

М5.1 В комнате находятся 7 выключенных лампочек и 7 выключателей. За ход разрешается нажать кнопку на двух выключателях. Можно ли за какое-либо количество ходов включить все лампочки?

М5.2 Петя случайным образом садится за один из двух столов: за одним сидят рыцари (всегда говорящие правду), а за другим — лжецы (всегда лгут). Как, задав всего один вопрос, Петя может узнать, за каким столом он сидит?

М5.3 Отгадайте ребус: $\text{ЭХО} : \text{ХО} = 5$ (здесь Э, Х, О — неизвестные цифры). Найдите все возможные решения и обоснуйте, почему других нет.

М5.4 Известно, что произведение 15 чисел положительно, а также, что произведение любых 4 из них положительно. Докажите, что все эти числа положительны.

М6.1 Петя случайным образом садится за один из двух столов: за одним сидят рыцари (всегда говорящие правду), а за другим — лжецы (всегда лгут). Как, задав всего один вопрос, Петя может узнать, за каким столом он сидит?

М6.2 Отгадайте ребус: $\text{ЭХО} : \text{ХО} = 5$ (здесь Э, Х, О — неизвестные цифры). Найдите все возможные решения и обоснуйте, почему других нет.

М6.3 Известно, что произведение 15 чисел положительно, а также, что произведение любых 4 из них положительно. Докажите, что все эти числа положительны.

М6.4 Четыре экзамена сдавали 257 студентов. За каждый экзамен каждый студент мог получить одну из 4 оценок от двойки до пятёрки. Докажите, что среди студентов какие-то два имеют одинаковые оценки по всем четырём предметам.

Ф7.1 Автомобиль проехал треть своего пути со скоростью равной половине его средней скорости на всём пути. Найдите отношение $\frac{v_2}{\bar{v}}$ его скорости на оставшемся отрезке пути к средней скорости.

Ф7.2 Пуля попадает в ящик с песком. Оказалось, что после прохождения внутри песка расстояния $L = 15$ см она потеряла половину своей скорости. Найдите полное расстояние, которое пройдёт пуля внутри песка до остановки. Силу сопротивления песка движению пули считайте постоянной.

Ф7.3 К правому концу лёгкого стержня подвешивают один груз, а к левому — два таких же груза. Затем стержень подвешивают за некоторую точку так, что он оказывается в равновесии. Найдите, на какую долю полной длины стержня нужно переместить точку подвеса, чтобы после добавления слева и справа по паре таких же грузов равновесие сохранилось.

М7.1 Доказать, что сумма квадратов двух натуральных чисел делится на 3 тогда и только тогда, когда оба эти числа делятся на 3.

М7.2 В эксперименте частица может быть зафиксирована ровно одним из трёх детекторов. Три экспериментатора сделали по две записи: первый записал «частица зафиксирована третьим детектором, первый детектор ничего не зафиксировал», второй — «частица зафиксирована первым детектором, на третьем детекторе ничего не было», а третий записал, что на втором и третьем детекторах частица зафиксирована не была. Известно, что один экспериментатор всё отметил верно, ещё один ошибся в одной из двух своих записей, а последний ошибся во всём записанном. Определите, в каком детекторе была зафиксирована частица.

М7.3 Известно, что произведение 15 чисел положительно, а также, что произведение любых 4 из них положительно. Докажите, что все эти числа положительны.

Ф8.1 Водитель автомобиля, двигавшегося по льду, нажал на тормоз, после чего автомобиль начал скользить с заблокированными колёсами. Оказалось, что на первых 19 метрах тормозного пути скорость автомобиля уменьшилась на 10%. Найдите скорость автомобиля до начала торможения. Коэффициент трения колёс о лед равен 0,2.

Ф8.2 Шарик с начальной скоростью $v_0 = 2000$ м/с движется между двумя параллельными массивными плитами, удаляющимися в разные стороны со скоростями по $u = 7$ м/с. Направление скорости шарика перпендикулярно плитам. Покажите, что с некоторого момента величина скорости шарика больше не меняется, а также найдите эту скорость. Удары шарика о стенку упругие.

Ф8.3 К правому концу лёгкого стержня подвешивают один груз, а к левому — два таких же груза. Затем стержень подвешивают за некоторую точку так, что он оказывается в равновесии. Найдите, на какую долю полной длины стержня нужно переместить точку подвеса, чтобы после добавления слева и справа по паре таких же грузов равновесие сохранилось.

