Московский физико-технический институт

Использование линз и систем линз в оптических системах.

Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

Москва 2014

Введение.

Для описания распространения и взаимодействия электромагнитного излучения с веществом используют различные приближения: геометрическую оптику, физическую (волновую) и квантовую оптику. В дальнейшем мы на некоторых примерах покажем их тесную взаимосвязь с используемыми оптическими объектами, а пока будем использовать приближение в виде геометрической оптики.

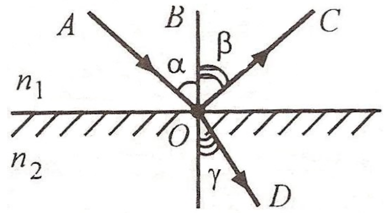
Приближение геометрической оптики используется в тех случаях, когда длина волны электромагнитного излучения мала по сравнению с характерными размерами тех областей, в которых исследуются свойства излучения и в которых изменяются характеристики среды. В этом случае электромагнитные волны можно приближённо считать плоскими и рассматривать их как совокупность световых лучей— линий, совпадающих с направлением распространения электромагнитной волны в каждой точке. Представления геометрической оптики справедливы, если можно пренебречь дифракцией электромагнитных волн.

Введём теперь некоторые понятия, которыми будем пользоваться в последствии.

Показатель преломления: Отношение скорости света в вакууме c к скорости света v в данной среде $n = c/v = \sqrt{\varepsilon\mu}$ называется показателем преломления этой среды, здесь ε и μ— диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, $\mu \approx 1$— для неферромагнитных сред, далее будем полагать, что $n \approx \sqrt{\varepsilon}$.

Среда называется *оптически однородной* , если показатель преломления везде одинаков. В оптически однородной среде лучи прямолинейны.

Законы отражения света: 1) падающий (АО), отражённый (ОС) лучи и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча (ВО), лежат в одной плоскости;



2) угол отражения равен углу падения $\alpha = \beta$.

Законы преломления света (законы Снелла):

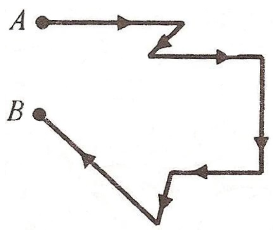
1) Лучи падающий (АО), преломленный (ОД) и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча (ВО), лежат в одной плоскости.

2) Отношение синусов углов падения и преломления равно отношению показателей преломления сред: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \dfrac{n_2}{n_1}$.

Если световой луч из оптически более плотной среды падает на границу раздела с оптически менее плотной средой ($n_1 > n_2$), то при углах падения $\alpha \geq \alpha_{np}$, где $\sin\alpha_{np} = \dfrac{n_2}{n_1}$, преломления света не происходит. При условии $\alpha = \alpha_{np}$ угол преломления $\gamma = \pi/2$, и при $\alpha > \alpha_{np}$ свет не проходит во вторую среду. Это явление называется полным внутренним отражением, а угол α_{np} предельным углом полного отражения. Если свет переходит из вещества с показателем преломления $n_1 = n$ в воздух, для которого $n_2 \approx 1$, то условие полного внутреннего отражения примет вид: $\sin \alpha_{np} = 1/n$.

Обратимость хода лучей: Световые лучи обладают свойством обратимости хода. Если световой луч, испущенный из точки А, двигаясь в оптической среде, попадает в точку В, в которой его направление распространения изменяют на противоположное, то он вновь попадёт в исходную точку А, пройдя по той же самой траектории.

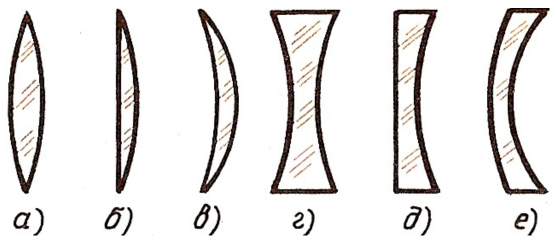
Каждая точка S источника света в геометрической оптике считается центром расходящегося пучка лучей, который называется гомоцентрическим.



Если после отражений и преломлений в различных средах пучок остаётся гомоцентрическим, то его центр S' называется изображением точки S в оптической системе. Изображение S' называется действительным, если в точке S' пересекаются сами лучи пучка, и мнимыми, если в ней пересекаются продолжения этих лучей (в направлении, противоположном направлению распространения лучей)

Линза — деталь из оптически прозрачного однородного материала, ограниченная двумя полированными преломляющими поверхностями вращения, например, сферическими или плоской и сферической. В настоящее время всё чаще применяются и «асферические линзы», форма поверхности которых отличается от сферы. В качестве материала линз обычно используются оптические материалы, такие как стекло, оптическое стекло, оптически прозрачные пластмассы и другие материалы.

В зависимости от форм различают собирающие (положительные) и рассеивающие (отрицательные) линзы. К группе собирательных линз обычно относят линзы, у которых середина толще их краёв (двояковыпуклые или плоско-выпуклые), а к группе рассеивающих — линзы, края которых толще середины (вогнутые). Следует отметить, что это верно только если показатель преломления у материала линзы больше, чем у окружающей среды. Если показатель преломления линзы меньше, ситуация будет обратной. Например пузырёк воздуха в воде — двояковыпуклая рассеивающая линза.

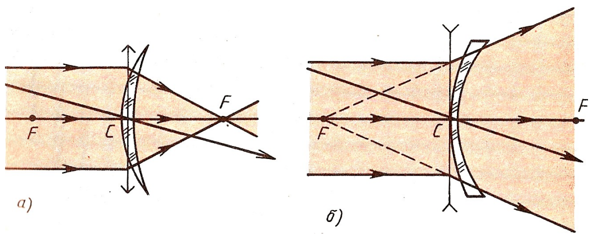


а) — двояковыпуклая, б) — плоско-выпуклая, в) — вогнуто-выпуклая, г) двояковогнутая, д) — плосковогнутая, е) — выпукло-вогнутая.

Свойства тонкой линзы.

Мы будем рассматривать тонкие линзы, толщина которых значительно меньше их радиусов. У тонких линз есть точка С, проходя через которую луч не преломляется. Эта точка называется *оптическим центром линзы* .

Прямая, проходящая через центр линзы, называется *побочной оптической осью* . Плоскость, проходящую через оптический центр тонкой линзы перпендикулярно главной оптической оси, называют *главной оптической плоскостью линзы* . Прямая, на которой лежат центры обеих сферических поверхностей линзы, называется *главной оптической осью* .



Если на стеклянную линзу, находящуюся в воздухе, направить параксиальный пучок света (лучи света лежат бесконечно близко к оптической оси центрированной оптической системы, или под весьма малыми углами к ней, и образующие на всех оптических поверхностях бесконечно малые углы падения и преломления) параллельно главной оптической оси, то у выпуклой линзы пучок соберётся в точке F (рис. а), называемой главным фокусом. Такие линзы относят к собирающим. Если такой же пучок направить на вогнутую линзу б), то пучок рассеится так, что лучи как будто бы исходят из точки F, которую называют мнимым главным фокусом рассеивающей линзы.

Пучок света, направленный на собирающую линзу параллельно побочной оптической оси, собирается в побочном фокусе. Все побочные фокусы лежат на фокальной плоскости, проходящей через главный фокус перпендикулярно главной оптической оси. У рассеивающей линзы можно тоже построить мнимые фокальные плоскости.

Построение изображений.

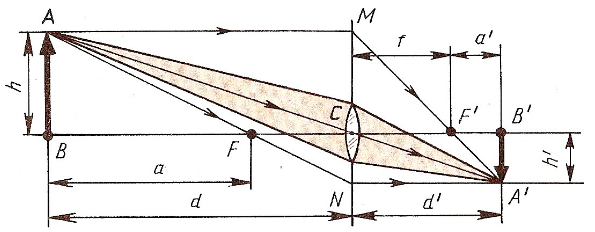
Пусть точка A находится на расстоянии d от собирающей линзы значительно дальше фокуса. Высота предмета $AB = h$ больше размера линзы, что практически всегда и бывает на практике. Из точки А выходит световой пучок; часть его, закрашенная на рисунке, проходит через линзу и собирается в точке A', которая является изображением точки А.

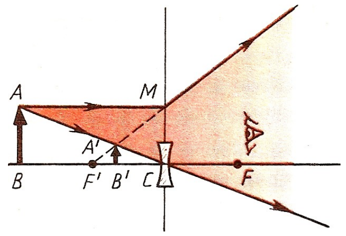
Чтобы найти положение точки A', проведём главную плоскость линзы MN и для построения выберем любые два из трёх стандартных (характерных) лучей:

а) луч, параллельный главной оптической оси; после преломления он проходит через главный фокус;

б)луч, совпадающий с побочной оптической осью; проходит без преломления через центр линзы;

в) луч, проходящий через главный фокус; после преломления он идёт параллельно главной оптической оси.





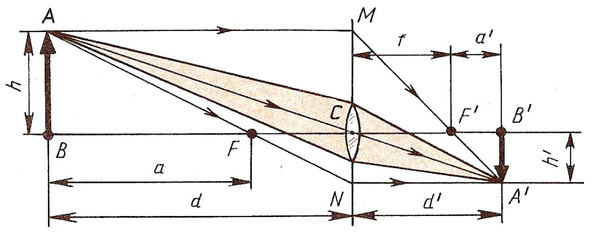
Построив изображение A', опускаем перпендикуляр на главную оптическую ось и находим точку B', которая является изображением точки B. Если же предмет имеет более сложную форму, нужно тем же способом построить изображения основных точек, определяющих форму предмета.

