Решения, Долгопрудный, вариант **Ш**

1. Решите уравнение $\cos^2 2x + \cos^2 4x = 1 + \operatorname{ctg} 6x$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}, n \in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:
$\frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} = 1 + \frac{\cos 6x}{\sin 6x}$, $\frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 8x) = \frac{\cos 6x}{\sin 6x}$, $\cos 6x \cdot \cos 2x = \frac{\cos 6x}{\sin 6x}$.
Получаем два варианта:
а) $\cos 6x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, k \in Z$ (при этом условие $\sin 6x \neq 0$ выполняется);
б) $\cos 2x \cdot \sin 6x = 1$. Это уравнение не имеет решений, так как при $|\cos 2x| = 1$ получаем, что $\sin 2x = 0$, $\sin 6x = 3\sin 2x - 4\sin^3 2x = 0$.

2. Решите неравенство $\frac{x\sqrt{2}+1}{1-\sqrt{x^2-4x+5}} \le 1$.

Ответ: $x \in [-5; 2) \cup (2; +\infty)$.

Решение. Заметим, что знаменатель неравенства неположителен при всех x. Поэтому неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x\sqrt{2} + 1 \ge 1 - \sqrt{x^2 - 4x + 5}, \\ 1 - \sqrt{x^2 - 4x + 5} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4x + 5} \ge -x\sqrt{2}, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Рассмотрим первое неравенство системы. Если $x \ge 0$, то оно выполняется. Если $x < 0$, то возводим обе части в квадрат и получаем $x^2 - 4x + 5 \ge 2x^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-5; 1]$. С учётом условия $x < 0$ получаем $-5 \le x < 0$. Таким образом, первое неравенство системы выполняется при $x \ge -5$.
Учитывая, что $x \neq 2$, получаем $x \in [-5; 2) \cup (2; +\infty)$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \le 6x - 4y - 13, \\ x^2 + y^2 - 4a^2 \le 8y - 10x + 4a - 40 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a = -\frac{11}{3}, a = 3$.

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 \le a^2, \\ (x+5)^2 + (y-4)^2 \le (2a+1)^2. \end{cases}$$

Первое неравенство системы задаёт круг с центром в точке $A(3; -2)$ радиуса $|a|$. Второе неравенство задаёт круг с центром $B(-5; 4)$ радиуса $|2a+1|$. Границы кругов включаются; при $a = 0$ и $a = -1/2$ один из кругов вырождается в точку.
Система неравенств имеет единственное решение, когда круги касаются внешним образом, то есть, когда сумма радиусов равна расстоянию между центрами $AB = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$. Получаем уравнение $|a| + |2a+1| = 10$, решая которое, находим, что $a = -\frac{11}{3}$ или $a = 3$.

4. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные AC и BD. Их точки касания с меньшей окружностью – A и B, с большей окружностью – C и D. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AB = \frac{24}{5}$, $AC = 12$.

Ответ: $r = 3$, $R = 12$.

Решение. Введём обозначения: O – центр меньшей окружности, Q – центр большей окружности, r – радиус меньшей окружности, R – радиус большей окружности, $OQ \cap AB = H$, $\angle CQO = \angle AOH = \alpha$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $OACQ$. $OA = r$, $OQ = R + r$, $CQ = R$, $AC = 12$. Из точки O опустим перпендикуляр OE на отрезок CQ. Из прямоугольного треугольника OEQ по теореме Пифагора получаем, что $(R+r)^2 - (R-r)^2 = 12^2$, $Rr = 36$. $\sin\alpha = \dfrac{AC}{OQ} = \dfrac{12}{R+r}$.

Из треугольника AOH получаем, что $OA\sin\alpha = AH$, или, используя введённые обозначения: $r \cdot \dfrac{12}{R+r} = \dfrac{12}{5}$.

Решая полученные уравнения, находим, что $r = 3$, $R = 12$.

5. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 123456 $\to$ 612345), и полученное шестизначное число вычли из исходного числа. Какие числа из промежутка $[618222;\ 618252]$ могли получиться в результате вычитания?

Ответ: 618228, 618237, 618246.

Решение. Пусть $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}$ – данное шестизначное число. Обозначим пятизначное число $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}$ через x. Тогда $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F} - \overline{F}\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E} = (10x + F) - (100000F + x) = 9x - 99999F$. Таким образом, полученная разность делится на 9. Из промежутка $[618222;\ 618252]$ на 9 делятся числа 618228, 618237, 618246.

