Московский физико-технический институт

Метод итераций.

Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

Москва 2014

Теоретический материал.

Определение 1. *Итерация — результат повторного применения какой-либо математической операции.*

Рассмотрим уравнение:

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{\text{n раз}}(x)\ldots)) = x \tag{1}$$

Очевидно, что все корни уравнения $f(x) = x$ являются корнями уравнения (1). Действительно, если для (x_0) справедливо равенство $f(x_0) = x_0$, то

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{\text{n раз}}(x_0)\ldots)) = \underbrace{f(f(\ldots f(}_{\text{n-1 раз}}f(x_0)\ldots)) = \underbrace{f(f\ldots f}_{\text{n-1 раз}}(x_0)\ldots) =$$

$$= \underbrace{f(f(\ldots f}_{\text{n-2 раза}}(x_0)\ldots)) = \ldots = f(x_0) = x_0$$

Однако уравнения (1) и $f(x) = x$, вообще говоря, не эквивалентны. Но если функция $f(x)$ монотонна (возрастает или убывает), то уравнения равносильны. Для доказательства данного утверждения достаточно доказать, что если x_0 не является корнем уравнения $f(x) = x$, то x_0 не является корнем уравнения (1). Пусть для определенности функция $f(x) = x$ монотонно возрастает. Тогда из определения возрастающей функции легко вытекает, что функции $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$, и т.д. тоже возрастающие. Поскольку x_0 — не является корнем уравнения $f(x) = x$, мы имеем либо $f(x_0) > x_0$. либо $f(x_0) < x_0$. Рассмотрим случай $f(x_0) > x_0$:

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{\text{n раз}}(x_0)\ldots)) = \underbrace{f(f(\ldots f(}_{\text{n-1 раз}}f(x_0)\ldots)) > \underbrace{f(f\ldots f}_{\text{n-1 раз}}(x_0)\ldots) =$$

$$= \underbrace{f(f(\ldots f}_{\text{n-2 раза}}(x_0)\ldots)) > \ldots > f(x_0) > x_0$$

Случай $f(x_0) < x_0$ разбирается аналогично. Таким образом, показано, что для монотонной функции $f(x)$ уравнения $f(x) = x$ и (1) эквивалентны.

Вообще уравнение (1) является функциональным уравнением, решение которого зависит от класса функций, в котором мы работаем, как показано выше, в случае монотонных функций решение описывается уравнением $f(x) = x$. Почему стоит уделить этому частному уравнению отдельное внимание? Дело в том, что если в задаче есть некоторая симметрия, например, форма записи в системе уравнений, или сама композиция функций, то как правило можно все это свести к функциональному уравнению (1), и если показать, что функция f монотонна, то можно легко найти решение этой задачи или максимально ее упростить. Отметим также факт, что вообще сама функция f может состоять из композиций функций, например, $f(x) = g(h(s(x)))$.

Следующие примеры помогут для усвоения этого метода.

Примеры.

Задача №1 Укажите все значения параметра (a), для которых уравнение

$$\sqrt{3a+\sqrt{3a+2x-x^2}} = 2x - x^2 \text{ имеет решение.}$$

Решение:

Положим $f(t)=\sqrt{3a+t}$, тогда исходное уравнение запишется в виде:

$f(f(2x-x^2)) = 2x-x^2 \Leftrightarrow f(f(t)) = t$, где $t = 2x-x^2$. Т.к. график функции $g(x) = 2x-x^2$ — парабола с вершиной в точке $x=1$ и максимум, равным 1, для того чтобы для фиксированного t существовало хотя бы одно решение x уравнения $t=2x-x^2$, необходимо и достаточно выполнение условия $t \leqslant 1$. (еще нужно учесть ОДЗ: $t \geqslant 0$) $\Rightarrow\ 0 \leqslant t \leqslant 1$. Поскольку функция f(t) монотонна, уравнение $f(f(t)) = = t \Leftrightarrow f(t) = t \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(t)=t \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+t=t^2 \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_{1,2} = \dfrac{1}{2} \pm \sqrt{3a+\frac{1}{4}} \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Теперь, $t_+ = \dfrac{1}{2} + \sqrt{3a+\frac{1}{4}} \in [0;1]$ при $a \in [-\dfrac{1}{12};0]$ и $t_- = \dfrac{1}{2} - \sqrt{3a+\frac{1}{4}} \in [0;1]$ при $a \in [-\dfrac{1}{12};0]$. Следовательно, при $-\dfrac{1}{12};0$ существует по крайней мере одно такое значение $t \leqslant 1$, что$f(f(t)) = t$, а для каждого такого t существует хотя бы одно такое значение x, что $t = 2x-x^2$.