В данном случае мы получили действительное перевернутое уменьшенное изображение. Очевидно, что здесь предмет и его изображение обратимы — если в том месте, где находится изображение, поместить какой-то предмет, то его изображение (увеличенное) окажется там, где раньше располагался предмет.

Аналогичными построениями можно показать, что рассеивающая линза даёт прямое мнимое уменьшенное изображение предмета.

Формула тонкой линзы.

Расстояние от тонкой линзы до предмета d, расстояние до изображения d' и фокусное расстояние f связаны формулой. Выведем её. Пусть двояковыпуклая линза даёт изображение высотой h' предмета AB, расположенное на расстоянии BF$=a$ от левого фокуса линзы; изображение $A'B'$ расположено на расстоянии $B'F' = a'$ от правого фокуса линзы. Из подобия треугольников $A'B'F'$ и $F'CM$, а также треугольников ABF и FCN имеем: $\dfrac{h'}{a'} = \dfrac{h}{f}; \dfrac{h'}{f} = \dfrac{h}{a}$. Определим поперечное увеличение $\beta = \dfrac{h'}{h} = \dfrac{f}{a} = \dfrac{a'}{f}$. Отсюда следует так называемая формула Ньютона: $aa' = f^2$.



Но расстояние до предмета $d = a + f$, а расстояние до изображения $d' = a' + f$. Подставляя выражение для a и a' в формулу Ньютона, получим: $(d - f)(d' - f) = f^2$, или после приведения подобных членов: $dd' = d'f + df$. Разделив обе части выражения на $d'df$, получим:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d'}$$

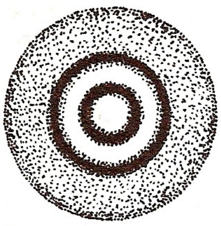
Это соотношение носит название формулы линзы.

В формуле линзы следует учитывать знаки входящих в неё величин. Принято считать фокусное расстояние собирающей линзы положительным числом, фокусное расстояние рассеивающей линзы — отрицательным. Расстояние от предмета до линзы и от действительного изображения до линзы считают положительным числами, расстояние от линзы до мнимого изображения — отрицательным числом.

Фокусное расстояние и оптическая сила линзы.

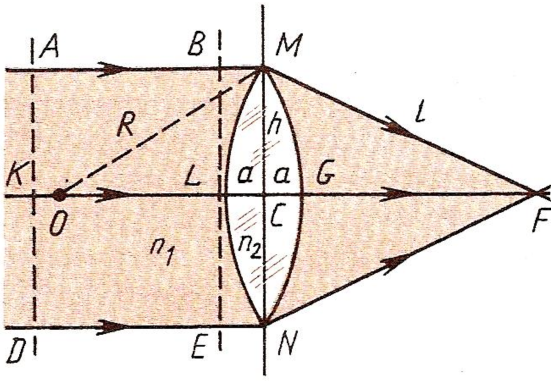
Опыт показывает, что фокусное расстояние линзы зависит от радиусов кривизны её поверхностей, а также показателей преломления вещества, из которого изготовлена линза, и окружающей её среды. Получим выражение для фокусного расстояния на примере двояковыпуклой линзы. Для простоты вывода будем считать, что обе сферические поверхности имеют одинаковый радиус кривизны R, а относительный показатель преломления линзы по отношению к окружающей среде равен $n = n_2/n_1$.

Все представления, используемые в волновой теории, применимы к построению изображений в линзах. В самом деле, линза вырезает из всего светового потока, даваемого источником, определённую часть, следовательно, действие линзы сравнимо с действием отверстия в непрозрачном экране. Поэтому за линзой возникают дифракционные максимумы. В точке A', представляющей собой изображение точки A, находится главный (центральный) максимум.



Но это означает, что колебания, исходящие из точки A, пройдя через линзу, приходят в точку A' в одной и той же фазе. Следовательно, хотя волны проходят в линзе разные расстояния, оптический путь у них один и тот же.

Пусть на двояковыпуклую линзу параллельно главной оптической оси падает параллельный пучок — по волновой терминологии это плоская волна AKD.



До плоскости BLE все колебания распространяются в однородной среде с одинаковой скоростью, так что на этой плоскости все точки колеблются в одинаковой фазе. Далее волны будут распространяться в среде с другим показателем преломления, следовательно, и с другой скоростью. Однако они должны прийти в фокус F в одинаковой фазе, следовательно, пройти одинаковые оптические пути.

Сравним оптические пути по лучу $ABMF$ и по лучу $KLGF$. Волна из точки B проходит расстояние $BM + MF = a + l$ в среде с показателем преломления n_1. Следовательно, оптический путь $s_1 = n_1(a + l)$.

Волна из точки L проходит расстояние $LG = 2a$ в веществе с показателем преломления n_2 и расстояние $GF = f - a$ в среде с показателем преломления n_1. Следовательно, оптический путь равен: $s_2 = 2an_2 + n_1(f - a)$.

Приравняв оптические пути, получим: $n_1(a + l) = 2an_2 + n_1(f - a)$, или с учётом равенства $n = n_2/n_1$: $a + l = 2an + f - a$, откуда:

$$l = 2a(n-1) + f \qquad (1)$$

Из теоремы Пифагора следует $h^2 = l^2 - f^2$, с другой стороны, $h^2 = R^2 - (R - a)^2 = 2Ra - a^2$. Поскольку линза тонкая, то есть $a \ll R$, то $a^2 \ll 2Ra$; следовательно, $h^2 = 2Ra$. Приравняв выражение для h^2, получим: $l^2 - f^2 = 2Ra$. Подставив значение l из соотношения (1), будем иметь: $4a^2(n-1)^2 + 4af(n-1) + f^2 - f^2 = 2Ra$.

Учитывая, что из-за тонкости линзы $a^2 \ll af$, получим после сокращений:

$$f = \frac{R}{2(n-1)}$$

Оптическая сила.

Величина, обратная фокусному расстоянию линзы, называется её оптической силой. Для двояковыпуклой линзы с одинаковыми радиусами оптическая сила $\varPhi = \dfrac{1}{f} = (n-1)\dfrac{2}{R}$.

Можно показать, что для линзы, у которой поверхности имеют радиусы кривизны ($R_1 \neq R_2$), справедлива формула:

$$\varPhi = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

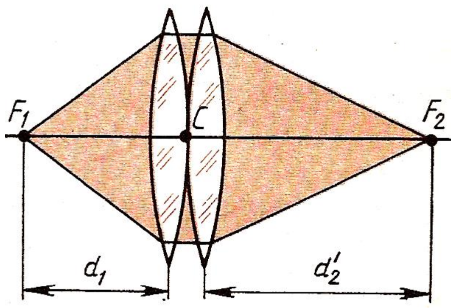
В этой формуле радиусам приписываются определённые знаки. Если поверхность выпуклая, то радиус кривизны считается положительным; у вогнутой поверхности радиус кривизны отрицательный. У плоской поверхности радиус кривизны бесконечно велик.

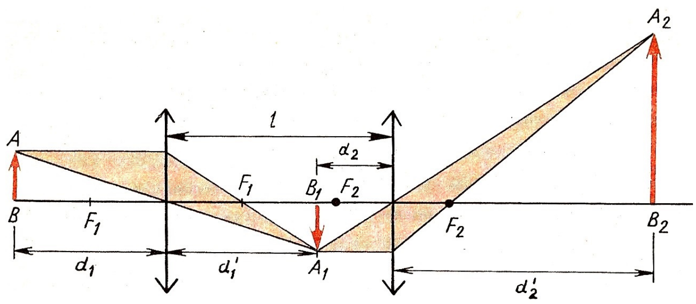
Единица оптической силы линзы в СИ — диоптрия (дптр), 1дптр — это оптическая сила линзы с фокусным расстоянием 1м. Чтобы получить оптическую силу линзы в диоптриях, надо её фокусное расстояние выразить в метрах.

Примеры.

Задача №1 Докажите, что оптическая сила двух соприкасающихся тонких линз равна сумме их оптических сил.

Решение $\mapsto$ Предположим, что вторая линза более длиннофокусная ($f_2 > f_1$), а также, что обе линзы — собирающие.

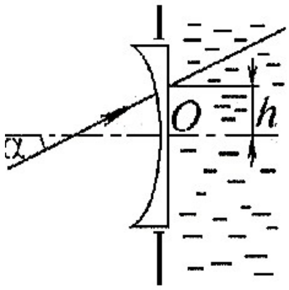




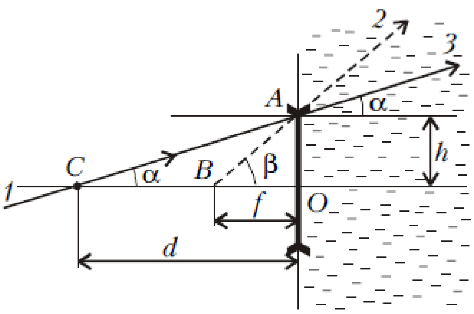
Пусть источник света находится в фокусе первой линзы ($d_1 = f_1$). Пучок света, пройдя первую линзу, далее распространяется параллельно главной оптической оси. Этот пучок, попав на вторую линзу, сходится в её фокусе, то есть $d_2' = f_2$. Таким образом, для системы из двух линз получаем $\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2'} = \dfrac{1}{f_{сист}}$, или $\dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2} = \dfrac{1}{f_{сист}}$. Подставляя $\dfrac{1}{f} = \varPhi$, получим $\varPhi_1 + \varPhi_2 = \varPhi$.

Ч.т.д.