Докажем, что эти числа могут быть получены в результате вычитания. Для этого надо доказать, что каждое из уравнений

$$9x - 99999F = 618228\ ,$$
$$9x - 99999F = 618237\ ,$$
$$9x - 99999F = 618246$$

имеет целочисленное решение, где x – пятизначное число, а F – однозначное число, не равное нулю. Для этого достаточно в каждом из уравнений подставить $F = 1$ и убедиться, что получающееся значение x является пятизначным целым числом. Действительно, первому уравнению удовлетворяет пара $x = 79803$, $F = 1$; второму – пара $x = 79804$, $F = 1$; третьему – пара $x = 79805$, $F = 1$. Значит, если в качестве исходных чисел взять 798031, 798041, 798051, то в результате перестановки и вычитания мы получим числа 61828, 618237, 618246.

6. На ребре CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбрана точка M так, что центр сферы, описанной около пирамиды MAA_1B_1B, лежит в грани AA_1B_1B. Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $MABC$, равен 5, а ребро основания призмы равно $4\sqrt{3}$. Найдите:

а) отношение объёма пирамиды MAA_1B_1B к объёму призмы;

б) длину отрезка MC;

в) площадь полной поверхности призмы.

Ответ: а) $V_{MAA_1B_1B} : V = 2:3$, б) $MC = 6$, в) $S = 144\sqrt{3}$.

Решение. Введём обозначения: K – центр грани ABC; L – середина ребра AB; Q – центр сферы, описанной около пирамиды MAA_1B_1B (т.е. Q – центр грани AA_1B_1B); O – центр сферы, описанной около пирамиды $MABC$.

а) $\dfrac{V_{MABC}}{V_{ABCA_1B_1C_1}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{MC}{CC_1}$; $\dfrac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{MC_1}{CC_1}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{V_{MABC} + V_{MA_1B_1C_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{MC + MC_1}{CC_1} = \dfrac{1}{3}$. Значит, объём пирамиды MAA_1B_1B составляет две трети объёма призмы.

б) Сторона равностороннего треугольника ABC равна $4\sqrt{3}$, следовательно, $CL = 6$, $CK = 4$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $CKOM$. В ней известны стороны $CK = 4$, $OM = 5$ и диагональ $OC = 5$. По теореме Пифагора из треугольника OCK находим, что $OK = 3$. Опустим из точки O перпендикуляр OH на отрезок MC. Тогда $MC = 2 \cdot CH = 2 \cdot KO = 6$.

в) Обозначим $BB_1 = h$. Тогда $QL = \frac{h}{2}$, $QB = \sqrt{\frac{h^2}{4} + 12}$, $QM = \sqrt{CL^2 + (QL - MC)^2} = \sqrt{\left(\frac{h}{2} - 6\right)^2 + 36}$.

Отрезки QB и QM равны как радиусы сферы. Решая получающееся уравнение, находим, что $h = 10$. Тогда площадь поверхности призмы $S = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 3 \cdot 10 \cdot 4\sqrt{3} = 144\sqrt{3}$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4y^2 - 15xy + 14x^2 + 12y - 24x = 0, \\ \sqrt{x(12 - 7x + 4y) + 36} + \sqrt{x^2 + 8x + 32} = 6. \end{cases}$

Ответ: $(-7; -14), (-4; -8)$.

Решение. Перепишем первое уравнение системы в виде $4y^2 - (15x - 12)y + (14x^2 - 24x) = 0$ и решим его как квадратное уравнение относительно y. Получаем, что $y = 2x$ или $y = \frac{7x - 12}{4}$.

При $y = 2x$ второе уравнение системы принимает вид $\sqrt{x^2 + 12x + 36} + \sqrt{x^2 + 8x + 32} = 6 \Leftrightarrow$ $\sqrt{x^2 + 8x + 32} = 6 - |x + 6|$. Если $x \geq -6$, то получаем уравнение $\sqrt{x^2 + 8x + 32} = -x$, решая которое, находим, что $x = -4$. Если $x < -6$, то получаем уравнение $\sqrt{x^2 + 8x + 32} = 12 + x$, решая которое, находим, что $x = -7$.

При $y = \frac{7x - 12}{4}$ второе уравнение системы принимает вид $6 + \sqrt{x^2 + 8x + 32} = 6 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 32 = 0$, следовательно, в этом случае решений нет.

8. Найдите количество пар целых чисел $(a; b)$ таких, что $1 \leq a \leq 700$, $1 \leq b \leq 700$, сумма $a + b$ делится на 7, а произведение ab делится на 5. (При $a \neq b$ пары $(a; b)$ и $(b; a)$ считаются различными.)

Ответ: 25200.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) Пусть a делится на 5 (на отрезке $[1; 700]$ имеется $700 : 5 = 140$ таких значений a). Для каждого такого значения a подходят те и только те значения b, при которых сумма остатков от деления a на 7 и b на 7 равна 0 или 7. То есть, подходит каждое седьмое значение b. Итого, для каждого значения a получаем по 100 вариантов.