Ответ: $a \in [-\dfrac{1}{12};0]$.

Задача №2 Решить систему в неотрицательных числах. Найти также все $k \in \mathbb{N}$, при которых система имеет решения. По определению $k! = 1\cdot 2\cdot 2\cdot ...\cdot k$.

$$\begin{cases} x(x+k)! = k^k y \\ y(y+k)! = k^k z \\ z(z+k)! = k^k x \end{cases}$$

Решение:

Заметим, что система эквивалентна следующей: $\begin{cases} y = \dfrac{x(x+k!)}{k^k} \\ z = \dfrac{y(y+k!)}{k^k} \\ x = \dfrac{z(z+k!)}{k^k} \end{cases}$, где $f(t) = \dfrac{t(t+k!)}{k^k}$,

таким образом мы приходим к системе вида:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = f(y) \\ x = f(z) \end{cases} \Leftrightarrow x = f(f(f(x))),\ \text{где } f \text{ — возрастающая функция.}$$

$\Rightarrow\ f(x)=x$ — решение этого уравнения, имеем: $x(x+k)!=xk^k\ \Rightarrow\ x=0$ или $(x+$ $+k)!=k^k$, где $k\in\mathbb{N}$. Если $k=1$, то $x=0$, при $k\geqslant 1$ решений нет в $\mathbb{Z}$ числах.

Ответ: $k=1,\ x=y=z=0$

Задача №3 Найти все решения системы.

$$\begin{cases} 3x_1x_2=x_1+x_2+2\\ 3x_2x_3=x_2+x_3+2\\ \dots\\ 3x_{n-1}x_n=x_{n-1}+x_n+2\\ 3x_nx_1=x_n+x_1+2 \end{cases} \tag{1}$$

Решение:

Преобразуем систему (1) к виду: $\begin{cases} x_2=\dfrac{x_1+2}{3x_1-1}\\ x_3=\dfrac{x_2+2}{3x_2-1}\\ \dots\\ x_1=\dfrac{x_n+2}{3x_n-1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1)=x_2\\ f(x_2)=x_3\\ \dots\\ f(x_n-1)=x_n\\ f(x_n)=x_1\end{cases} \Leftrightarrow$

$\underbrace{f(\dots f}_{\text{n раз}}(x_1)\dots)=x_1$, т.к. $f(t)=\dfrac{t+2}{3t-1}$ — монотонно убывает, то решением этого уравнения будет все решения уравнения: $f(x_1)=x_1$ т.е. $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_n$ и система эквивалентна уравнению: $3x^2-2x-2=0,\ \dfrac{\mathscr{D}}{4}=7,\ x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{3}$

Ответ: $x_1=x_2=\ldots=x_n=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{3}$

Задача №4 Решить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{2z^2}{1+z^2}=x\\ \dfrac{2x^2}{1+x^2}=y\\ \dfrac{2y^2}{1+y^2}=z \end{cases} \tag{1}$$

Решение:

Т.к. $\dfrac{2z^2}{1+z^2}\geqslant 0$, то $x\geqslant 0$, следовательно, $y\geqslant 0$ и $z\geqslant 0$.

