2}{9}$ или $x_2 = 1$.
Следовательно, $\left[9 - 2\left(\dfrac{3 \cdot 3^x}{2}\right)^x\right]$:



В итоге имеем,



$\Rightarrow$ $x \in [\log_3 \dfrac{2}{9}; -1) \cup [1; +\infty)$

Ответ: $\left[\log_3 \dfrac{2}{9}; -1\right) \cup \left[1; +\infty\right)$.

Задача №27. Решить неравенство:

$$\sqrt{\log_4(21 - 5 \cdot 4^{2-x^2})} > x \tag{3}$$

Решение:

1) ОДЗ: $\log_4(21-5\cdot 4^{2-x^2})\geqslant 0 \;\Rightarrow\; 21-5\cdot 4^{2-x^2}\geqslant 1,\; 4^{2-x^2}\leqslant 4 \;\Rightarrow$ $|x|\geqslant 1$
2) Преобразуем неравенство $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_4(21-5\cdot 4^{2-x^2})>x^2 \\ x\geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_4(21-5\cdot 4^{2-x^2})\geqslant 0 \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Решением 2-ой системы будет множество

$$\begin{cases} |x|\geqslant 1 \\ x\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow\; x\leqslant -1$$

Займемся 1-ой системой:
$\log_4(21-5\cdot 4^{2-x^2})>\log_4 4^{x^2} \;\Leftrightarrow\; 21-5\cdot 4^{2-x^2}>4^{x^2}$, пусть $t=4^{x^2},\; t>0$, тогда $t^2-21t+80<0,\; D=441-320=121 \;\Rightarrow\; t_{1,2}=\dfrac{21\pm 11}{2}=5;16 \;\Rightarrow\; 5<t<16 \;\Leftrightarrow\; 5<4^{x^2}<16$ ($4^{x^2}=5 \;\Rightarrow\; x=\sqrt{\log_4 5}$; $4^{x^2}=16 \;\Rightarrow\; x=\sqrt{2} \;\Rightarrow\; \sqrt{\log_4 5}<x<\sqrt{2}$)

Ответ:$(-\infty;-1]\cup(\sqrt{\log_4 5};\sqrt{2})$.

Задача №28*. Решить неравенство:

$$\sqrt{\log_{\frac{x+3|x|}{2}}(4x^2+3)+\frac{1}{\sqrt{|x|}}}\leqslant \log_{\frac{x+3|x|}{2}}(4x^2+3)$$

Решение:

Пусть $x>0$, тогда исходное неравенство примет вид:

$$\sqrt{\log_{2x}(4x^2+3)+\frac{1}{\sqrt{x}}}\leqslant \log_{2x}(4x^2+3) \tag{4}$$

Если $0<x<\frac{1}{2}$, то правая часть (4) отрицательна, а левая либо не определена, либо неотрицательна, в этом случае неравенство (4) не имеет решений. Если $x > \frac{1}{2}$, то неравенство (4) равносильно неравенству

$$t + \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant t^2 \qquad (5)$$

где $t = \log_{2x}(4x^2+3) > \log_{2x} 4x^2 = 2$, т.е. $t > 2$. Но если $t > 2$, то $t^2 > 2t$, кроме того, $\dfrac{1}{\sqrt{x}} < \sqrt{2}$ при $x > \dfrac{1}{2}$, поэтому $t + \dfrac{1}{\sqrt{x}} < t + \sqrt{2} < 2t < t^2$, откуда следует, что неравенство (5) является верным при $x > \dfrac{1}{2}$.

Пусть теперь $x < 0$, тогда исходное неравенство примет вид:

$$\sqrt{\log_{-x}(4x^2+3) + \frac{1}{\sqrt{-x}}} \leqslant \log_{-x}(4x^2+3)$$

или

$$\sqrt{\log_{t}(4t^2+3) + \frac{1}{\sqrt{t}}} \leqslant \log_{t}(4t^2+3) \qquad (6)$$

где $t > 0,\ t \neq 1$. Если $0 < t < 1$, то неравенство (6) не имеет решений. Пусть $t > 1$, в этом случае обе части (6) положительны и неравенство (6) равносильно неравенству

$$u + \frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant u^2 \qquad (7)$$

где $u = \log_t(4t^2+3) > \log_t t^2 = 2$, $\dfrac{1}{\sqrt{t}} < 1$, отсюда следует, что $u^2 > 2u > u + \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ и поэтому неравенство (4) является верным при всех $t > 1$, т.е. при $-x > 1$, откуда $x < -1$.