Задача №2 Тонкая рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F = 15$ см прикреплена к стенке аквариума, заполненного водой с показателем преломления $n = 4/3$. На линзу под углом α падает параллельный пучок света. Известно, что луч, прошедший сквозь линзу на расстоянии h от её оптического центра, не изменяет своего направления. Найти h, если известно значение тангенса угла падения на линзу $\operatorname{tg}\alpha = 0.08$.



Решение $\mapsto$ Проведём луч $1A$, падающий на линзу в точке А на расстоянии h от главной оптической оси, которая пересекается этим лучом в точке С на расстоянии d от линзы. Из геометрии рисунка видно, что $d = \dfrac{h}{\operatorname{tg}\alpha}$.

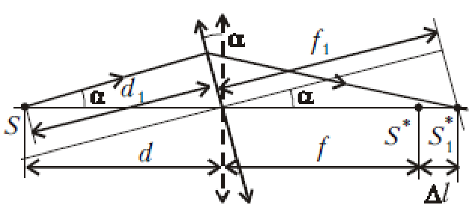


Если бы в аквариуме не было воды, то луч света после преломления линзой пошёл бы в направлении А2. В случае заполненного водой аквариума, по условию задачи, он идёт в направлении А3, не изменяя своего первоначального направления. Пусть β — угол между лучом А2 и оптической осью линзы и BO$= f$. Очевидно, что $\sin\beta/\sin\alpha = n$, или, так как углы β и α маленькие, $\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{tg\alpha} = n$. Кроме того, $f = \dfrac{h}{\operatorname{tg}\beta}$. В соответствии с формулой рассеивающей линзы $\dfrac{1}{d} - \dfrac{1}{f} = -\dfrac{1}{F}$.

Решая систему полученных четырёх уравнений, для искомой величины получаем $h = F(n-1)\operatorname{tg}\alpha = 0.4$ м $= 40$ см.

Ответ: $h = F(n-1)\operatorname{tg}\alpha =$40 см.

Задача №3 Точечный источник света S расположен на расстоянии $d = 40$*см* от собирающей линзы на её главной оптической оси. Оптическая сила линзы $D = 5$ дптр. При повороте линзы на некоторый угол относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через оптический центр линзы, изображение источника сместилось на $\triangle l = 10$*см*. Найдите угол поворота линзы.



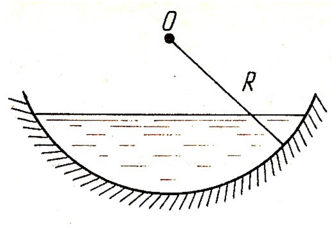
Решение $\mapsto$ Изображение источника S' сначала расположено на главной оптической оси линзы на расстоянии f от линзы. По формуле линзы, $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{f}=D$, откуда $f=\dfrac{d}{Dd-1}=0.4$ м.

При повороте линзы на угол α её главная оптическая ось тоже поворачивается на угол α, а изображение S_1' смещается на $\triangle l$. Из рисунка видно, что $d_1=d\cos\alpha$ и $f_1=(f+\triangle l)\cos\alpha$. Формула линзы в этом случае примет вид $\dfrac{1}{d_1}+\dfrac{1}{f_1}$=$D$.

Отсюда для угла α находим $\cos\alpha=\dfrac{d+f+\triangle l}{Dd(f+\triangle l)}$=0.9, и $\alpha=\arccos 0.9$.

Ответ: $\alpha=\arccos 0.9$.

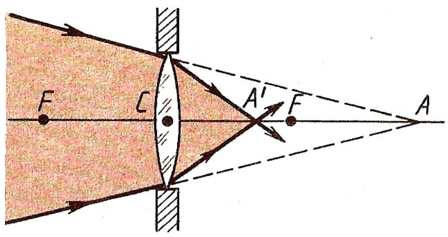
Задача №4 На горизонтально расположенное вогнутое зеркало с радиусом кривизны 0ю5 м налили воду. Какова оптическая сила этой системы?



Решение $\mapsto$ Данная оптическая система состоит из вогнутого зеркала с радиусом кривизны $R=0.5$ м и плосковыпуклой водяной линзы с показателем преломления $n=1,33$ и радиусами кривизны $R=0.5$ и $R_1=\infty$. Поскольку оба оптических прибора сложены вплотную, то их оптическая сила равна их сумме. При этом следует учесть, что через линзу свет проходит дважды- при падении на зеркало и отражении от него. Имеем: $\varPhi=\varPhi_з+2\varPhi_л$= $\dfrac{2}{R}+2(n-1)\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R_1}\right)=\dfrac{2}{R}+\dfrac{2(n-1)}{R}=\dfrac{2n}{R}$ $=5.32$ дптр.

Ответ: $\varPhi=\varPhi_з+2\varPhi_л=\dfrac{2n}{R}=5.32$ дптр.

Задача №5 Через отверстие в непрозрачном экране проходит сходящийся пучок, собирающийся в точке A, находящейся от экрана на расстоянии AC=42 см. Если в отверстие вставить собирающую линзу с фокусным расстоянием 21 см, то пучок соберётся в точке A'. Определите расстояние $A'C$.



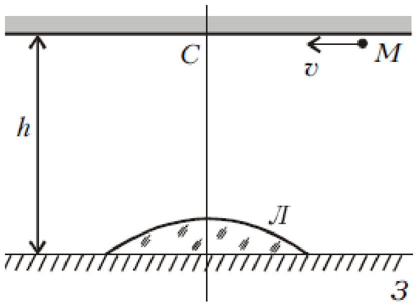
Решение $\mapsto$ Точка A является "мнимым предметом" для действительного изображения A'. Имеем $d=-42$ см, $f=21$ см. Подставив в формулу линзы значения величин, получим: $-\dfrac{1}{42}+\dfrac{1}{d'}=\dfrac{1}{21}$, или $\dfrac{1}{d'}=\dfrac{1}{21}+\dfrac{1}{42}=\dfrac{3}{42}$. Отсюда $A'C=d'=14$ см.

Ответ: $A'C=d'=14$ см.

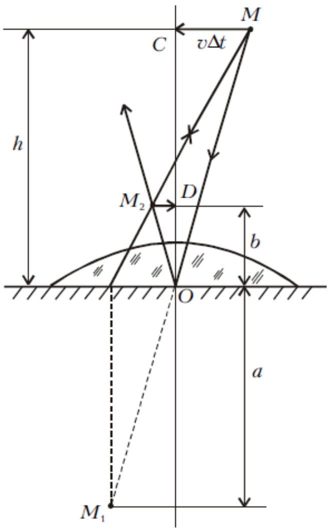
Задача №6 Как изменится оптическая сила собирающей линзы, если её температура повысится?

Ответ: уменьшится, поскольку с повышением температуры уменьшается оптическая плотность стекла линзы и увеличивается радиус кривизны поверхностей, образующих линзу, поэтому фокусное расстояние линзы увеличивается, что и приводит к уменьшению оптической силы линзы.

Задача №7 В комнате на столе лежит плоское зеркало, на котором находится тонкая плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием F =40см. По потолку ползёт муха со скоростью $v = 2см/сек$. Расстояние от потолка до зеркала $h = 220см$. На каком расстоянии от зеркала находится изображение мухи в данной оптической системе? Чему равна скорость изображения мухи в тот момент, когда она пересекает главную оптическую ось линзы (в точке С)?



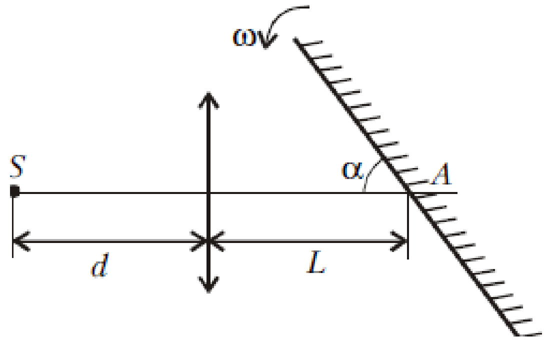
Решение $\mapsto$ Построим изображение мухи в оптической системе линза — зеркало — линза. На рисунке точка M_1 — первое изображение мухи, даваемое линзой после отражения лучей от зеркала. Запишем формулу линзы для первого случая: $\frac{1}{h} + \frac{1}{a} = \frac{1}{F}$ и для второго: $-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$.



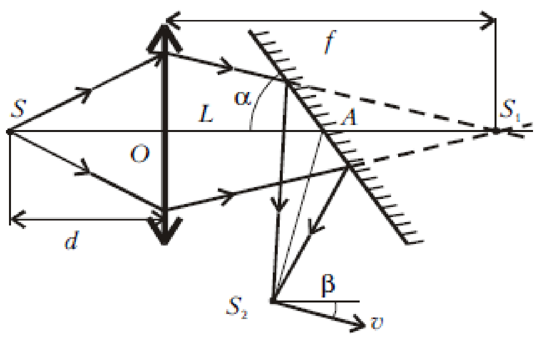
Отсюда находим искомое расстояние: $b = \dfrac{Fh}{2h - F} = 22см$. Из подобия треугольников ОСМ и ODM_2 имеем $\dfrac{CM}{DM_2} = \dfrac{v\triangle t}{u\triangle t} = \dfrac{h}{b}$, где u — скорость изображения мухи. Таким образом, $u = v\dfrac{b}{h} = 0.2см/с$.

Ответ: $u = v\dfrac{b}{h} = 0.2см/с$.