2) Пусть a не делится на 5 (на отрезке $[1; 700]$ имеется $700 - 140 = 560$ таких значений a). Для каждого такого a подходят те и только те значения b, кратные 5, при которых сумма остатков от деления a на 7 и b на 7 равна 0 или 7. То есть, подходит одно из каждых $5 \cdot 7 = 35$ значений b. Итого, для каждого значения a получаем по 20 вариантов.

Суммируем количество пар: $100 \cdot 140 + 560 \cdot 20 = 25200$.

Решения, Долгопрудный, вариант **И**

1. Решите уравнение $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1 + \operatorname{ctg} 3x$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 2x}{2} = 1 + \frac{\cos 3x}{\sin 3x}, \quad -\frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) = \frac{\cos 3x}{\sin 3x}, \quad -\cos 3x \cdot \cos x = \frac{\cos 3x}{\sin 3x}.$$

Получаем два варианта:

а) $\cos 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$ (при этом условие $\sin 3x \neq 0$ выполняется);

б) $\cos x \cdot \sin 3x = -1$. Это уравнение не имеет решений, так как при $|\cos x| = 1$ получаем, что $\sin x = 0$, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = 0$.

2. Решите неравенство $\dfrac{3x+3}{3-\sqrt{x^2-2x+10}} \leq 1$.

Ответ: $x \in [-5/4; 1) \cup (1; +\infty)$.

Решение. Заметим, что знаменатель неравенства неположителен при всех x. Поэтому неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 3x+3 \geq 3-\sqrt{x^2-2x+10}, \\ 3-\sqrt{x^2-2x+10} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-2x+10} \geq -3x, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Рассмотрим первое неравенство системы. Если $x \geq 0$, то оно выполняется. Если $x < 0$, то возводим обе части в квадрат и получаем $x^2 - 2x + 10 \geq 9x^2 \Leftrightarrow 8x^2 + 2x - 10 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-5/4; 1]$. С учётом условия $x < 0$ получаем $-5/4 \leq x < 0$. Таким образом, первое неравенство системы выполняется при $x \geq -5/4$.

Учитывая, что $x \neq 1$, получаем $x \in [-5/4; 1) \cup (1; +\infty)$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \leq 2x - 4y - 5, \\ x^2 + y^2 - 9a^2 \leq 8y - 14x - 61 + 12a \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a = -3, a = 2$.

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq a^2, \\ (x+7)^2 + (y-4)^2 \leq (3a+2)^2. \end{cases}$$

Первое неравенство системы задаёт круг с центром в точке $A(1; -2)$ радиуса $|a|$. Второе неравенство задаёт круг с центром $B(-7; 4)$ радиуса $|3a+2|$. Границы кругов включаются; при $a = 0$ и $a = -2/3$ один из кругов вырождается в точку.

Система неравенств имеет единственное решение, когда круги касаются внешним образом, то есть, когда сумма радиусов равна расстоянию между центрами $AB = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$. Получаем уравнение $|a| + |3a+2| = 10$, решая которое, находим, что $a = -3$ или $a = 2$.

4. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные KL и MN. Их точки касания с меньшей окружностью – L и M, с большей окружностью – K и N. Известно, что $KN = \frac{64}{5}$, $MN = 8$. Найдите радиусы окружностей.

Ответ: $r = 2$, $R = 8$.

Решение. Введём обозначения: O – центр большей окружности, Q – центр меньшей окружности, r – радиус меньшей окружности, R – радиус большей окружности, $OQ \cap KN = H$, $\angle KOH = \alpha$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $ONMQ$. $QM = r$, $OQ = R + r$, $ON = R$, $MN = 8$. Из точки Q опустим перпендикуляр QE на отрезок ON. Из прямоугольного треугольника OEQ по теореме Пифагора получаем, что $(R+r)^2 - (R-r)^2 = 8^2$, $Rr = 16$. $\sin\alpha = \dfrac{MN}{OQ} = \dfrac{8}{R+r}$.

Из треугольника NOH получаем, что $ON \cdot \sin\alpha = AH$, или, используя введённые обозначения: $R \cdot \dfrac{8}{R+r} = \dfrac{32}{5}$.

Решая полученные уравнения, находим, что $r = 2$, $R = 8$.

5. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 123456 $\to$ 612345), и полученное шестизначное число вычли из исходного числа. Какие числа из промежутка $[429454;\ 429488]$ могли получиться в результате вычитания?

Ответ: 429462, 429471, 429480.

Решение. Пусть $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}$ – данное шестизначное число. Обозначим пятизначное число $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}$ через x. Тогда $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F} - \overline{F}\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E} = (10x + F) - (100000F + x) = 9x - 99999F$. Таким образом, полученная разность делится на 9. Из промежутка $[429454;\ 429488]$ на 9 делятся числа 429462, 429471, 429480.