Заметим, что система (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(z)=x\\ f(x)=y\\ f(y)=z\end{cases} \Leftrightarrow$

$$f(f(f(x)))=x \tag{2}$$

Покажем, что функция $f(x) = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$ монотонно возрастает. Т.е. нужно доказать, что $\forall z_1, z_2 \in R: \quad z_2 > z_1 \Rightarrow f(z_2) > f(z_1)$, действительно, $\dfrac{2z_2^2}{1+z_2^2} > \dfrac{2z_1^2}{1+z_1^2} \Leftrightarrow \dfrac{2z_2^2(1+z_1^2 - 2z_1^2(1+z_2^2))}{(1+z_2^2)(1+z_1^2)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(z_2^2 - z_1^2)}{(1+z_2^2)(1+z_1^2)} > 0$, ч.т.д. Следовательно, все решения уравнения (2) есть решения уравнения $f(x) = x \Rightarrow \dfrac{2x^2}{1+x^2} = x \Leftrightarrow x(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ или $x = 1$. Имеем, $x = y = z$ и $x = 0$ или 1.

Ответ: $(0;0;0);(1;1;1)$

Задача №5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение $(x;y)$ система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - (2a+1)x + a^2 - 3 = y \\ y^2 - (2a+1)y + a^2 - 3 = x \end{cases} \tag{1}$$

Решение:

Заметим, что

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = x \end{cases} \Leftrightarrow f(f(x)) = x, \tag{2}$$

где $f(t) = t^2 - (2a+1) + a^2 - 3$.

Покажем, что $\forall \tilde{x} \in \mathbb{D}_f: \ f(\tilde{x}) \neq \tilde{x}$ нет решений (1). $f(x) = x^2 - (2a+1)x + a^2 - 3$, $f'(x) = 2x - 2a - 1$, при $x > x_0, f(x) \uparrow$, следовательно, на луче $[\mathrm{x}_0 + \infty)$ функция будет монотонно возрастать, следовательно, (2) $\Leftrightarrow f(x) = x$. При $x < x_0, f(x) \downarrow$, следовательно, на луче $(-\infty; x_0]$ функция $f(x) \downarrow$, т.е., аналогично, (2) $\Leftrightarrow f(x) = x$, т.е. решениями (2) будут все решения уравнения $f(x) = x \Rightarrow x^2 - (2a+1)x + a^2 - 3 = x \Leftrightarrow x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 3 = 0 \Rightarrow \dfrac{\mathscr{D}}{4} = a^2 + 2a + 1 - a^2 + 3 = 2a + 4$. Для того чтобы было единственное решение системы, необходимо и достаточно, чтобы $\dfrac{\mathscr{D}}{4} = 0 \Rightarrow a = -2$

Ответ: $a = -2$ и $x = y = -1$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. указать все значения a, для которых уравнение имеет решение

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$$

Ответ: $a \in [-\dfrac{1}{4}; 0]$.

2. указать все значения a, для которых уравнение имеет решение.

$$\sqrt{5a+\sqrt{5a-x-\frac{x^2}{4}}}+x+\frac{x^2}{4}=0$$

Ответ: $a\in[-\frac{1}{20};0]$.

3. решить в целых числах уравнение:

$$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x}}}}}_{1992\text{ раза}}=y$$

Ответ: $x=y=0$.

4. указать все a, для которых уравнение имеет решение:

$$\sqrt{1+a+\sqrt{a+2\cos^2 x}}=\cos 2x$$

Ответ: $a\in[-\frac{5}{4};-1]$.

5. решить систему

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}=1\\ y-\sqrt{z}=1\\ z-\sqrt{x}=1\end{cases}$$

Ответ: $x=y=z=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

6. решить систему

$$\begin{cases} x^2=y-1\\ y^2=z-1\\ z^2=x-1\end{cases}$$

Ответ: $\varnothing$

7. решить систему

$$\begin{cases} x=\dfrac{4z^2}{1+4z^2}\\ y=\dfrac{4x^2}{1+4x^2}\\ z=\dfrac{4y^2}{1+4y^2}\end{cases}$$

Ответ: $(0;0;0)$; $(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

8. решить уравнение

$$(x^2+4x+2)^2+4(x^2+4x+2)+2=x$$

Ответ: $\{-2;-1\}$

Уравнения вида $f(g(x)) = f(h(x))$.