Задача №8 На главной На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 20см$ расположено плоское зеркало на расстоянии $L = 3F$ от линзы. Зеркало вращается с угловой скоростью $\omega = 0.1сек^{-1}$ вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку A. На расстоянии $d = 5F/4$ от линзы находится точечный источник света S. На каком расстоянии от точки A получится изображение источника в системе линза- зеркало в результате однократного прохождения лучей от источника через линзу? Найдите скорость (модуль и угол между вектором скорости и главной оптической осью) этого изображения в момент, когда угол между плоскостью зеркала и главной оптической осью $\alpha = \pi/3$.



Решение $\mapsto$ Построение изображения источника в данной оптической системе показано на рисунке. Здесь S_1- изображение источника, даваемое линзой, S_2- изображение "источника" S_1 в зеркале. Из формулы линзы $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{F}$ находим $f = \dfrac{Fd}{d - F} = 5F = 100см$.

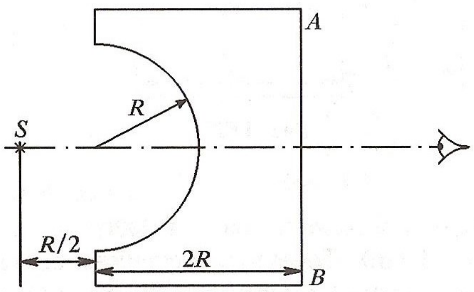


Из соображений симметрии $AS_2 = AS_1$, а $AS_1 = f - L$. Отсюда находим искомое расстояние: $AS_2 = f - L = 2f = 40CM$.

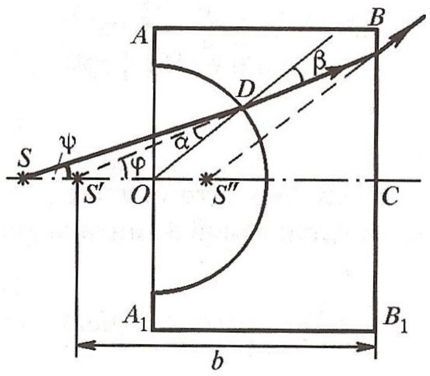
Вектор скорости изображения $\vec{v}$ перпендикулярен отрезку AS_2 и с оптической осью составляет угол $\beta = 2\alpha - \pi/2 = \pi/6$. Модуль скорости изображения равен $v = \dfrac{\triangle\beta}{\triangle t} AS_2 = 2\dfrac{\triangle\alpha}{\triangle t} AS_2 = 2\omega \cdot F = 8см/c$.

Ответ: $v = 2\omega \cdot F = 8см/c$, $\beta = 2\alpha - \pi/2 = \pi/6$.

Задача №9 В стеклянной пластине толщиной $a = 2R$ вырезана половина шара радиуса $R = 10$ см. Показатель преломления стекла $n = 1.5$. Наблюдатель рассматривает через получившуюся толстую линзу точечный источник света S, расположенный на расстоянии $5R/2$ от плоской поверхности AB. На каком расстоянии от поверхности AB он видит изображение источника?



Решение $\mapsto$ Определим положение изображения источника S', даваемое преломляющей поверхностью AA_1. Виду малости углов имеем $\alpha/\beta = n$ (см. рисунок). Из теоремы синусов для треугольника $OS'D$ $(b-2R)/\beta = R/\varphi$. Аналогично для треугольника OSD $R/2\alpha = R/\psi$, откуда $\psi = 2\alpha$ или $\varphi = \psi - \alpha = 3\beta n - \beta$. Решая второе уравнение относительно b, получаем $b = (6n-1)R/(3n-1)$.

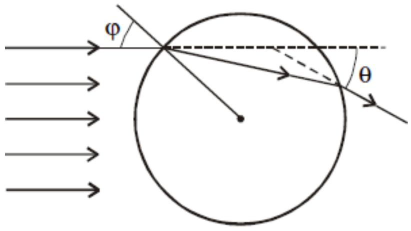


Определим положение изображения источника S'' при преломлении на границе BB_1. Очевидно, что $S''C = b/n$. Окончательно, $S''C = (6n-1)R/(3n-1)n = 15$ см.

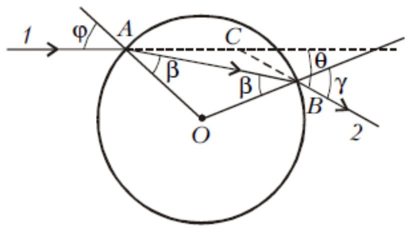
Ответ: $S''C = (6n-1)R/(3n-1)n = 15$ см.

Задачи повышенной сложности.

Задача №10* Шар из оптически прозрачного материала помещён в параллельный пучок света. Угол падения одного из лучей на поверхность шара $\varphi = \mathrm{arctg}(4/3)$, а угол его отклонения от первоначального направления после двух преломлений на поверхности шара $\theta = 2\,\mathrm{arctg}(7/24)$. Найдите показатель преломления материала шара.



Решение $\mapsto$ Луч света 1А, падающий на шар под углом φ, проходит в шаре по линии АВ, составляющей углы β с радиусами АО и ВО, так что $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\beta} = n$.



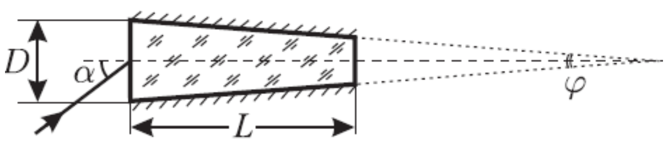
Для выходящего из шара луча В2 имеем $\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \dfrac{1}{n}$.

Рассмотрим треугольник АВС. Очевидно, что он равнобедренный и угол θ является его внешним углом; следовательно, $\theta = 2(\varphi - \beta) = 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{7}{24}$, или $\mathrm{tg}(\phi - \beta) = \dfrac{7}{24}$. Отсюда, используя известную тригонометрическую формулу $tg(\varphi - \beta) = (\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\beta)/(1 + \mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\beta)$, получим $\mathrm{tg}\,\beta = 3/4$.

Окончательно, для показателя преломления находим $n = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\beta} = \dfrac{\sqrt{1 + 1/\mathrm{tg}\,\beta^2}}{\sqrt{1 + 1/\mathrm{tg}\,\varphi^2}} = 4/3$.

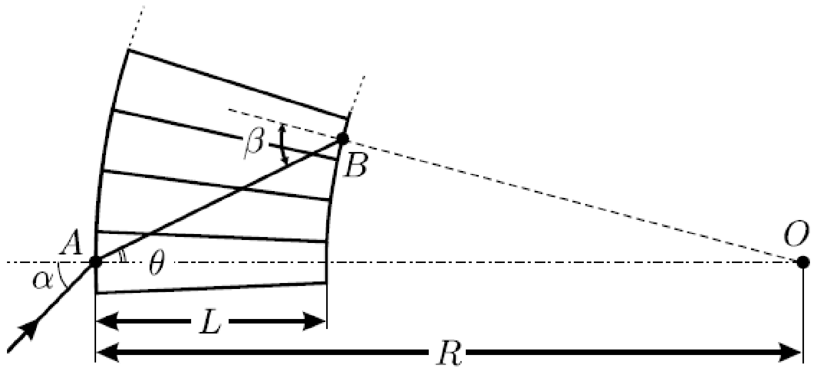
Ответ: $n = \dfrac{\sqrt{1 + 1/\mathrm{tg}\,\beta^2}}{\sqrt{1 + 1/\mathrm{tg}\,\varphi^2}} = 4/3.$

Задача №11* Стеклянная пластинка имеет в сечении форму равнобочной трапеции (см. рисунок). Основание трапеции равно D, высота L, а угол между боковыми сторонами $\varphi \ll 1$. Боковые поверхности пластинки посеребрены, показатель преломления стекла равен n. При каких углах падения α луч света, падающий на основание, будет проходить через пластинку?



Решение $\mapsto$ Луч света, попав в пластинку, несколько раз отразится от её посеребрённых боковых поверхностей, после чего попадёт на малое основание пластинки. Луч пройдёт через него только в том случае, если угол падения света не превысит угол полного внутреннего отражения, величина которого даётся формулой $\sin\beta_{max} = 1/n$.

Для того, чтобы было проще рассматривать отражения от боковых поверхностей, воспользуемся следующим приёмом, который позволяет заменить распространение света с многократными отражениями на прямолинейное. Последовательно отразим несколько раз пластинку относительно её боковой поверхности, на которой происходит очередное отражение света и представим, что луч проходит эту боковую поверхность насквозь (см. рис.). Будем продолжать эту процедуру до тех пор, пока луч не упрётся в малое основание после очередного «отражения » пластинки. Фактически это выглядит так, как будто мы отражаем пластинку вместе с идущим в ней лучом. При этом величина угла падения света на малое основание после последнего «отражения» пластинки будет совпадать с величиной угла падения на основание реальной пластинки.



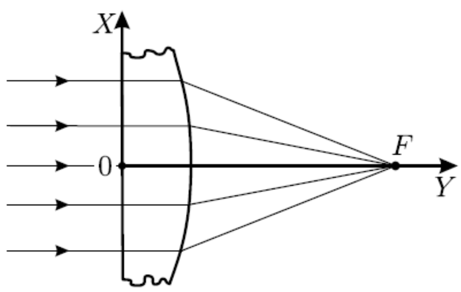
Теперь можно приступить к определению угла α. Введём обозначения так, как это показано на рисунке, и применим к треугольнику ABO теорему синусов: $\dfrac{\sin\theta}{R-L} = \dfrac{\sin(\pi-\beta)}{R}$. Отсюда, учитывая, что $R = \dfrac{D}{2\sin(\varphi/2)}$, получим: $\sin\theta_{max} = \left(1 - \dfrac{L}{R}\right)\sin\beta_{max} = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{2L}{D}\sin(\varphi/2)\right)$. Интересующий нас угол определяется из соотношения $\sin\alpha_{max} = n\sin\theta_{max}$, откуда, с учётом малости угла φ, окончательно найдём: $\sin\alpha_{max} \approx \left(1 - \dfrac{L\varphi}{D}\right)$.