Ответ: $\Big(-\infty; -1\Big) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

14. Вычислить:

(a) $\dfrac{5\log_4 3 \log_4 12 - 2\log_4^2 3 - 3\log_4^2 12}{2\log_4 3 - 3\log_4 12}$

(b) $\log_3(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}) - \log_3(1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8})$

(c) $\log_{\sqrt{2}}(\sin\frac{\pi}{8}) + \log_{\sqrt{2}}(2\cos\frac{\pi}{8})$

15. Доказать тождество: $(m^k)^{\log_p q} = q^{\log_p m^k}$, m, p, q, k – положительные числа, отличные от 1.

16. Найти координаты центра симметрии графика функции

$$y = x + \lg(\frac{x^2+2x}{x^2+10x+24})$$

17. Доказать тождество: $\frac{1}{\log_a k} + \frac{1}{\log_{a^2} k} + \frac{1}{\log_{a^3} k} + \frac{1}{\log_{a^4} k} + \frac{1}{\log_{a^5} k} = 15\log_k a$

18. Решить неравенство: $\dfrac{2}{\log_{3+x}(6-4x-2x^2)} \leqslant \frac{1}{2-\log_{2-2x}(3+x)}$

19. Найти все пары $x, y \in \mathbb{R}$, для которых справедливо равенство:

$$\log_{5\sqrt{y+2x}}(5^{\sqrt{y+2x}}) - \sqrt{-2x\sqrt{y}-1} = 4^{\sqrt{y-2x-2\sqrt{y}}}$$

20. Решить неравенство: $\log_7 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1-4|x|}{|x|-7x^2} \leqslant 0$

21. Решить неравенство: $\sqrt{3\lg^2 x^2 + \lg^2(x+2)} > \lg x^2 + \lg(x+2)$

22. Решить неравенство: $\dfrac{1}{|\log_3(9x)|-3} \leqslant \dfrac{1}{|\log_9 x^2|-1}$

23. Решить уравнение:

$$\log_2(4\cos x+3)\cdot\log_6(4\cos x+3) = \log_2(4\cos x+3) + \log_6(4\cos x+3)$$

24. Решить неравенство: $x\log_{\frac{1}{2}}(\frac{5}{2} - 2^{\frac{1}{x}}) > 1$

Дополнительные задачи

1. Решить неравенство:

$$(x^2+x+1)^x \leqslant 1 \tag{8}$$

Решение:

$$(8) \Leftrightarrow \quad a^x \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 1 \\ x \leqslant 0 \end{array} \right. \text{или} \left\{ \begin{array}{l} 0 < a < 1 \\ x \geqslant 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)x \leqslant 0,$$

откуда: $x^2(x+1) \leqslant 0 \;\Rightarrow\; x \in (-\infty; -1] \cup 0$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup 0$.

2. Решить неравенство:

$$2 + \log_{\sqrt{x^2-2x-3}} \frac{x+4}{x+1} \geqslant \log_{x^2-2x-3}(x^2-2x-2)^2 \tag{9}$$

Решение

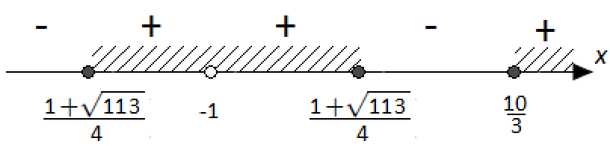
$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2-2x-3 > 0 \\ x^2-2x-3 \neq 1 \\ \dfrac{x+4}{x+1} > 0 \\ x^2-2x-2 \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \; x \in (-\infty; -4) \cup (3; 1+\sqrt{5}) \cup (1+\sqrt{5}; +\infty)$.

Преобразуем неравенство (9) к виду:

$$\log_{x^2-2x-3} \frac{(x^2-2x-3)^2(x+4)^2}{(x^2-2x-2)^2(x+1)^2} \geqslant 0$$

$\Rightarrow \; [(x^2-2x-3)-1] \cdot \left[\dfrac{(x^2-2x-3)^2(x+4)^2}{(x^2-2x-2)^2(x+1)^2} - 1 \right] \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; (3x^2-7x+10)(2x^3+x^2-15x-14) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; (x-\dfrac{10}{3})(x+1)^2(x-\dfrac{1+\sqrt{113}}{4})(x-\dfrac{1-\sqrt{113}}{4}) \geqslant \Rightarrow$



$\Rightarrow$ с учетом ОДЗ: $x \in \left[\dfrac{10}{3}; +\infty\right)$

Ответ: $\left[\dfrac{10}{3}; +\infty\right)$.