Скажем несколько слов об этом случае:

- Если $y = f(x)$ — возрастающая или убывающая на области допустимых значений уравнения $f(g(x)) = f(h(x))$, то уравнения $f(g(x)) = f(h(x))$ и $g(x) = h(x)$ равносильны.
- Если $y = f(x)$ — возрастающая или убывающая на области допустимых значений функций $y = g(x)$ и $y = h(x)$, то уравнения $f(g(x)) = f(h(x))$ и $g(x) = h(x)$ равносильны.
- Если четная функция $y = f(x)$ определена на $[-a; a]$ и возрастает (или убывает) при $0 \leqslant x \leqslant a$, то на данном отрезке уравнение $f(g(x)) = f(h(x))$ равносильно совокупности уравнение $g(x) = h(x)$ и $g(x) = -h(x)$ при условии, что $-a \leqslant g(x) \leqslant a$ и $-a \leqslant h(x) \leqslant a$.
- Решение уравнения вида $f(g(x)) + f(h(x)) = 0$ сводится к решению уравнения вида $f(g(x)) = f(-h(x))$, если $f(x)$ — нечетная функция.

Задача №6 Решить уравнение

$$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}) + 3x(2+\sqrt{9x^2+3}) = 0 \tag{1}$$

Решение:

Введем функцию $f(x) = x(2+\sqrt{x^2+3})$, тогда исходное уравнение примет вид : $f(2x+1) + f(3x) = 0$, т.к. $f(x)$ — нечетная, то

$$f(2x+1) = -f(3x) = f(-3x) \tag{2}$$

Далее, при $x \geqslant 0$, функция $f(x)$ равна произведению двух возрастающих функций, следовательно, при $x \geqslant 0$, $f(x) \uparrow$. В силу нечетности функция $f(x)$возрастает при $x < 0$, следовательно, $f(x)$ возрастает для всех $x \in (\mathbb{R} \cap \mathscr{D}_f)$, где $\mathscr{D}_f$ — область определения функции f. Имеем, $f(2x+1) = f(-3x) \Rightarrow 2x+1 = -3x \Rightarrow x = -\dfrac{1}{5}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{5}$

Задача №7 Решить уравнение

$$\sqrt[4]{2x-1} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} \tag{1}$$

Решение:

Замечаем, что $x = 1$ — корень уравнения, функция $y = \sqrt[4]{2x-1}$ и функция $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ возрастает при $x \in [\frac{1}{2}; +\infty)$. Преобразовать уравнение к такому виду, чтобы одна часть представляла собой убывающую, а другая — возрастающую, не удается. Поступим иначе, найдем производные функций: $y_1 = \sqrt[4]{2x-1}$ и $y_2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ и их значения в $x = 1$ (точке пересечения графиков этих функций). Имеем:

$$y_1' = \frac{1}{4}(2x-1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2 = \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x-1)^3}} \Rightarrow y_1'(1) = \frac{1}{2}$$

$$y_2' = \frac{x}{2} \Rightarrow y_2' = \frac{1}{2}$$

Т.к. $y_1' = y_2'$, то графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ имеют общую касательную в точке $x = 1$. Но поскольку функция $y_2(x)$ выпукла вниз, а функция $y_1(x)$ выпукла вверх (это можно проверить графически), то их графики расположены по разные стороны от общей касательной, поэтому уравнение $y_1(x) = y_2(x)$ имеет только один корень.

Ответ: $\{1\}$.

Задача №8 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = e^y - e^x \\ x^2 + xy + y^2 = 12 \end{cases}$$

Решение:

Из первого уравнения системы получим уравнение $x+e^x = y+e^y$, пусть $f(x) = x+e^x$, тогда получаем функциональное уравнение $f(x) = f(y)$. Т.к. $f'(x) > 0$, то $f(x) \uparrow$ $\forall x \in \mathscr{D}_f$, поэтому $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Из второго уравнение данной системы получим $3x^2 = 12,\ x = \pm 2$.