Ф8.4 Даны два вещества, вступающие друг с другом в реакцию, при которой из 1 кг первого вещества и 1 кг второго вещества образуется 2 кг третьего вещества, и выделяется удельная теплота q . Эти вещества при одинаковой температуре смешивают в пропорции 1 : 2 (второго в 2 раза больше). На сколько градусов изменится температура? Удельные теплоёмкости первого, второго и третьего веществ известны и равны c_1, c_2, c_3 соответственно.

М8.1 В произведении $(7 + 6x - 13x^2)^{2016}(7 + 6x + 13x^2)^{2017}$ раскрыли все скобки и привели подобные. Найдите сумму коэффициентов и свободный член (при необходимости в ответе достаточно привести выражение вида a^b , возводить в степень не нужно).

М8.2 Пусть $x \neq 0$ — корень уравнения $\alpha x^2 - \beta x + \alpha = 0$. Чему равна сумма $x^3 + \frac{1}{x^3}$? При каких соотношениях α и β эта сумма равна нулю? Найдите все случаи.

М8.3 В эксперименте частица может быть зафиксирована ровно одним из трёх детекторов. Три экспериментатора сделали по две записи: первый записал «частица зафиксирована третьим детектором, первый детектор ничего не зафиксировал», второй — «частица зафиксирована первым детектором, на третьем детекторе ничего не было», а третий записал, что на втором и третьем детекторах частица зафиксирована не была. Известно, что один экспериментатор всё отметил верно, ещё один ошибся в одной из двух своих записей, а последний ошибся во всём записанном. Определите, в каком детекторе была зафиксирована частица.

М8.4 Все точки плоскости раскрасили в два цвета. Докажите, что существует прямоугольный треугольник с острым углом 30° , все три вершины которого имеют один и тот же цвет.

Ф9.1 Автомобиль движется равноускоренно. Начиная с некоторого момента через 2 секунды его скорость стала равна 20 м/с. Какой путь прошёл автомобиль за 4 секунды с того же начального момента?

Ф9.2 Шарик с начальной скоростью $v_0 = 2000$ м/с движется между двумя параллельными массивными плитами, удаляющимися в разные стороны со скоростями по $u = 7$ м/с. Направление скорости шарика перпендикулярно плитам. Покажите, что с некоторого момента величина скорости шарика больше не меняется, а также найдите эту скорость. Удары шарика о стенку упругие.

Ф9.3 Рассмотрим прямую с двумя отмеченными точками A и B . В точку A помещён точечный источник света, а через точку B проходит зеркало, перпендикулярное прямой AB . Затем зеркало вращают вокруг оси, проходящей через точку B и перпендикулярной AB . Найдите траекторию изображения источника.

Ф9.4 Даны два вещества, вступающие друг с другом в реакцию, при которой из 1 кг первого вещества и 1 кг второго вещества образуется 2 кг третьего вещества, и выделяется удельная теплота q . Эти вещества при одинаковой температуре смешивают в пропорции 1 : 2 (второго в 2 раза больше). На сколько градусов изменится температура? Удельные теплоёмкости первого, второго и третьего веществ известны и равны c_1, c_2, c_3 соответственно.

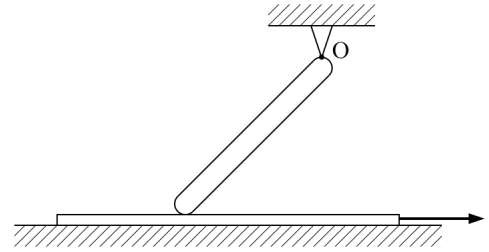
М9.1 Докажите, что для положительных чисел a, b, c таких, что $a + b + c = 4$, справедливо неравенство $5 \leq \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1}$.

М9.2 Найдите координаты точек, общих для всех непрерывных решений функционального уравнения $f^2(x) - (5x - 4)f(x) + 6x^2 - 13x - 5 = 0$.

М9.3 Найдите наименьший радиус окружности, в которую можно поместить треугольник со сторонами 5, 6, 8.

М9.4 Найдите наибольшее значение функции $\frac{4x + 3y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Ф10.1 На горизонтальном столе находится лист бумаги, прижатый нижним концом однородного стержня массы m , верхний конец которого шарнирно закреплён. При каком коэффициенте трения между листом и стержнем вытащить лист справа не удастся? Угол между стержнем и листом равен α . Трением между листом и столом пренебречь.