3. Решить неравенство:

$$\log_{0,5-|2x^2-5x+2|}(0,5+|8x^2-2x-1|) \geqslant 1 \qquad (10)$$

Решение:
Заметим, что основание всегда меньше 1.
$|2x^2-5x+2| < 0,5 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} 4x^2-10x+3<0 \\ 4x^2-10x+5>0 \end{cases} \ \Rightarrow$

$x \in \left(\dfrac{5-\sqrt{13}}{4}; \dfrac{5-\sqrt{5}}{4}\right) \cup \left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}; \dfrac{5+\sqrt{5}}{4}\right)$

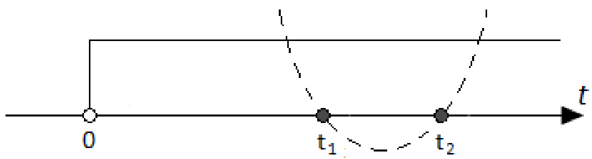
Преобразуем (10) к виду: $\log_{0,5-|2x^2-5x+2|}(0,5+|8x^2-2x-1|) \geqslant \log_{0,5-|2x^2-5x+2|}(0,5+|2x^2-5x+2|) \ \Leftrightarrow \ 0,5+|8x^2-2x-1| \leqslant 0,5-|2x^2-5x+2| \ \Leftrightarrow \ |2x^2-5x+2|+|8x^2-2x-1| \leqslant 0 \ \Leftrightarrow$
$\begin{cases} 2x^2-5x+2=0 \\ 8x^2-2x-1=0 \end{cases} \ \Rightarrow \ x=\dfrac{1}{2}$ с учетом ОДЗ.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

4. При всех d решить неравенство: $4^x - d \leqslant 2^{x+2}$

Решение:

$2^{2x} - 4\cdot 2^x - d \leqslant 0$, пусть $t = 2^x, t>0 \ \Rightarrow \ t^2-4t-d \leqslant 0; D/4 = 4+d \ \Rightarrow \ t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+d}$.



Если $d < -4$, то $x \in \varnothing,\ x_{1,2} = \log_2(2 \pm \sqrt{4+d})$.
Если $d = -4$, то $x = 1$.
Если $d \in (-4; 0)$, то $x \in [\log_2(2 - \sqrt{4+d}); \log_2(2 + \sqrt{4+d})]$.
Если $d = 0$, то $x \in (-\infty; 2]$.
Если $d > 0$, то $x \in (-\infty; \log_2(2 + \sqrt{4+d})]$.

5. Решить неравенство:

$$\log_{\frac{1}{3}}(5^{1+\log_{15} x} - \frac{1}{3^{1+\log_{15} x}}) \geqslant -1 + \log 15x$$

Решение:

$\log_{\frac{1}{3}}(\dfrac{15x-1}{3^{1+\log_{15} x}}) \geqslant \log 15x - 1.$
ОДЗ $x \in (\dfrac{1}{15}; +\infty);\ \Leftrightarrow\ \dfrac{15x-1}{3^{1+\log_{15} x}} \leqslant 3^{\log 15x - 1},\ 15x - 1 \leqslant 9\ \Rightarrow\ x \leqslant \dfrac{2}{3}$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{15}; \dfrac{2}{3}\right]$.

6. Решить уравнение: $\log_4(4\sin^2 2x) = 2 - \log_2(-2\operatorname{tg} x)$

Решение:

$\log_2|\sin 2x| = -\log_2(-\operatorname{tg} x)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} |\sin 2x| = -\operatorname{ctg} x \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \sin^2 2x = \operatorname{ctg}^2 x \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases}\ \Leftrightarrow$
$\begin{cases} \sin^4 x = \dfrac{1}{4} \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} |\sin x| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases}\ \Leftrightarrow\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

7. Решить неравенство: $\dfrac{3\cdot 2^{1-x}+1}{2^x-1} \geqslant \dfrac{1}{1-2^{-x}}$

Решение:

Пусть $t = 2^x$, преобразуем исходное неравенство: $\dfrac{6t^{-1}+1}{t-1} \geqslant \dfrac{1}{1-t^{-1}} \;\Leftrightarrow$ $\dfrac{t+6}{t(t-1)} \geqslant \dfrac{t}{t-1} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{t^2-t-6}{t(t-1)} \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{t-3}{t-1} \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 1 < t \leqslant 3$

Ответ: $0 < x \leqslant \log_2 3$.

Литература

[1] http://www.problems.ru/

[2] http://www.math.ru/

[3] ЕГЭ математика, 2003 — 2012 год.

[4] А.И.Козко, В.Г.Чирский, задачи с параметром и другие сложные задачи, 2008 год..

[5] Методическое пособие для поступающих в вузы/ МФТИ, 2008 год.