Следовательно, луч света пройдёт через пластинку при углах падения на её основание

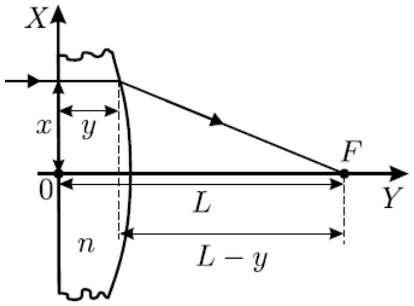
$\alpha \le \alpha_{max} \approx \arcsin\left(1 - \dfrac{L\varphi}{D}\right)$.

Ответ: $\alpha \le \alpha_{max} \approx \arcsin\left(1 - \dfrac{L\varphi}{D}\right)$.

Задача №12* Широкий параллельный пучок света перпендикулярно падает на плоскую поверхность стеклянной пластины с показателем преломления n. Найдите, какому условию должна удовлетворять функция $y = y(x)$ (см. рисунок), определяющая форму правой поверхности пластины, для того, чтобы все лучи, пройдя через пластину, собирались бы в точке F, и покажите, что для малых отклонений x от оси симметрии правая поверхность представляет собой сферу.



Решение $\mapsto$ Световой луч, проходящий через некоторые точки A и B, распространяется по такому пути между ними, который имеет экстремальную оптическую длину (это утверждение называется принципом Ферма). Для параллельного пучка лучей, проходящих через нашу пластину, это означает, что все лучи, идущие от её левой поверхности до фокуса, имеют одинаковую оптическую длину. Кроме того, понятно, что правая поверхность пластины должна быть осесимметричной — в противном случае параллельный пучок не сможет собраться в фокусе.



Изобразим на рисунке сечение пластины плоскостью, в которой лежит указанная ось симметрии. Обозначим расстояние от плоской поверхности пластины до фокуса через L и рассмотрим произвольный луч из пучка, упавший на плоскую поверхность пластины на расстоянии x от начала координат. Тогда оптическая длина пути для этого луча равна $l = ny + \sqrt{x^2 + (L-y)^2} = const$,так как все лучи независимо от точки падения должны иметь одинаковую оптическую длину. Это условие представляет собой записанное в неявном виде искомое уравнение функции $y(x)$, определяющей форму правой поверхности пластины.

Для малых отклонений x падающих лучей от оси симметрии (при $x \ll (L-y)$) полученное уравнение можно преобразовать. Вынесем из под знака корня величину $(L-y)$ и применим приближённую формулу $\sqrt{1+z} \approx 1 + (z/2)$. В результате получим: $y(n-1) + L + \dfrac{x^2}{2(L-y)} \approx const.$

Для удобства представления этого результата найдём максимальную толщину пластины y_0. Для этого положим в полученном уравнении $x = 0$. Тогда $y_0 = (const - L)/(n-1)$ и $y \approx y_0 - \dfrac{x^2}{2(n-1)(L-y_0)}$.

При записи последнего уравнения мы учли, что вблизи оси симметрии пластины $L - y \approx L - y_0$. Полученное уравнение при $x \ll (L-y)$ представляет собой уравнение сферы радиусом

$R = (L - y_0)(n-1)$.

Отметим, что так как $L - y_0 = F$ (где F — фокусное расстояние), то $R = F(n-1)$, что совпадает с известным результатом для радиуса кривизны поверхности линзы.

Ответ: $y \approx y_0 - \dfrac{x^2}{2(n-1)(L-y_0)}$.

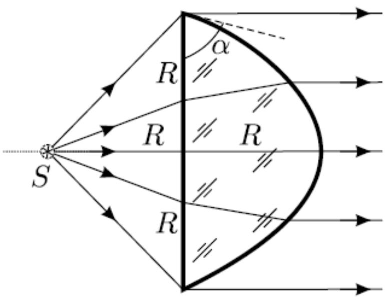
Дополнительно

Принцип Ферма (принцип наименьшего времени Ферма) в геометрической оптике — постулат, предписывающий лучу света двигаться из начальной точки в конечную точку по пути, минимизирующему (реже — максимизирующему) время движения (или, что то же самое, минимизирующему оптическую длину пути). В более точной формулировке: свет выбирает один путь из множества близлежащих, требующих почти одинакового времени для прохождения; другими словами, любое малое изменение этого пути не приводит в первом порядке к изменению времени прохождения.

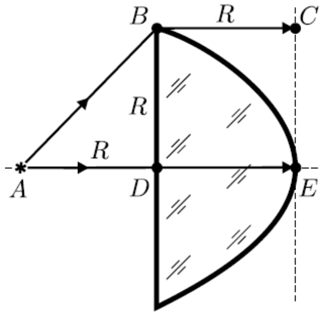
Этот принцип, сформулированный в I в. Героном Александрийским для отражения света, в общем виде был сформулирован Пьером Ферма в 1662 году в качестве самого общего закона геометрической оптики. В разнообразных конкретных случаях из него следовали уже известные законы: прямолинейность луча света в однородной среде, законы отражения и преломления света на границе двух прозрачных сред.

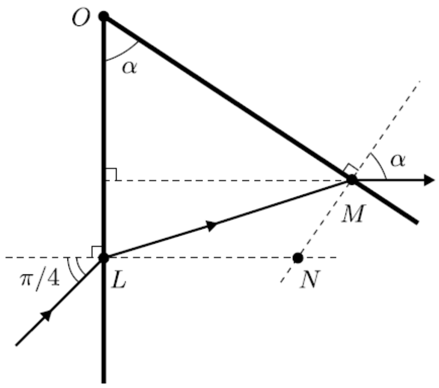
Принцип Ферма представляет собой предельный случай принципа Гюйгенса-Френеля в волновой оптике для случая исчезающей малой длины волны света и является одним из экстремальных принципов в физике.

Задача №13* Имеется толстая плоско — выпуклая однородная осесимметричная линза (см. рисунок). Радиус R её плоского основания равен её толщине. Угол α между ограничивающими её поверхностями в месте их пересечения меньше $\pi/2$. На её оси симметрии со стороны плоского основания помещают точечный источник света. Расстояние от него до линзы равно R. Выпуклая поверхность линзы гладкая, а её форма такова, что все лучи, прошедшие через линзу без отражений, образуют строго параллельный пучок с плоским фронтом, диаметр которого равен диаметру линзы. Определите угол α.



Решение $\mapsto$ Пусть материал линзы имеет показатель преломления n, а скорость света в вакууме равна c. Тогда скорость света, распространяющегося внутри линзы, равна c/n. Так как линза осесимметрична, а фронт прошедшей через неё волны становится плоским, то времена распространения света от источника по путям ABC и ADE (см. рис.) должны быть одинаковыми: $\dfrac{R\sqrt{2}}{c}+\dfrac{R}{c}=\dfrac{R}{c}+\dfrac{R}{c/n}$.





Отсюда получаем, что показатель преломления материала линзы $n=\sqrt{2}$.

Рассмотрим далее преломление луча света вблизи пересечения поверхностей, ограничивающих линзу (см. рис.). Угол падения луча на плоскую поверхность равен $\varphi=\pi/4$. Из закона преломления света находим: $n\sin(\angle MLN)=\sin\varphi$, откуда $\sin(\angle MLN)=\dfrac{\sin\varphi}{n}=\dfrac{1}{2}$, то есть $\angle MLN=\pi/6$. Далее, из треугольника MLN получаем: $\alpha+\pi/2-\angle LMN+\pi/2-\angle MLN=\pi$, откуда, с учётом предыдущего соотношения, $\angle LMN=\alpha-\pi/6$.

Рассматривая преломление луча на выпуклой поверхности, получаем:

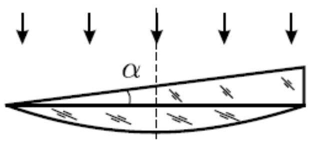
$n\sin(\angle LMN) = \sin\alpha$, или $\sqrt{2}\sin(\alpha - \pi/6) = \sin\alpha$.

Отсюда имеем: $\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \dfrac{1}{2}\cos\alpha\right) = \sin\alpha$, и $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Окончательно, $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \approx \operatorname{arctg}(1.73 + 1.41) = \operatorname{arctg}(3.14) \approx 72^\circ$

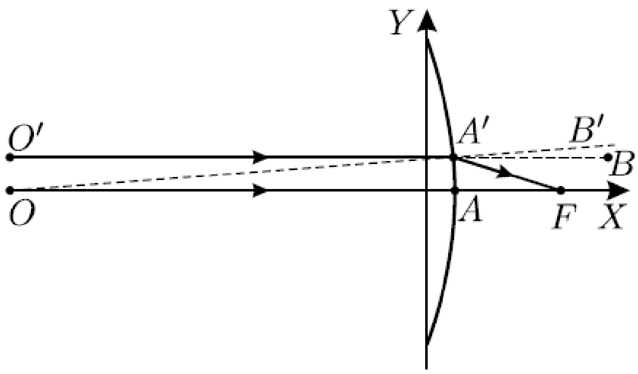
Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg}(3.14) \approx 72^\circ$.