Докажем, что эти числа могут быть получены в результате вычитания. Для этого надо доказать, что каждое из уравнений

$$9x - 99999F = 429462,$$
$$9x - 99999F = 429471,$$
$$9x - 99999F = 429480$$

имеет целочисленное решение, где x – пятизначное число, а F – однозначное число, не равное нулю. Для этого достаточно в каждом из уравнений подставить $F = 1$ и убедиться, что получающееся значение x является пятизначным целым числом. Действительно, первому уравнению удовлетворяет пара $x = 58829$, $F = 1$; второму – пара $x = 58830$, $F = 1$; третьему – пара $x = 58831$, $F = 1$. Значит, если в качестве исходных чисел взять 588291, 588301, 588311, то в результате перестановки и вычитания мы получим числа 429462, 429471, 429480.

6. На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбрана точка Q так, что центр сферы, описанной около пирамиды QAA_1C_1C, лежит в грани AA_1C_1C. Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $QABC$, равен 2, а ребро основания призмы равно $\sqrt{3}$. Найдите:

а) отношение объёма пирамиды QAA_1C_1C к объёму призмы;

б) длину отрезка QB;

в) объём призмы.

Ответ: а) $V_{QAA_1C_1C} : V = 2:3$, б) $BQ = 2\sqrt{3}$, в) $V = \dfrac{81}{16}$.

Решение. Введём обозначения: K – центр грани ABC; L – середина ребра AC; P – центр сферы, описанной около пирамиды QAA_1C_1C (т.е. P – центр грани AA_1C_1C); O – центр сферы, описанной около пирамиды $QABC$.

а) $\dfrac{V_{QABC}}{V_{ABCA_1B_1C_1}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{QB}{BB_1}$; $\dfrac{V_{QA_1B_1C_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{QB_1}{BB_1}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{V_{QABC} + V_{QA_1B_1C_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{QB + QB_1}{BB_1} = \dfrac{1}{3}$. Значит, объём пирамиды QAA_1C_1C составляет две трети объёма призмы.

б) Сторона равностороннего треугольника ABC равна $\sqrt{3}$, следовательно, $BL = \dfrac{3}{2}$, $BK = 1$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $BKOQ$. В ней известны стороны $BK = 1$, $OQ = 2$ и диагональ $OB = 2$. По теореме Пифагора из треугольника OKB находим, что $OK = \sqrt{3}$. Опустим из точки O перпендикуляр OH на отрезок QB. Тогда $QB = 2 \cdot HB = 2 \cdot KO = 2\sqrt{3}$.

в) Обозначим $CC_1 = h$. Тогда $PL = \frac{h}{2}$, $PC = \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{3}{4}}$, $QP = \sqrt{BL^2 + (PL - BQ)^2} = \sqrt{\left(\frac{h}{2} - 2\sqrt{3}\right)^2 + \frac{9}{4}}$.

Отрезки PC и QP равны как радиусы сферы. Решая получающееся уравнение, находим, что $h = \frac{9\sqrt{3}}{4}$. Тогда объём призмы $V = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{81}{16}$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} 21x^2 - 13xy + 2y^2 + 42x - 14y = 0, \\ \sqrt{x(7x - 2y + 14) + 49} + \sqrt{x^2 + 5x + 12} = 7. \end{cases}$

Ответ: $\left(-\frac{12}{5}; -\frac{36}{5}\right), (-8; -24)$.

Решение. Перепишем первое уравнение системы в виде $2y^2 - (13x - 14)y + \left(21x^2 + 42x\right) = 0$ и решим его как квадратное уравнение относительно y. Получаем, что $y = 3x$ или $y = \frac{7x + 14}{2}$.

При $y = 3x$ второе уравнение системы принимает вид $\sqrt{x^2 + 14x + 49} + \sqrt{x^2 + 5x + 12} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5x + 12} = 7 - |x + 7|$. Если $x \geq -7$, то получаем уравнение $\sqrt{x^2 + 5x + 12} = -x$, решая которое, находим, что $x = -\frac{12}{5}$. Если $x < -7$, то получаем уравнение $\sqrt{x^2 + 5x + 12} = 14 + x$, решая которое, находим, что $x = -8$.

При $y = \frac{7x + 14}{2}$ второе уравнение системы принимает вид $7 + \sqrt{x^2 + 5x + 12} = 7 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 12 = 0$, следовательно, в этом случае решений нет.

8. Найдите количество пар целых чисел $(a; b)$ таких, что $1 \leq a \leq 600$, $1 \leq b \leq 600$, сумма $a + b$ делится на 8, а произведение ab делится на 3. (При $a \neq b$ пары $(a; b)$ и $(b; a)$ считаются различными.)

