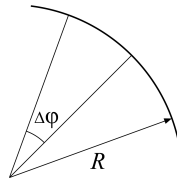


## Занятие 3 - Движение по окружности. Закон сохранения импульса и закон сохранения энергии

**Курс читает:** Чивилёв Виктор Иванович - доцент кафедры общей физики МФТИ.

Угловой скоростью  $\omega$  называется величина

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}, [\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{сек}} = \frac{1}{\text{сек}}$$



В любой момент  $v = \omega R$ .

Если  $\omega = \text{const}$ , то движение называется *равномерным*.

$T$  - период,  $\nu$  - частота вращения.

$$T = \frac{1}{\nu}$$

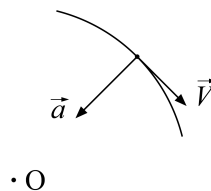
$$\omega = 2\pi\nu$$

Вывод:

$\varphi \sim t$ . Возьмем  $\varphi = 2\pi, t = T \Rightarrow \omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T}$ . Так как  $T = \frac{1}{\nu}$ , то  $\omega = 2\pi\nu$ .

При равномерном движении по окружности ускорение

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

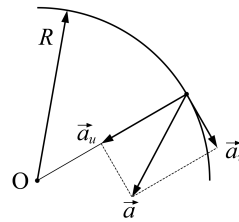


Неравномерное движение по окружности.

В данном случае удобно разложить ускорение на тангенциальное и нормальное.

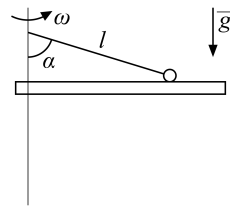
$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$



Тангенциальное ускорение характеризует изменение проекции скорости на касательное направление. При решении задач удобно направить ось  $x$  к центру окружности. Тогда  $a_x = a_n$ .

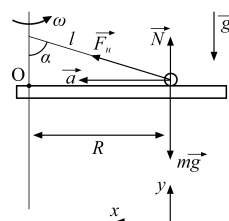
## Задача 1



Платформа вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega$ . Шарик привязан нитью к оси. Вместе с платформой шарик вращается вокруг вертикальной оси. Угол наклона нити  $\alpha$ , длина нити  $l$ , масса шарика  $m$ . Найти силу натяжения нити  $F$  и силу нормального давления  $N$  на платформу.

### Решение

Рассмотрим силы действующие на шарик: сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила нормального давления  $\vec{N}$ , сила натяжения нити  $F$ .



Шарик движется по окружности, ускорение направлено к центру окружности (точке  $O$ ). Найдём это ускорение:

$$a = \omega^2 R = \omega^2 l \sin \alpha$$

Запишем второй закон Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}$$

Зафиксируем систему координат - ось  $x$  направим горизонтально к точке  $O$ , ось  $y$  направим вертикально. Спроектируем наше равенство на ось  $x$ :

$$0 + 0 + F \sin \alpha = ma$$

На ось  $y$ :

$$-mg + N + F \cos \alpha = 0$$



Из первого уравнения

$$F \sin \alpha = ma = m\omega^2 l \sin \alpha \Rightarrow F = m\omega^2 l$$

Из второго уравнения

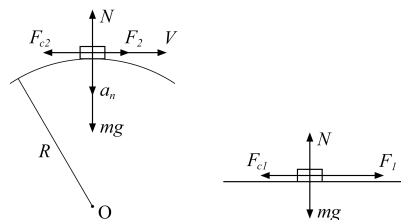
$$N = mg - F \cos \alpha = mg - m\omega^2 l \cos \alpha = m(g - \omega^2 l \cos \alpha)$$

Если в задаче просили бы найти силу давления шарика на платформу  $N_1$ , тогда нужно было бы написать  $N_1 = N = m(g - \omega^2 l \cos \alpha)$  (по третьему закону Ньютона!).

**Ответ:**  $F = m\omega^2 l, N = m(g - \omega^2 l \cos \alpha)$

*Замечание.* В этой задаче можно было ввести оси и по-другому. Например, одну из осей вдоль нити, а другую перпендикулярно нити. Или одну горизонтально, а другую перпендикулярно нити.

## Задача 2



Автомобиль движется сначала по горизонтальному участку дороги, а затем по выпуклому мосту. Скорость автомобиля в верхней части моста  $v = 90$  км/ч. Сила давления автомобиля в верхней части моста в два раза меньше силы давления, оказываемой автомобилем на горизонтальном участке дороги. Чему равен радиус выпуклого моста?

### Решение

Когда автомобиль движется по горизонтальной дороге, на него действует сила тяги  $F_1$  и сила сопротивления  $F_{c1}$ . На автомобиль на мосту также действует сила тяги  $F_2$  и сила сопротивления  $F_{c2}$ .