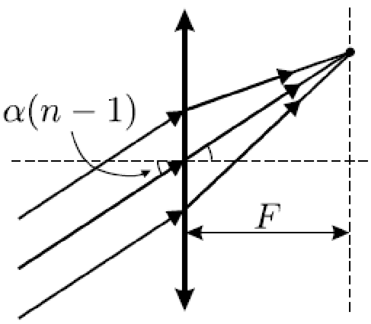
Задача №14* Некто изготовил странную плосковыпуклую линзу. Радиус сферической поверхности R, угол α мал. Толщина линзы в любом месте много меньше её радиуса r. Что сделает линза с параллельным пучком света, падающим на неё, как показано на рисунке? Будет ли у неё фокус, и если да, то где? Показатель преломления стекла линзы равен n.



Решение ↦ Рассматриваемая в условии необычная линза состоит из призмы и обычной плосковыпуклой линзы, разделённых плоской поверхностью. Введём систему координат следующим образом: ось Y расположим в плоскости, разделяющей призму и линзу, и направим её перпендикулярно ребру призмы; ось X направим от призмы перпендикулярно границе её раздела с линзой вдоль радиуса сферической поверхности. Далее задачу можно решать двумя способами.

1) Заметим, что лучи, падающие на поверхность призмы под некоторым углом α (так, как показано на рисунке в условии), внутри необычной линзы будут проходить параллельно плоскости XY под углом $\beta = \alpha\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ к оси X.





Рассмотрим далее параллельный пучок лучей, падающий на сферическую поверхность, разделяющую среды с показателями преломления n и 1 (см. рис.). Пусть точка O — центр преломляющей сферической поверхности, OA — луч, падающий нормально к этой поверхности, луч $O'A'$ проходит параллельно OA на достаточно близком от OA расстоянии и преломляется на сферической поверхности в точке AO. Преломленный луч $A'F$ пересекает луч OA в точке F, которая, очевидно, является фокусом данной сферической поверхности. Из закона преломления следуют следующие соотношения:

$\angle O'A'O = \angle B'A'B = \gamma$, $\angle B'A'F = n\gamma$, $\angle BA'F = \angle A'FA = (n-1)\gamma$. Расстояние между лучами $O'A'$ и OA равно $R\gamma$, с одной стороны, и $AF \cdot (n-1)\gamma$, с другой. Поэтому $AF = \dfrac{R}{n-1}$; $OF = R + AF = \dfrac{Rn}{n-1}$.

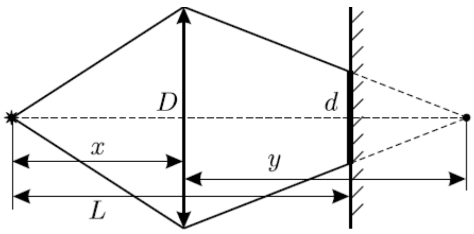
Если теперь рассмотреть параллельный пучок лучей, идущий под углом β к оси X, то картинка на рисунке целиком повернётся на угол β, и пучок соберётся в фокусе с координатами $\left(\dfrac{R}{n-1}; \dfrac{Rn\beta}{n-1}\right)$. Поскольку $\beta = \alpha\dfrac{n-1}{n}$, окончательно находим координаты фокуса необычной линзы: $\left(\dfrac{R}{n-1}; R\alpha\right)$.

2) Прохождение параллельного пучка лучей через рассматриваемую систему осуществляется в две стадии: прохождение через призму, а затем — через обычную линзу. Будем считать, что между призмой и этой линзой имеется тонкая воздушная прослойка (она, очевидно, не может никак влиять на работу оптической системы). При прохождении через призму пучок лучей после выхода из неё в воздух поворачивается на угол $n\beta = \alpha(n-1)$. Если теперь этот пучок попадёт из воздуха в линзу, то после прохождения через неё лучи соберутся в фокальной плоскости линзы в точке с координатами $(F; \alpha(n-1)F)$ — см. рисунок. Отсюда, учитывая, что $F = \dfrac{R}{n-1}$, получаем координаты фокуса системы, найденные выше.

Ответ: см. решение.

Задача №15* Точечный источник света находится на расстоянии L от экрана. Тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $F > L/4$, параллельную экрану, перемещают между источником и экраном. При каком положении линзы диаметр пятна, видимого на экране, будем минимальным?

Решение $\mapsto$ На рисунке изображён ход лучей через линзу.



Обозначим расстояния от линзы до источника и до изображения x и y соответственно, диаметр линзы D, диаметр пятна на экране d.

Тогда из подобия треугольников: $d = D \cdot \dfrac{x+y-L}{y} = D\left(\dfrac{x-L}{y} + 1\right)$.

Найдём такое x, при котором d минимально. Отметим, что не имеет смысла рассматривать значения $x \leq F$, так как в этом случае $d > D$, и размер пятна явно не может быть минимальным. Ясно, что d будет минимальным тогда, когда минимальное значение примет функция $f = \dfrac{x-L}{y}$.

Применяя формулу тонкой линзы, получаем: $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{F} - \dfrac{1}{x}$.

Следовательно, $f = \dfrac{(x-L)(x-F)}{Fx} = \dfrac{1}{F}\left(x + \dfrac{LF}{x} - (L+F)\right) = \dfrac{1}{F}\left(\left(\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{LF}}{\sqrt{x}}\right)^2 - (\sqrt{L} - \sqrt{F})^2\right)$.

Выражение $\left(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{LF}}{x}\right)^2-(\sqrt{L}-\sqrt{F})^2$ минимально тогда, когда первое слагаемое равно нулю: $\sqrt{x}=\frac{\sqrt{LF}}{\sqrt{x}}$. Отсюда $x_0=\sqrt{LF}$.

Этому значению x_0 соответствует минимально возможный диаметр пятна на экране:

$d=D\cdot\frac{2\sqrt{LF}-L}{F}$.

Ответ: $d=D\cdot\frac{2\sqrt{LF}-L}{F}$.

Задача №16* На расстоянии $a=20$ см от тонкой собирающей линзы вдоль её главной оптической оси расположена тонкая короткая палочка. Длина её действительного изображения, даваемого линзой, в $k=9$ раз больше длины палочки. Во сколько раз изменится длина изображения, если сдвинуть палочку вдоль оси на $\triangle a=5$ см дальше от линзы? Примечание: при $\mid x\mid\ll 1$ справедлива формула $\frac{1}{(1+x)}\approx 1-x$.

Решение $\mapsto$ Пусть фокусное расстояние линзы F, длина палочки l, длина её изображения L, причём $l\ll a, L\ll b$, где b — расстояние от изображения палочки до линзы. Тогда в соответствии с формулой тонкой линзы, для положений одного из концов палочки и его изображения имеем:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}\qquad(1)$$

Если второй конец палочки находится ближе к линзе, то можно записать:

$$\frac{1}{a-l}+\frac{1}{b+L}=\frac{1}{F},\text{ или }\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-(l/a)}+\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1+(L/b)}=\frac{1}{F}.$$

Поскольку $1/(1+x)\approx 1-x$ при $\mid x\mid\ll 1$, то последнее соотношение можно переписать в виде:

$$\frac{1}{a}\left(1+\frac{l}{a}\right)+\frac{1}{b}\left(1-\frac{L}{b}\right)\approx\frac{1}{F}\qquad(2)$$

Вычитая из (2) соотношение (1), получаем: $\frac{l}{a^2}-\frac{L}{b^2}\approx 0$, откуда продольное увеличение линзы $k=\frac{L}{l}=\left(\frac{b}{a}\right)^2$, и $b=\sqrt{k}a$. Подставляя это выражение для b в соотношение (1), получаем $F=\frac{\sqrt{k}a}{\sqrt{k}+1}$.

При новых расстояниях от палочки до линзы $a_1=a+\triangle a$, от изображения до линзы $b_1=\frac{a_1F}{a_1-F}$ и новой длине изображения L_1 для нового коэффициента увеличения имеем:

$$k_1 = \frac{L_1}{l} = \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{F}{a_1 - F}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{k}a/(\sqrt{k}+1)}{a + \triangle a - \sqrt{k}a/(\sqrt{k}+1)}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{k}a}{(a+\triangle a)(\sqrt{k}+1) - \sqrt{k}a}\right)^2.$$

Отсюда искомое отношение длин изображений палочки равно:

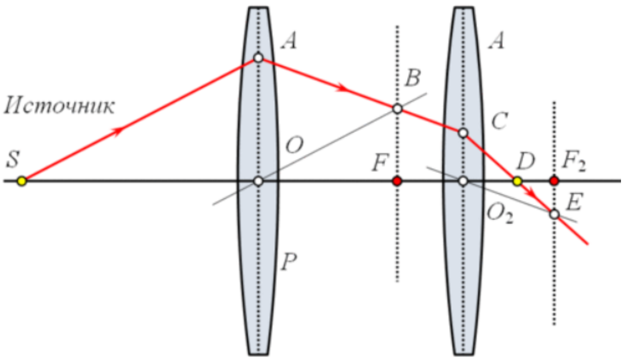
$$n = \frac{L_1}{L} = \frac{k_1}{k} = \left(\frac{a}{(a+\triangle a)(\sqrt{k}+1) - \sqrt{k}a}\right)^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\triangle a}{a}(\sqrt{k}+1)\right)^2} = \frac{1}{4},$$ то есть длина изображения уменьшится в 4 раза.

Ответ: длина изображения уменьшится в 4 раза.

Системы линз.

Ход лучей в системе линз строится теми же методами, что и для одиночной линзы.