Ответ: $(2;2);\ (-2;-2)$.

Задача №9 Решить уравнение

$$\sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + \sin\left(1x^2 + x + 1\right) = 0$$

Решение:

Пусть $f(x) = \sin x,\ g(x) = \frac{x}{x^2+1},\ h(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$, тогда исходное уравнение примет вид $f(g(x)) + f(h(x)) = 0$. Поскольку $f(x)$ — нечетная, то $f(g(x)) = f(-h(x))$. Т.к. $f'(x) = \cos x > 0$ при $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, и $-\frac{1}{2} < g(x) < \frac{1}{2}$, и $0 < h(x), \frac{4}{7}$, то функция $f(x) = \sin x$ — возрастает на области значений $g(x)$ и $h(x)$, поэтому $g(x) = -h(x) \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} = -\frac{1}{x^2+x+1} \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$.

Ответ: $\{-1\}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. решить уравнение: $(x-1)^4 + 4x - 4 = x^2 + 4\sqrt{x}$. Ответ: $\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\}$
2. решить уравнение: $(\sin x)^6 - 3(\sin x)^2 = (\cos 2x)^3 - 3\cos 2x$. Ответ: $\{\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$
3. решить уравнение: $2^{x^2-3x+1} - 3^{-(x^2-3x+1)} = 4^x - 9^{-x}$. Ответ: $\{\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\}$

Особые задачи.

Задача №10 Найти все a, при которых уравнение имеет единственное решение:

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) + a^2 - \frac{5}{4} = 0 \quad (1)$$

Решение:

1. Заметим, что если x_0 — корень уравнения, то $\frac{1}{x_0}$ тоже, следовательно, чтобы было одно решение необходимо, чтобы $x_0 = \frac{1}{x_0} \Rightarrow x_0 = \pm 1$
   (a) Если $x_0 = 1$, то $a^2 + a + \frac{3}{4} = 0$ ($\mathscr{D} < 0 \Rightarrow a \in \varnothing$)
   (b) Если $x_0 = -1$, то $a^2 + a - \frac{3}{4} = 0$, ($a = \frac{1}{2}$ или $a = -\frac{3}{2}$)
2. Рассмотрим 2-ой случай, когда $x_0 = -1$, проверим значение $a = \frac{1}{2}$, сделаем подстановку $x = \operatorname{tg}(\frac{t}{2})$, где $t \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$. (ОДЗ: $\sin\frac{t}{2} \neq 0$, т.е. $\begin{cases} t \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{t}{2} \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$)
   Имеем:
   $$2^{\sin t} + a\cos(2\operatorname{ctg} t) + a^2 - \frac{5}{4} = 0 \quad (2)$$
   Перепишем это уравнение следующим образом
   $$\underbrace{cos(2\operatorname{ctg} t)}_{''f_1} = \underbrace{2 - 2^{1+\sin t}}_{''f_2} \quad (3)$$

Будем рассматривать $f_1(t)$ как суперпозицию функций $g(u) = \cos u$ при изменении $\varphi(t) = \operatorname{ctg} t$, для $t \in (-\pi; 0)$. Тогда $\varphi(t)$ монотонно убывает от $(+\infty)$ до $(-\infty)$, следовательно, $f_1(t)$ совершает колебания от (-1) до (1), при этом $f_1(-\frac{\pi}{2}) = 1$.