Ответ: 25000.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) Пусть a делится на 3 (на отрезке $[1; 600]$ имеется $600 : 3 = 200$ таких значений a). Для каждого такого значения a подходят те и только те значения b, при которых сумма остатков от деления a на 8 и b на 8 равна 0 или 8. То есть, подходит каждое восьмое значение b. Итого, для каждого значения a получаем по 75 вариантов.

2) Пусть a не делится на 3 (на отрезке $[1; 700]$ имеется $600 - 200 = 400$ таких значений a). Для каждого такого a подходят те и только те значения b, кратные 3, при которых сумма остатков от деления a на 8 и b на 8 равна 0 или 8. То есть, подходит одно из каждых $3 \cdot 8 = 24$ значений b. Итого, для каждого значения a получаем по 25 вариантов.

Суммируем количество пар: $200 \cdot 75 + 400 \cdot 25 = 25000$.

Решения, Долгопрудный, вариант **Ф**

1. Решите уравнение $\cos^2 2x + \cos^2 x = 1 + \operatorname{ctg} 3x$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:
$\frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 2x}{2} = 1 + \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$, $\quad \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) = \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$, $\quad \cos 3x \cdot \cos x = \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$.
Получаем два варианта:

а) $\cos 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$ (при этом условие $\sin 3x \neq 0$ выполняется);

б) $\cos x \cdot \sin 3x = 1$. Это уравнение не имеет решений, так как при $|\cos x| = 1$ получаем, что $\sin x = 0$, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = 0$.

2. Решите неравенство $\frac{x\sqrt{5}+1}{1-\sqrt{x^2-2x+2}} \leq 1$.

Ответ: $x \in [-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Решение. Заметим, что знаменатель неравенства неположителен при всех x. Поэтому неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x\sqrt{5}+1 \geq 1-\sqrt{x^2-2x+2}, \\ 1-\sqrt{x^2-2x+2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-2x+2} \geq -x\sqrt{5}, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Рассмотрим первое неравенство системы. Если $x \geq 0$, то оно выполняется. Если $x < 0$, то возводим обе части в квадрат и получаем $x^2 - 2x + 2 \geq 5x^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-1; \tfrac{1}{2}\right]$. С учётом условия $x < 0$ получаем $-1 \leq x < 0$. Таким образом, первое неравенство системы выполняется при $x \geq -1$.
Учитывая, что $x \neq 1$, получаем $x \in [-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \leq 4y - 2x - 5, \\ x^2 + y^2 - 4a^2 \leq 10x - 12y + 12a - 52 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a = -\frac{13}{3}, a = \frac{7}{3}$.

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 \leq a^2, \\ (x-5)^2 + (y+6)^2 \leq (2a+3)^2. \end{cases}$$

Первое неравенство системы задаёт круг с центром в точке $A(-1; 2)$ радиуса $|a|$. Второе неравенство задаёт круг с центром $B(5; -6)$ радиуса $|2a+3|$. Границы кругов включаются; при $a = 0$ и $a = -\tfrac{3}{2}$ один из кругов вырождается в точку.

Система неравенств имеет единственное решение, когда круги касаются внешним образом, то есть, когда сумма радиусов равна расстоянию между центрами $AB = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$. Получаем уравнение $|a| + |2a+3| = 10$, решая которое, находим, что $a = -\frac{13}{3}$ или $a = \frac{7}{3}$.

4. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные PS и QT. Их точки касания с меньшей окружностью – S и T, с большей окружностью – P и Q. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $PQ = \frac{12\sqrt{6}}{5}$, $QT = 2\sqrt{6}$.

Ответ: $r=2$, $R=3$.

Решение. Введём обозначения: A – центр большей окружности, B – центр меньшей окружности, r – радиус меньшей окружности, R – радиус большей окружности, $AB \cap PQ = H$, $\angle QAH = \alpha$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABTQ$. $BT=r$, $AB=R+r$, $AQ=R$, $QT=2\sqrt{6}$. Из точки B опустим перпендикуляр BE на отрезок AQ. Из прямоугольного треугольника ABE по теореме Пифагора получаем, что $(R+r)^2-(R-r)^2=\left(2\sqrt{6}\right)^2$, $Rr=6$. $\sin\alpha=\dfrac{TQ}{AB}=\dfrac{2\sqrt{6}}{R+r}$.

Из треугольника AQH получаем, что $AQ\cdot\sin\alpha=QH$, или, используя введённые обозначения: $R\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{R+r}=\dfrac{6\sqrt{6}}{5}$.

Решая полученные уравнения, находим, что $r=2$, $R=3$.

5. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 123456 $\to$ 612345), и полученное шестизначное число вычли из исходного числа. Какие числа из промежутка $[382340;\ 382371]$ могли получиться в результате вычитания?

Ответ: 382347, 382356, 382365.