Рассмотрим систему из двух линз, одна из которых имеет фокусное расстояние OF, а вторая O_2F_2. Строим путь SAB для первой линзы и продолжаем отрезок AB до вхождения во вторую линзу в точке C



Из точки O_2 строим луч O_2E, параллельный AB. При пересечении с фокальной плоскостью второй линзы этот луч даст точку E. Согласно второму свойству тонкой линзы луч AB после прохождения через вторую линзу пойдёт по пути CE. Пересечение этой линии с оптической осью второй линзы даст точку D, где сфокусируются все лучи, вышедшие из источника S и прошедшие через обе линзы.

Линзы можно комбинировать друг с другом для построения сложных оптических систем. Оптическая сила системы из двух линз может быть найдена как простая сумма оптических сил каждой линзы (при условии, что обе линзы можно считать тонкими и они расположены вплотную друг к другу на одной оси):

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}$$

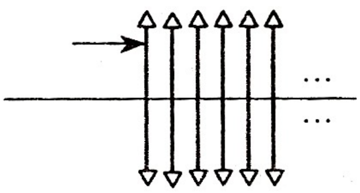
Если линзы расположены на некотором расстоянии друг от друга и их оси совпадают (система из произвольного числа линз, обладающих таким свойством, называется центрированной системой), то их общую оптическую силу с достаточной степенью точности можно найти из следующего выражения:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} - \frac{L}{F_1 F_2},$$

где L — расстояние между главными плоскостями линз.

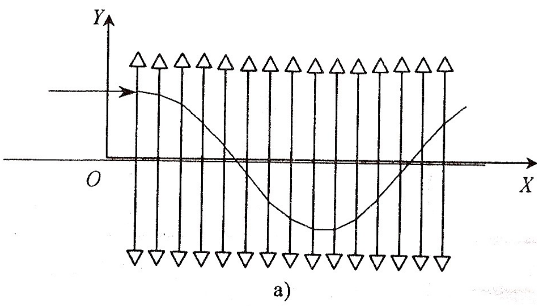
Наиболее известными примерами систем, в которых задействованы сразу несколько линз являются телескоп и микроскоп, которые будут рассмотрены чуть позже.

Задача №17 Очень большое количество одинаковых тонких собирающих линз с фокусным расстоянием f расположены на одинаковых расстояниях d друг от друга так, что главные оптические оси всех линз совпадают. Расстояние d много меньше фокусного расстояния f. На первую линзу перпендикулярно её плоскости (см. рисунок) падает луч света. Найти расстояние между точками, в которых луч в третий и четвёртый раз пересекает главную оптическую ось.

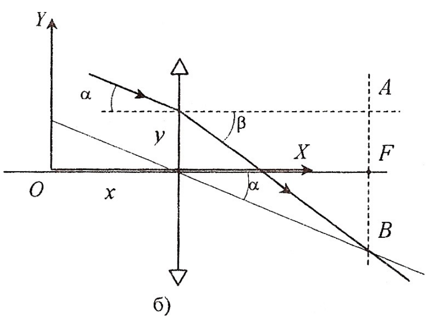


Решение $\mapsto$ Поскольку линзы собирающие, то каждая будет " прижимать" луч к главной оптической оси. Причём так как по условию фокусное расстояние линз много больше расстояния между ними, а луч после прохождения линзы пересёк бы главную оптическую ось на таком расстоянии от линзы, которое по порядку величины близко к фокусному расстоянию, то между каждой парой линз луч будет смещаться очень незначительно. Поэтому для качественного построения хода луча можно рассуждать так.

После прохождения первой линзы луч несколько "прижмётся" к главной оптической оси, после прохождения второй — ещё, затем ещё, и в какой-то точке (пройдя большое количество линз) пересечёт главную оптическую ось, повернув при этом на значительный угол за счёт большого числа преломлений в линзах. После этого луч будет снова " поворачивать" к главной оптической оси и на каком-то расстоянии от точки пересечения станет параллельным главной оптической оси. Дальнейший ход луча будет повторять описанный выше. Качественно ход луча в системе линз показан на рисунке а).



а)



б)

Из этого рисунка можно сделать такие выводы. С одной стороны, луч представляет собой некоторую ломанную линию (между линзами луч прямой), с другой — если считать, что расстояние между линзами очень мало, луч будет описываться "почти" плавной линией, которая, заметим, похожа на синусоиду и много раз пересекает главную оптическую ось. Поэтому здесь возникает следующая идея. Будем приближённо считать луч плавной кривой, введём систему координат и попытаемся получить уравнение этой кривой.

Для этого рассмотрим прохождение луча через одну линзу, находящуюся на некотором расстоянии x от начала координат (рисунок б).). Пусть луч падает на эту линзу под углом α к главной оптической оси на расстоянии y от неё. Построим продолжение этого луча после линзы и найдём угол β между его продолжением и главной оптической осью. Для построения проведём через центр линзы вспомогательный луч, параллельный падающему. Эти два луча должны пересекаться в фокальной плоскости линзы, при этом луч, проходящий через её центр, не преломляется (см. рисунок б).).

Поэтому $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\mid AB \mid}{f} = \dfrac{\mid FB \mid + y}{f} = \operatorname{tg}\alpha + \dfrac{y}{f}$, (1) где буквой B обозначена точка пересечения рассматриваемого луча с фокальной плоскостью; F — фокус линзы; $\mid AF \mid = y$; f — фокусное расстояние линзы. Поскольку тангенс угла наклона луча равен " минус производной" искомой функции $y(x)$ (" минус " — потому что α и β отсчитаны по часовой стрелке от оси OX), то уравнение (1) можно переписать в виде:

$$y' \text{ (после линзы) } - y' \text{ (до линзы)} = -\frac{1}{f} y(x)$$

Поделим правую и левую части уравнения (1) на расстояние d между линзами. Поскольку это расстояние мало, то левая часть уравнения (2) приближённо равна второй производной искомой функции $y(x)$ в точке, где находится линза, причём это приближение тем лучше, чем меньше расстояние d по сравнению с тем расстоянием, на котором изменяется функция $y(x)$ (то есть с f).

$$\frac{y'(\textit{послелинзы}) - y'(\textit{долинзы})}{d} \approx y''(x) \quad (3)$$

Поэтому уравнение (2) можно приближённо представить в виде:

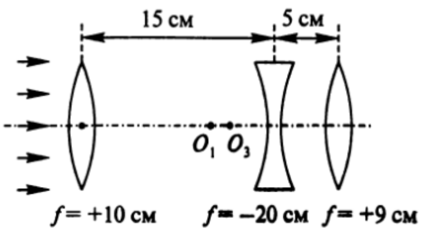
$$y''(x) = -\frac{1}{df} y(x) \quad (4)$$

Из формулы (4) следует, что функция $y(x)$, определяющая ход лучей в рассматриваемой системе линз, такова, что её вторая производная в некоторой точке $y''(x)$ пропорциональна самой функции $y(x)$ в этой точке, то есть это дифференциальное уравнение 2-го порядка (аналогичное дифференциальному уравнению, описывающему гармонические колебания), причём $\omega^2 = 1/df$, следовательно искомая функция $y(x)$, определяющая ход светового луча, от координаты x, представляет собой комбинацию тригонометрических функций с периодом $L = 2\pi\sqrt{df}$.

Поэтому расстояние между ближайшими точками пересечения лучом главной оптической оси (и в частности, между третьим и четвёртым пересечениями) равно половине периода, то есть $\pi\sqrt{df}$.

Ответ: $\pi\sqrt{df}$.

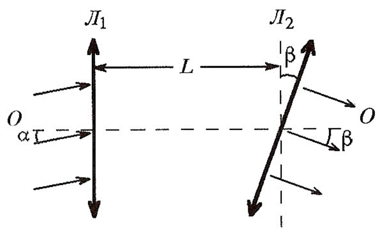
Задача №18 На систему линз, изображённую на рисунке, падает слева пучок света. Найти положение точки схождения этого пучка после прохождения системы.



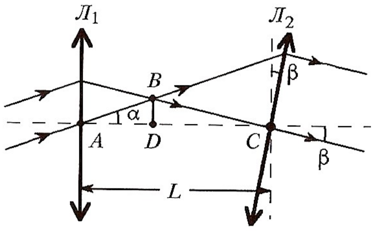
Решение $\mapsto$ После первой линзы пучок собирается в её фокусе (точка O_1) на расстоянии $a_1 = 5$ см от второй линзы. Используя формулу тонкой линзы, получаем изображение от второй линзы на расстоянии $b_1 = -4$ см, так как $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{b_1} = -\dfrac{1}{20}$. Изображение находится в точке O_3, которая является фокусом третьей линзы. Поэтому после прохождения третьей линзы получаем параллельный пучок. Точка схождения находится на бесконечности.

Ответ: точка схождения находится на бесконечности.

Задача №19 Параллельный пучок света падает на систему двух собирающих линз $Л_1$ и $Л_2$, оптические центры которых лежат на прямой OO, под малым углом $\alpha = 0.2$ рад к главной оптической оси линзы $Л_1$. Линза $Л_2$ повёрнута на малый угол $\beta = 0.1$ рад относительно плоскости линзы $Л_1$. Оказалось, что падающий пучок света, пройдя через систему линз, отклонился на малый угол $\beta = 0.1$ рад относительно оси OO. Определите фокусные расстояния линз F_1 и F_2, если расстояние между оптическими центрами линз $l = 10$ см.



Решение $\mapsto$ Пусть F_1 и F_2 — фокусные расстояния линзы $Л_1$ и $Л_2$. После прохождения линзы $Л_1$ пучок соберётся в фокальной плоскости BD линзы $Л_1$ в точке B (см. рисунок). Поэтому $AD = F_1$.



Поскольку из линзы $Л_2$ пучок выходит параллельно её главной оптической оси, то точка B должна быть фокусом линзы $Л_2$ и лежать на её главной оптической оси, то есть $BC = F_2$.