Ф10.2 В одном из двух сосудов находится неон, а во другом — кислород. Оказалось, что у этих газов совпадают изохоры. Найдите отношение их внутренних энергий при одной и той же температуре, если объём первого сосуда в α раз больше, чем объём второго.

Ф10.3 Точечный источник движется около зеркала равномерно и прямолинейно, причем скорость источника относительно зеркала по модулю равна скорости источника относительно его изображения. Найдите угол между траекторией источника и зеркалом.

Ф10.4 Небольшой шарик с зарядом $+q$ подвешен к потолку на нити в комнате на космическом корабле. Шарик вращается с постоянной угловой скоростью в плоскости, параллельной потолку. Вся конструкция помещена в однородное электрическое поле E , направленное вниз (от потолка). Найдите период обращения, если масса шарика m , а расстояние между потолком и плоскостью вращения h . Ускорением свободного падения пренебречь.

М10.1 Докажите, что для положительных чисел a, b, c таких, что $a + b + c = 3$, справедливо неравенство $3\sqrt{2} \leq \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1}$.

М10.2 Петя и Вася играют в следующую игру: Петя загадывает функцию $f(x)$ (определённую при всех x) и сообщает Васе число $\lambda > 2$, а также функцию $g(x)$, которая получается из f по закону $g(x) = f(-x) - \lambda f(x)$. После этого Вася отгадывает функцию $f(x)$. Помогите Васе сделать это.

М10.3 Решите уравнение в натуральных числах: $x^2 - y^2 - 5 = 2(y - x)$.

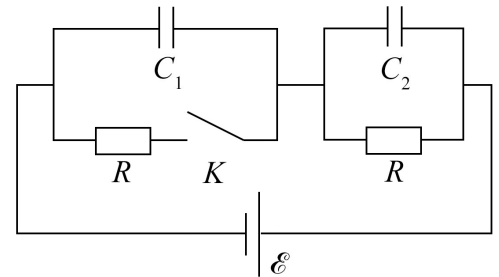
М10.4 На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбраны точки K, L так, что $AK = KL = LB$. Найдите углы $\triangle ABC$, если известно, что $CK = \sqrt{2}CL$.

Ф11.1 Заряженная частица массы m находится в равновесии между двумя горизонтальными пластинами конденсатора. Под действием ультрафиолетового излучения частица теряет заряд Δq и начинает двигаться. Найти относительное изменение заряда конденсатора $\frac{\Delta Q}{Q_0}$, необходимое для восстановления равновесия частицы, если в начале напряжённость поля внутри была равна E_0 . Нелинейными по Δq поправками пренебречь. Ускорение свободного падения равно g .
Указание: при малом x можно пользоваться приближенной формулой $\frac{1}{1-x} \approx 1+x$.

Ф11.2 В одном из двух сосудов находится неон, а во другом — кислород. Оказалось, что у этих газов совпадают изохоры. Найдите отношение их внутренних энергий при одной и той же температуре, если объём первого сосуда в α раз больше, чем объём второго.

Ф11.3 С помощью тонкой линзы на экране получено изображение предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси. Расстояние между предметом и экраном в 9 раз больше расстояния от предмета до ближайшего к нему фокуса линзы. С каким увеличением изображается предмет?

Ф11.4 В цепи на рисунке в начальный момент ключ замкнут. Найдите изменение заряда на конденсаторе C_2 после размыкания ключа и установления стационарного режима.



М11.1 Петя и Вася играют в следующую игру: Петя загадывает функцию $f(x)$ (определённую при всех x) и сообщает Васе число λ , а также функцию $g(x)$, которая получается из f по закону $g(x) = f(-x) - \lambda f(x)$. После этого Вася отгадывает функцию $f(x)$. При каких λ Вася всегда сможет однозначно определить $f(x)$? Найдите её при этих λ .

Указание. Всякая функция $f(x)$ единственным образом раскладывается в сумму своих чётной и нечётной части: $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

М11.2 На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбраны точки K, L так, что $AK = KL = LB$. Найдите углы $\triangle ABC$, если известно, что $CK = \sqrt{2}CL$.

М11.3 Решите уравнение в целых числах: $x^2 - y^2 = 2(y - 2x)$.

М11.4 Пусть $f(x) = \frac{x+2}{2x+1}$. Докажите, что во всех дробях, получаемых из этой функции суперпозицией $f(f(f(\dots f(x))\dots))$, числитель не пропорционален знаменателю.

Указание. Рассмотрите первые несколько таких дробей.