Решение. Пусть $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}$ – данное шестизначное число. Обозначим пятизначное число $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}$ через x. Тогда $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}-\overline{F}\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}=(10x+F)-(100000F+x)=9x-99999F$. Таким образом, полученная разность делится на 9. Из промежутка $[382340;\ 382371]$ на 9 делятся числа 382347, 382356, 382365.

Докажем, что эти числа могут быть получены в результате вычитания. Для этого надо доказать, что каждое из уравнений

$$9x-99999F=382347,$$
$$9x-99999F=382356,$$
$$9x-99999F=382365$$

имеет целочисленное решение, где x – пятизначное число, а F – однозначное число, не равное нулю. Для этого достаточно в каждом из уравнений подставить $F=1$ и убедиться, что получающееся значение x является пятизначным целым числом. Действительно, первому уравнению удовлетворяет пара $x=53594$, $F=1$; второму – пара $x=53595$, $F=1$; третьему – пара $x=53596$, $F=1$. Значит, если в качестве исходных чисел взять 535941, 535951, 535961, то в результате перестановки и вычитания мы получим числа 382347, 382356, 382365.

6. На ребре CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбрана точка S так, что центр сферы, описанной около пирамиды SAA_1B_1B, лежит в грани AA_1B_1B. Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$, равен $\sqrt{2}$, а ребро основания призмы равно $\sqrt{3}$. Найдите:

а) отношение объёма пирамиды SAA_1B_1B к объёму призмы;

б) длину отрезка SC;

в) площадь полной поверхности призмы.

Ответ: а) $V_{SAA_1B_1B}:V=2:3$, б) $SC=2$, в) $S=\dfrac{39\sqrt{3}}{4}$.

Решение. Введём обозначения: K – центр грани ABC; L – середина ребра AB; Q – центр сферы, описанной около пирамиды SAA_1B_1B (т.е. Q – центр грани AA_1B_1B); O – центр сферы, описанной около пирамиды $SABC$.

а) $\dfrac{V_{SABC}}{V_{ABCA_1B_1C_1}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{SC}{CC_1}$; $\dfrac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{SC_1}{CC_1}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{V_{SABC}+V_{SA_1B_1C_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{SC+SC_1}{CC_1}=\dfrac{1}{3}$. Значит, объём пирамиды SAA_1B_1B составляет две трети объёма призмы.

б) Сторона равностороннего треугольника ABC равна $\sqrt{3}$, следовательно, $CL=\frac{3}{2}$, $CK=1$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $CKOM$. В ней известны стороны $CK=1$, $OS=\sqrt{2}$ и диагональ $OC=\sqrt{2}$. По теореме Пифагора из треугольника OCK находим, что $OK=1$. Опустим из точки O перпендикуляр OH на отрезок SC. Тогда $SC=2\cdot CH=2\cdot KO=2$.

в) Обозначим $BB_1=h$. Тогда $QL=\frac{h}{2}$, $QB=\sqrt{\frac{h^2}{4}+\frac{3}{4}}$, $QS=\sqrt{CL^2+(QL-SC)^2}=\sqrt{\left(\frac{h}{2}-2\right)^2+\frac{9}{4}}$. Отрезки QB и SQ равны как радиусы сферы. Решая получающееся уравнение, находим, что $h=\frac{11}{4}$. Тогда площадь поверхности призмы $S=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2+3\cdot\frac{11}{4}\cdot\sqrt{3}=\frac{39\sqrt{3}}{4}$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases}2x^2-19xy+45y^2-12x+60y=0,\\ \sqrt{y(2x-9y-12)+36}+\sqrt{y^2-5y+11}=6.\end{cases}$

Ответ: $(35;7)$, $\left(11;\frac{11}{5}\right)$.

Решение. Перепишем первое уравнение системы в виде $2x^2-(19y+12)y+\left(45y^2+60y\right)=0$ и решим его как квадратное уравнение относительно x. Получаем, что $x=5y$ или $x=\frac{9y+12}{2}$.

При $x=5y$ второе уравнение системы принимает вид $\sqrt{y^2-12y+36}+\sqrt{y^2-5y+11}=6 \Leftrightarrow \sqrt{y^2-5y+11}=6-|y-6|$. Если $y\ge 6$, то получаем уравнение $\sqrt{y^2-5y+11}=12-y$, решая которое, находим, что $y=7$. Если $y<6$, то получаем уравнение $\sqrt{y^2-5y+11}=y$, решая которое, находим, что $y=\frac{11}{5}$.

При $x=\frac{9y+12}{2}$ второе уравнение системы принимает вид $6+\sqrt{y^2-5y+11}=6 \Leftrightarrow y^2-5y+11=0$, следовательно, в этом случае решений нет.

8. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1\le a\le 840$, $1\le b\le 840$, сумма $a+b$ делится на 6, а произведение ab делится на 7. (При $a\ne b$ пары $(a;b)$ и $(b;a)$ считаются различными.)