Направим ось  $y$  вертикально, а ось  $x$  горизонтально. Тогда в проекции на вертикальную ось второй закон Ньютона в случае горизонтальной дороги будет выглядеть так:

$$2N - mg = 0 \Rightarrow N = \frac{mg}{2}$$

Во втором случае ускорение будет иметь только вертикальную составляющую. Тогда второй закон Ньютона записывается в виде:

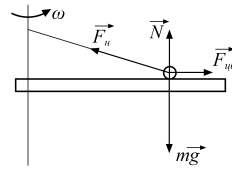
$$mg - N = ma_n$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$mg - \frac{mg}{2} = m \frac{v^2}{R}$$

$$\frac{g}{2} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{2v^2}{g} = \frac{2 * 25}{10} \text{ м} = 125 \text{ м}$$

**Ответ:** 125 м

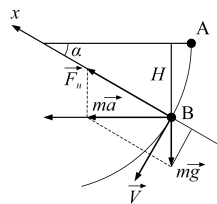


*Замечание.* Задачу 1 можно решать и в неинерциальной системе отсчета. Тогда на шарик будут действовать сила тяжести, сила натяжения нити, центробежная сила инерции. В неинерциальной системе отсчета  $\vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_n + m\vec{g} + \vec{N} = 0$ .  $F_{\text{цб}} = m\omega^2 R$

### Задача 3

Шарик на нити отклонили в горизонтальное положение и отпустили. Дана длина нити  $l$ , масса шарика  $m$ , угол  $\alpha$ . Найти силу натяжения в момент, когда нить составляет с горизонталью угол  $\alpha$ .

**Решение**



Шарик движется по окружности неравномерно. На шарик действуют сила натяжения нити  $\vec{F}$  и сила тяжести  $m\vec{g}$ . Из второго закона Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g}$$

Направим ось  $x$  вдоль нити к центру окружности. Тогда в проекции на эту ось уравнение примет вид:

$$F - mg \sin \alpha = ma_n$$

$$a_n = \frac{v^2}{l}$$

Чтобы найти  $v$  воспользуемся законом сохранения энергии. Пусть высота с которой упал шарик равна  $H$ .

$$\Pi_A + K_A = \Pi_B + K_B$$

$$mgH + 0 = 0 + \frac{mv^2}{2}$$

$$H = l \sin \alpha \Rightarrow mgl \sin \alpha = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = 2gl \sin \alpha$$

$$F - mg \sin \alpha = 2m \frac{lg \sin \alpha}{l}$$

$$F - mg \sin \alpha = 2mg \sin \alpha \Rightarrow F = 3mg \sin \alpha$$

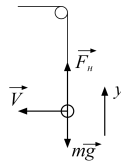
**Ответ:**  $F = 3mg \sin \alpha$

## Задача 4

На столе находится брусок, к которому закреплена нить. Нить проходит через блок, который закреплен на столе. К другому концу нити прикреплен шарик. Даны длина нити  $L = AB$ , высота  $h$ , на которую отклонили шарик, масса бруска  $M$ , коэффициент трения  $\mu$ . При какой минимальной массе шарика  $m$  брусок сдвинется с места?

### Решение

Рассмотрим шарик, находящийся в крайнем нижнем положении (точка  $D$ ). В таком случае сила натяжения будет максимальной. В этот момент на шарик будет действовать сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила натяжения нити  $\vec{F}$ . Ускорение будет направлено вертикально. Запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось:



$$F - mg = ma_n$$

$$F - mg = m \frac{v^2}{L}$$

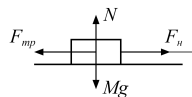
Из закона сохранения энергии

$$\Pi_D + K_D = \Pi_B + K_B$$

$$0 + \frac{mv^2}{2} = mgh + 0 \Rightarrow v^2 = 2gh$$

Тогда

$$F = mg + \frac{mv^2}{L} = mg + \frac{2mgh}{L} = mg \frac{L + 2h}{L}$$



Рассмотрим силы действующие на брусок. Это будут сила тяжести  $M\vec{g}$ , сила натяжения нити  $\vec{F}$ , сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , сила нормального давления  $\vec{N}$ . Если брусок не движется, то  $F = F_{\text{тр}} \leq \mu N = \mu Mg$ .

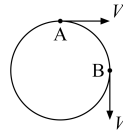
$$F \leq \mu Mg \Rightarrow mg \frac{L + 2h}{L} \leq \mu Mg \Rightarrow m \leq \frac{\mu MgL}{L + 2h}$$

Чтобы брусок сдвинулся, надо

$$m \geq \frac{\mu MgL}{L + 2h}$$

**Ответ:**  $m = \frac{\mu MgL}{L + 2h}$

### Задача 5



Материальная точка движется по окружности равномерно. Найти модуль изменения импульса  $|\Delta\vec{p}|$ .

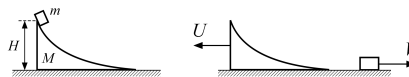
**Решение**

$$|\Delta\vec{p}| = |\vec{p}_B - \vec{p}_A|$$

Так как движение равномерное, то  $p_A = p_B = mv$ . Вектора импульсов ортогональны, значит  $|\Delta\vec{p}| = \sqrt{2}mv$ .

**Ответ:**  $|\Delta\vec{p}| = \sqrt{2}mv$

### Задача 6



С незакрепленной горки массой  $M$  соскальзывает небольшая шайба  $m$  без трения. Высота горки  $H$ . Какова скорость тела сразу после соскальзывания с горки.

**Решение**

Пусть  $\vec{N}(t)$  - сила со стороны стола. Тогда

$$\vec{F} = m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{N}(t) \neq 0 \Rightarrow p_{\text{системы}} \neq \text{const}$$

Направим ось  $x$  вдоль стола горизонтально. Тогда в проекции на эту ось:  $F_x = 0 \Rightarrow p_x = \text{const}$ . То есть проекция импульса на ось  $x$  сохраняется. Значит  $0 = mv - Mu$ .

Из закона сохранения энергии

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}$$

В итоге

$$v = \sqrt{\frac{2gHM}{M+m}}$$

**Ответ:**  $v = \sqrt{\frac{2gHM}{M+m}}$