Из треугольника ABC по теореме синусов $\dfrac{F_2}{\sin\alpha} = \dfrac{AB}{\sin\beta} = \dfrac{L}{\sin(\pi - \alpha - \beta)}$.

При малых углах α и β справедливо: $\sin\alpha \approx \alpha, \sin\beta \approx \beta, \sin(\pi - \alpha - \beta) \approx \alpha + \beta, AB \approx F_1$.

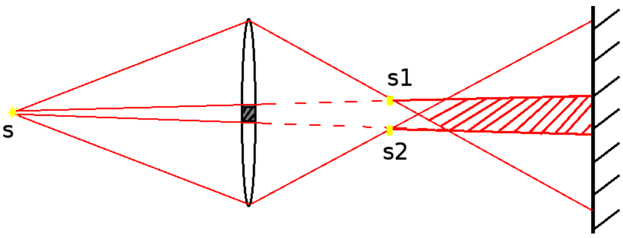
Тогда $\dfrac{F_2}{\alpha} \approx \dfrac{F_1}{\beta} \approx \frac{L}{\alpha+\beta}$. Отсюда $F_1 \approx \dfrac{L\beta}{\alpha+\beta} \approx 3.3$ см, $F_2 \approx \dfrac{L\alpha}{\alpha+\beta} \approx 6.7$ см.

Ответ: $F_1 \approx \dfrac{L\beta}{\alpha+\beta} \approx 3.3$ см и $F_2 \approx \dfrac{L\alpha}{\alpha+\beta} \approx 6.7$ см.

Линза Бийе.

Линза Бийе, Билинза Бийе — собирающая линза, разрезанная по диаметру пополам, обе половинки которой раздвигаются. Прорезь закрывается непрозрачным экраном.

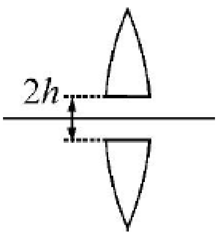
На билинзу направляется свет от щели S, параллельной плоскости разреза. В точках S1 и S2 получаются действительные изображения щели S. Лучи проходящие через них, дальше перекрываются (заштрихованная область на рисунке), образуя интерференционную картину.



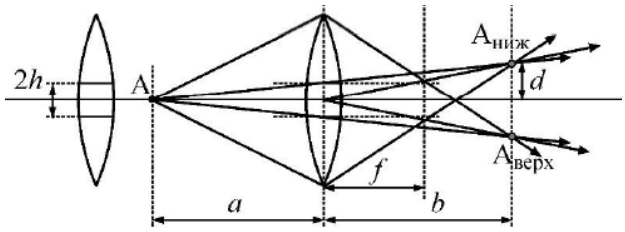
Опыты по получению интерференционной картины с помощью билинзы Бийе похожи на Опыт Юнга, различия заключаются только в способе формирования вторичных источников.

Если изменить характер сдвига половинок билинзы, с перпендикулярного оптической оси на смещение вдоль нее, то вид интерференционной картины изменится.

Задача №19 Из тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $f = 15$ см вырезали центральную часть шириной $2h = 2$ мм (см. рис.), а затем симметрично сдвинули оставшиеся части до соприкосновения, изготовив так называемую «билинзу Бийе». Точечный источник света с длиной волны $\lambda = 711$ нм поместили на расстоянии $a = 20$ см от билинзы на ее оси симметрии. Где находятся изображения, даваемые билинзой? Сделайте построение хода лучей и определите расстояния от изображений до линзы и до ее оси.



Решение $\mapsto$ Если удалить у линзы ее часть, то оставшаяся часть по-прежнему будет формировать изображение, однако его яркость изменится. Поэтому можно рассматривать билинзу как две тонкие линзы, главные оптические оси которых параллельны и сдвинуты на расстояние h относительно оси системы. На рисунке показано построение хода лучей от источника A через каждую из половинок билинзы до двух изображений – верхнего ($A_{ниж}$), полученного в результате преломления света в нижней части билинзы, и нижнего ($A_{верх}$), полученного в результате преломления света в верхней части билинзы. Для этого использованы правила построения изображений в тонкой линзе: луч (фиктивный), идущий через оптический центр линзы (реально отсутствующий), не преломляется, а луч, идущий вдоль оси симметрии системы параллельно главной оптической оси линзы, после преломления проходит через ее фокус.



Из подобия треугольников на рисунке следует, что расстояние d от каждого изображения до оси системы можно найти из пропорции: $\dfrac{d}{h} = \dfrac{a+b}{a}$, откуда $d = h \cdot \dfrac{a+b}{a}$.

В соответствии с формулой тонкой линзы $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{f}$, где b — расстояние от билинзы до плоскости двух изображений, откуда $b = \dfrac{af}{a-f} = \dfrac{20 \cdot 15}{20-15} = 60 > 0$ см, то есть изображения действительные и находятся справа от линзы.

Расстояние d от каждого изображения до оси системы, таким образом, равно:

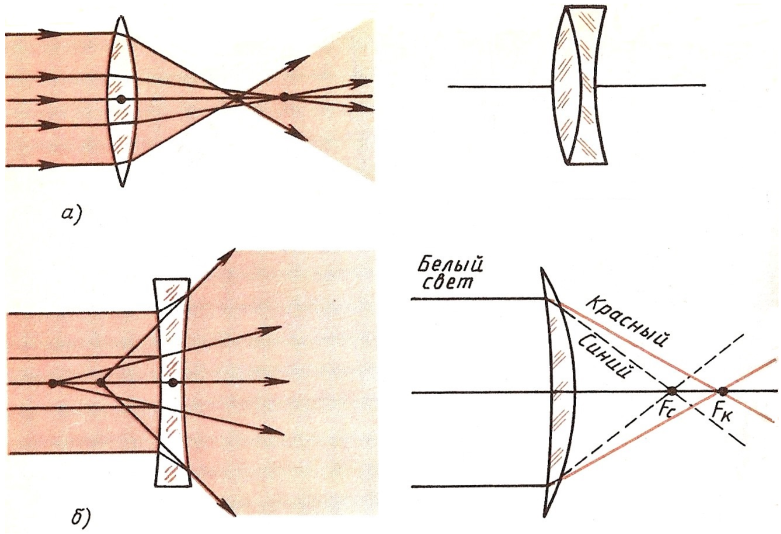
$$d = h \cdot \frac{a+b}{a} = h \cdot \frac{a}{a-f} = 1 \cdot \frac{20}{20-15} = 4 \text{ мм}.$$

Ответ: $b = \dfrac{af}{a-f} = 60$ см, $d = h \cdot \dfrac{a}{a-f} = 4$ мм.

Ограничения линз.

В заключение этой статьи приведём некоторые свойства линз, с которыми приходится иметь дело на практике.

Реальным линзам свойственны некоторые дефекты. Один из них— сферическая аберрация, она заключается в том, что выпуклая линза лучи, отстоящие далеко от главной оптической оси, собирает в точке (фокусе), расположенном ближе к линзе, чем близко прилегающие лучи (рисунок а)), у вогнутой линзы — аналогичная картина б).



Один из способов борьбы со сферической аберрацией — использование только параксиальных пучков, то есть пучков, близких к главной оптической оси. Для этого линзу диафрагмируют, пропуская через неё более узкий пучок. Но этим уменьшается энергия пучка и освещённость изображения. Второй способ ослабления сферической аберрации вытекает из того, что у собирающих и рассеивающих линз оптическая сила имеет противоположные знаки, и можно подобрать такую пару линз, чтобы их аберрации существенно компенсировались (например репродукционный объектв).

Вторым серьезным дефектом линз является хроматическая аберрация. Из-за дисперсии в линзе происходит разложение белого света в спектр. При этом красные лучи, преломляются слабее, фокусируюся дальше от центра линзы; синие и фиолетовые, преломляясь сильнее, фокусируются ближе. В результате хроматической аберрации изображение в линзе оказывается размытым и окрашенным.

Исправить хроматическую аберрацию можно с помощью двойной линзы, подобрав различные сорта стекла с разной дисперсией. Линзы, в которых устранена хроматическая аберрация, называются ахроматами. Такие линзы используются в качестве объективов телескопов- рефраторов, хороших биноклей, простейших фотоаппаратов и т.п.

Значительные аберрации возникают также при падении на линзу под большим углом к оптической оси. Устранение этих аберраций возможно путём подбора системы из нескольких (до десятка) линз, каждая из которых компенсирует недостатки другой. Расчёт, изготовление и проверка таких сложных оптических систем — весьма трудная задача, требующая хороших знаний теории и высокой квалификации.

Литература

[1] В. И. Лукашик, Физическая олимпиада, 1987 год.

[2] Учебное издание: Варламов С. Д., Зинковский В. И., Семёнов М. В., Старокуров Ю. В., Шведов О. Ю., Якута А. А. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005.

[3] Методическое пособие для поступающих в вузы/ МФТИ, 2008 год.

[4] В. Горшковский, Польсике физические олимпиады, 1982 год.

[5] И.Ш. Слободецкий, В.А. Орлов, Всесоюзные олимпиады по физике, 1982 год.

[6] Лекции по спектроскопии, ФИАН.

[7] Чехословакия, III Международная физическая олимпиада.

[8] Брук Ю., Минц Н., IV Международная физическая олимпиада школьников.

[9] Махмудов Р., Несколько задач Бакинской физической олимпиады.

[10] А.Н. Долгов, С.Е.Муравьёв, В.П.Протасов,Б.В.Соболев, задачи по физике, часть 3, МИФИ, 2005.