Ответ: 31200.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) Пусть a делится на 7 (на отрезке $[1;840]$ имеется $840:7=120$ таких значений a). Для каждого такого значения a подходят те и только те значения b, при которых сумма остатков от деления a на 6 и b на 6 равна 0 или 6. То есть, подходит каждое шестое значение b. Итого, для каждого значения a получаем по 140 вариантов.

2) Пусть a не делится на 7 (на отрезке $[1;840]$ имеется $840-120=720$ таких значений a). Для каждого такого a подходят те и только те значения b, кратные 7, при которых сумма остатков от деления a на 6 и b на 6 равна 0 или 6. То есть, подходит одно из каждых $7\cdot 6=42$ значений b. Итого, для каждого значения a получаем по 20 вариантов.

Суммируем количество пар: $120\cdot 140+720\cdot 20=31200$.

Решения, Долгопрудный, вариант **Р**

1. Решите уравнение $\sin^2 2x+\sin^2 4x=1+\operatorname{ctg}6x$.

Ответ: $\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{6}, k\in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:
$\dfrac{1-\cos 4x}{2}+\dfrac{1-\cos 8x}{2}=1+\dfrac{\cos 6x}{\sin 6x}$, $\quad -\dfrac{1}{2}(\cos 4x+\cos 8x)=\dfrac{\cos 6x}{\sin 6x}$, $\quad -\cos 6x\cdot\cos 2x=\dfrac{\cos 6x}{\sin 6x}$.
Получаем два варианта:
а) $\cos 6x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{6}, k\in Z$ (при этом условие $\sin 6x\neq 0$ выполняется);
б) $\cos 2x\cdot\sin 6x=-1$. Это уравнение не имеет решений, так как при $|\cos 2x|=1$ получаем, что $\sin 2x=0$, $\sin 6x=3\sin 2x-4\sin^3 2x=0$.

2. Решите неравенство $\dfrac{2x+8}{8-\sqrt{x^2-2x+65}}\le 1$.

Ответ: $x\in[-5;1)\cup(1;+\infty)$.

Решение. Заметим, что знаменатель неравенства неположителен при всех x. Поэтому неравенство равносильно следующей системе:
$$\begin{cases}2x+8\ge 8-\sqrt{x^2-2x+65},\\ 8-\sqrt{x^2-2x+65}\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2-2x+65}\ge -2x,\\ x\neq 1.\end{cases}$$
Рассмотрим первое неравенство системы. Если $x\ge 0$, то оно выполняется. Если $x<0$, то возводим обе части в квадрат и получаем $x^2-2x+65\ge 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2+2x-65\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[-5;\frac{13}{3}\right]$. С учётом условия $x<0$ получаем $-5\le x<0$. Таким образом, первое неравенство системы выполняется при $x\ge -5$.
Учитывая, что $x\neq 1$, получаем $x\in[-5;1)\cup(1;+\infty)$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств
$$\begin{cases}x^2+y^2-a^2\le 4y-6x-13,\\ x^2+y^2-9a^2\le 10x-8y+6a-40\end{cases}$$
имеет ровно одно решение.

Ответ: $a=-\dfrac{11}{4}, a=\dfrac{9}{4}$.

Решение. Запишем систему в виде
$$\begin{cases}(x+3)^2+(y-2)^2\le a^2,\\ (x-5)^2+(y+4)^2\le(3a+1)^2.\end{cases}$$
Первое неравенство системы задаёт круг с центром в точке $A(-3;2)$ радиуса $|a|$. Второе неравенство задаёт круг с центром $B(5;-4)$ радиуса $|3a+1|$. Границы кругов включаются; при $a=0$ и $a=-1/3$ один из кругов вырождается в точку.
Система неравенств имеет единственное решение, когда круги касаются внешним образом, то есть, когда сумма радиусов равна расстоянию между центрами $AB=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$. Получаем уравнение $|a|+|3a+1|=10$, решая которое, находим, что $a=-\dfrac{11}{4}$ или $a=\dfrac{9}{4}$.

4. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные CD и EF. Их точки касания с меньшей окружностью – D и E, с большей окружностью – C и F. Известно, что $DE=8$, $EF=20$. Найдите радиусы окружностей.

Ответ: $r=5$, $R=20$.

Решение. Введём обозначения: O – центр большей окружности, Q – центр меньшей окружности, r – радиус меньшей окружности, R – радиус большей окружности, $OQ\cap DE=H$, $\angle FOH=\angle EQH=\alpha$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $OFEQ$. $QE=r$, $OQ=R+r$, $OF=R$, $EF=20$. Из точки Q опустим перпендикуляр QT на отрезок OF. Из прямоугольного треугольника OTQ по теореме Пифагора получаем, что $(R+r)^2-(R-r)^2=20^2$, $Rr=100$. $\sin\alpha=\dfrac{EF}{OQ}=\dfrac{20}{R+r}$.

