РЕШЕНИЕ БИЛЕТА Ш (ДОЛГОПРУДНЫЙ)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2y} & = & 3y-x, \\ \frac{81}{4}y^2+x^3 & = & 2x+1. \end{cases}$$

Ответ: $(-1\,,\,0)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,,\,0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{113}-9}{2}\,,\,\frac{3\sqrt{113}-29}{9}\right)$.

2. Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{tg} x}(\operatorname{ctg} x-2)+\log_{(\operatorname{ctg} x-2)}\sqrt{\operatorname{tg} x}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{5}}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

3. Решите неравенство

$$\frac{10-2|x|}{|x^2+9x+11|-3}\leq 1.$$

Ответ: $(-\infty,-8)\cup(-7,-3]\cup(-2,-1)\cup\left[\frac{\sqrt{129}-11}{2},+\infty\right)$.

4. В параллелограмме $ABCD$ окружность радиуса $\frac{1}{4}$ с центром на отрезке CD проходит через точку D и касается отрезка BC в точке E такой, что угол BED равен $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Найдите высоту параллелограмма DF и длину отрезка CD. Найдите площадь параллелограмма, если $AB=BE$.

Ответ: $DF=\frac{8}{25}$, $CD=\frac{24}{21}$, $S=\frac{16}{25}$.

5. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых существует число α, такое, что уравнение

$$x^2+(\sin\alpha+3\cos\alpha)x+b=0$$

имеет действительное решение.

Ответ: $b\leq\frac{5}{2}$.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 1, боковое ребро равно 2. Сфера с центром O на прямой SA касается рёбер SB, SC и BC. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей BSC и ABC, а также радиус сферы.

Ответ: $\rho(O,BSC)=\frac{2}{7}\sqrt{\frac{33}{5}}$, $\rho(O,ABC)=\frac{1}{7}\sqrt{\frac{11}{3}}$, $R=\frac{3\sqrt{15}}{14}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА И (ДОЛГОПРУДНЫЙ)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - \frac{2}{3}y} & = & y - x, \\ \\ \frac{9}{4}y^2 + x^3 & = & 2x + 1. \end{cases}$$

Ответ: $(-1\,,\,0)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,,\,0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{113}-9}{2}\,,\,\frac{3\sqrt{113}-29}{3}\right)$.

2. Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{tg} x}(2 - \operatorname{ctg} x) + 2\log_{(2-\operatorname{ctg} x)}\sqrt{\operatorname{tg} x} = \frac{5}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Решите неравенство

$$\frac{20 - 4|x|}{|x^2 + 11x + 21| - 3} \leq 1.$$

Ответ: $(-\infty, -9) \cup (-8, -4] \cup (-3, -2) \cup \left[\frac{\sqrt{233}-15}{2}, +\infty\right)$.

4. В параллелограмме $ABCD$ окружность радиуса 1 с центром на отрезке BC проходит через точку C и касается отрезка AB в точке E такой, что угол AEC равен $\operatorname{arctg} 2$. Найдите высоту параллелограмма CF и длину отрезка BC. Найдите площадь параллелограмма, если $AD = AE$.

Ответ: $CF = \frac{8}{5}$, $BC = \frac{8}{3}$, $S = \frac{32}{5}$.

5. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых существует число α, такое, что уравнение

$$x^2 + (2\sin\alpha - \cos\alpha)x - b = 0$$

имеет действительное решение.

Ответ: $b \geq -\frac{5}{4}$.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 2, боковое ребро равно 3. Сфера с центром O на прямой SB касается рёбер SA, SC и AC. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ASC и ABC, а также радиус сферы.