Для $t \in (0; \pi)$ в силу четности $f_1(t)$ ситуация аналогична $f_2(t) = 2 - 2^{1+\sin t}$, $g(u) = 2 - 2^{1+u}$, $u(t) = \sin t$. График функции $g(u) = 2 - 2^{1+u}$, поэтому при $t \in (-\pi; \pi)$ $f_2(t)$ сначала возрастает от $f_2(-\pi) = 0$ до $f_2(-\frac{\pi}{2}) = 1$, затем убывает от $f_2(-\pi 2) = 1$ до $f_2(\frac{\pi}{2}) = -2$, потом опять возрастает от $f_2(\frac{\pi}{2}) = -2$ до $f_2(\pi) = 0$. Значит уравнение (3) имеет более одного корня при $t \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$, следовательно $a \neq \frac{1}{2}$.

3. Проверим теперь $a = -\frac{3}{2} \Rightarrow 2^{\sin t} + a\cos(2\operatorname{ctg} t) + a^2 - \frac{5}{4} = 0$, имеем
$$\cos(2\operatorname{ctg} t) = \frac{1}{3}(2 + 2^{1+\sin t}) \tag{4}$$
При $t \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi$ функция $y = \cos(2\operatorname{ctg} t)$ принимает значение $y \in [-1; 1]$, а функция $y = \frac{1}{3}(2 + 2^{1+\sin t})$ принимает значения $y \in [1; 2] \setminus \{\frac{4}{3}\}$, с учетом ОДЗ
$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2\operatorname{ctg} t) = 1 \\ \frac{1}{3}(2 + 2^{1+\sin t}) = 1 \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2},$$
$t \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$ этот корень подходит и для 1-го уравнения системы.

Ответ: $a = -\frac{3}{2}$.

Задача №11 Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+a} - \sqrt{y+b} = 1 \\ \sqrt{y+a} - \sqrt{x+b} = 1 \end{cases}$$

Решение:

Вычтем из 1-го уравнения 2-ое, получим:
$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{y+a} + \sqrt{y+b}$$
Пусть $f(t) = \sqrt{t+a} + \sqrt{t+b}$, видим, что $f(t) \nearrow \ \forall t \in \mathscr{D}_f$, Имеем: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y \Rightarrow \sqrt{x+a} - \sqrt{x+b} = 1$ — это уравнение равносильно системе:
$$\begin{cases} x \geqslant -a,\ x \geqslant -b \\ x + a = 1 + 2\sqrt{x+b} + x + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -a,\ x \geqslant -b \\ 2\sqrt{x+b} = a - b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant b + 1,\ x \geqslant -b \\ x = \dfrac{(a-b-1)^2}{4} - b \end{cases}$$
Очевидно, что $x = \dfrac{(a+b-1)^2}{4} - b \geqslant -b \Rightarrow$

Ответ:

- Если $a \geqslant b + 1$, то $x = y = \dfrac{(a-b-1)^2}{4} - b$
- Если $a < b + 1$, то $x, y \in \varnothing$

Задачи для самостоятельного решения.

1. При каких a, уравнение $4^{-x|x-a|} \cdot \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-(x^2-2x)} \cdot \log_{\sqrt{3}}(2|x-a|+2) = 0$ имеет ровно три корня

2. Существует ли такая функция $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(f(x)) = x^2 - 2$ для всех вещественных x. Ответ: нет.

3. Дана функция $f(x) = ||x+1|-2|$. Сколько корней имеет уравнение $\underbrace{f(f(\ldots f}_{2012 \text{ раз}}(x)\ldots)) =$ $= 12$. Ответ: 4030.

4. Найти значение $f(f(1))$, если $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < -2 \\ -x-5, & x \geqslant -2 \end{cases}$ Ответ: -11.

5. Пусть $f(x) = \dfrac{x}{3} + 2$, найти значение функции $\underbrace{f(\ldots f}_{2009 \text{ раз}}(x)\ldots)$ в точке $x = 4$. Ответ: $3 + 3^{-2009}$.

Список литературы

1. http://www.problems.ru/
2. http://www.math.ru/
3. варианты ЕГЭ по математике 2003—2012 год.
4. А.И.Козко, В.Г.Чирский, задачи с параметром и другие сложные задачи, 2008 год.
5. Методическое пособие по математике для поступающих в вузы, МФТИ, 2008 год.