Ответ: $\rho(O, ASC) = \frac{3}{7}\sqrt{\frac{23}{2}}$, $\rho(O, ABC) = \frac{1}{7}\sqrt{\frac{23}{3}}$, $R = \frac{8\sqrt{2}}{7}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА Ф (ДОЛГОПРУДНЫЙ)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2-2x} & = & 3x-y, \\ \frac{81}{4}x^2+y^3 & = & 2y+1. \end{cases}$$

Ответ: $(0\,,\,-1)$, $\left(0\,,\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{3\sqrt{113}-29}{9}\,,\,\frac{\sqrt{113}-9}{2}\right)$.

2. Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{ctg} x}(\operatorname{tg} x-2)+\log_{(\operatorname{tg} x-2)}\sqrt{\operatorname{ctg} x}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}+1\right)+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

3. Решите неравенство

$$\frac{8-2|x|}{|x^2+7x+3|-3}\le 1.$$

Ответ: $(-\infty,-7)\cup(-6,-2]\cup(-1,0)\cup\left[\frac{\sqrt{113}-9}{2},+\infty\right)$.

4. В параллелограмме $ABCD$ окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром на отрезке AB проходит через точку B и касается отрезка AD в точке E такой, что угол BED равен $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$. Найдите высоту параллелограмма BF и длину отрезка AB. Найдите площадь параллелограмма, если $CD=DE$.

Ответ: $BF=\frac{9}{13}$, $AB=\frac{9}{5}$, $S=\frac{27}{13}$.

5. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых существует число α, такое, что уравнение

$$x^2+(\cos\alpha-4\sin\alpha)x+b=0$$

имеет действительное решение.

Ответ: $b\le\frac{17}{4}$.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 1, боковое ребро равно 3. Сфера с центром O на прямой SA касается рёбер SB, SC и BC. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей BSC и ABC, а также радиус сферы.

Ответ: $\rho(O,BSC)=\frac{3}{17}\sqrt{\frac{130}{7}}$, $\rho(O,ABC)=\frac{2}{17}\sqrt{\frac{26}{3}}$, $R=\frac{5\sqrt{35}}{34}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА P (ДОЛГОПРУДНЫЙ)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - \frac{2}{3}x} & = & x - y, \\ \frac{9}{4}x^2 + y^3 & = & 2y + 1. \end{cases}$$

Ответ: $(0\,,\,-1)$, $\quad\left(0\,,\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\quad\left(\frac{3\sqrt{113}-29}{3}\,,\,\frac{\sqrt{113}-9}{2}\right)$.

2. Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{ctg} x}(2 - \operatorname{tg} x) + 2\log_{(2-\operatorname{tg} x)}\sqrt{\operatorname{ctg} x} = \frac{5}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \pi k, \quad \operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

3. Решите неравенство

$$\frac{6 - 2|x|}{|x^2 + 5x - 3| - 3} \leq 1.$$

Ответ: $(-\infty, -6) \cup (-5, -1] \cup (0, 1) \cup \left[\frac{\sqrt{97}-7}{2}, +\infty\right)$.

4. В параллелограмме $ABCD$ окружность радиуса 2 с центром на отрезке AD проходит через точку A и касается отрезка CD в точке E такой, что угол AEC равен $\operatorname{arctg} 3$. Найдите высоту параллелограмма AF и длину отрезка AD. Найдите площадь параллелограмма, если $BC = CE$.

Ответ: $AF = \frac{18}{5}, \quad AD = \frac{9}{2}, \quad S = \frac{108}{5}.$

5. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых существует число α, такое, что уравнение

$$x^2 + (3\cos\alpha + 2\sin\alpha)x - b = 0$$

имеет действительное решение.

Ответ: $b \geq -\frac{13}{4}$.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 2, боковое ребро равно 5. Сфера с центром O на прямой SC касается рёбер SA, SB и AB. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ASB и ABC, а также радиус сферы.

Ответ: $\rho(O, ASB) = \frac{5}{23}\sqrt{\frac{142}{3}}, \quad \rho(O, ABC) = \frac{\sqrt{213}}{23}, \quad R = \frac{16\sqrt{6}}{23}.$