Из треугольника EQH получаем, что $EQ\cdot\sin\alpha=EH$, или, используя введённые обозначения: $r\cdot\dfrac{20}{R+r}=4$.

Решая полученные уравнения, находим, что $r=5$, $R=20$.

5. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 123456 $\to$ 612345), и полученное шестизначное число вычли из исходного числа. Какие числа из промежутка $[584548;\,584570]$ могли получиться в результате вычитания?

Ответ: 584550, 584559, 584568.

Решение. Пусть $\overline{ABCDEF}$ – данное шестизначное число. Обозначим пятизначное число $\overline{ABCDE}$ через x. Тогда $\overline{ABCDEF}-\overline{FABCDE}=(10x+F)-(100000F+x)=9x-99999F$. Таким образом, полученная разность делится на 9. Из промежутка $[584548;\,584570]$ на 9 делятся числа 584550, 584559, 584568.

Докажем, что эти числа могут быть получены в результате вычитания. Для этого надо доказать, что каждое из уравнений

$$9x-99999F=584550,$$
$$9x-99999F=584559,$$
$$9x-99999F=584568$$

имеет целочисленное решение, где x – пятизначное число, а F – однозначное число, не равное нулю. Для этого достаточно в каждом из уравнений подставить $F=1$ и убедиться, что получающееся значение x является пятизначным целым числом. Действительно, первому уравнению удовлетворяет пара $x=76061$, $F=1$; второму – пара $x=76062$, $F=1$; третьему – пара $x=76063$, $F=1$. Значит, если в качестве исходных чисел взять 760611, 760621, 760631, то в результате перестановки и вычитания мы получим числа 584550, 584559, 584568.

6. На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбрана точка T так, что центр сферы, описанной около пирамиды TAA_1C_1C, лежит в грани AA_1C_1C. Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $TABC$, равен $\sqrt{19}$, а ребро основания призмы равно $4\sqrt{3}$. Найдите:

а) отношение объёма пирамиды TAA_1C_1C к объёму призмы;

б) длину отрезка TB;

в) объём призмы.

Ответ: а) $V_{TAA_1C_1C}:V=2:3$, б) $BT=2\sqrt{3}$, в) $V=216$.

Решение. Введём обозначения: K – центр грани ABC; L – середина ребра AC; P – центр сферы, описанной около пирамиды TAA_1C_1C (т.е. P – центр грани AA_1C_1C); O – центр сферы, описанной около пирамиды $TABC$.

а) $\dfrac{V_{TABC}}{V_{ABCA_1B_1C_1}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{TB}{BB_1}$; $\dfrac{V_{TA_1B_1C_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{TB_1}{BB_1}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{V_{TABC}+V_{TA_1B_1C_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{TB+TB_1}{BB_1}=\dfrac{1}{3}$. Значит, объём пирамиды TAA_1C_1C составляет две трети объёма призмы.

б) Сторона равностороннего треугольника ABC равна $4\sqrt{3}$, следовательно, $BL=6$, $BK=4$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $BKOT$. В ней известны стороны $BK=4$, $OT=\sqrt{19}$ и диагональ $OB=\sqrt{19}$. По теореме Пифагора из треугольника OKB находим, что $OK=\sqrt{3}$. Опустим из точки O перпендикуляр OH на отрезок TB. Тогда $TB=2\cdot HB=2\cdot KO=2\sqrt{3}$.

в) Обозначим $CC_1=h$. Тогда $PL=\frac{h}{2}$, $PC=\sqrt{\frac{h^2}{4}+12}$, $PT=\sqrt{BL^2+(PL-BT)^2}=\sqrt{\left(\frac{h}{2}-2\sqrt{3}\right)^2+36}$.

Отрезки PC и PT равны как радиусы сферы. Решая получающееся уравнение, находим, что $h=6\sqrt{3}$. Тогда объём призмы $V=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(4\sqrt{3}\right)^2\cdot 6\sqrt{3}=216$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases}3x^2+11xy+10y^2+10x+20y=0,\\ \sqrt{25-y(3x+5y+10)}+\sqrt{y^2-10y+30}=5.\end{cases}$

Ответ: $(-14;\,7),(-6;\,3)$.

Решение. Перепишем первое уравнение системы в виде $3x^2+(11y+10)y+\left(10y^2+20y\right)=0$ и решим его как квадратное уравнение относительно x. Получаем, что $x=-2y$ или $x=\frac{-5y-10}{3}$.

При $x=-2y$ второе уравнение системы принимает вид $\sqrt{y^2-10y+25}+\sqrt{y^2-10y+30}=5 \Leftrightarrow \sqrt{y^2-10y+30}=5-|y-5|$. Если $y\ge 5$, то получаем уравнение $\sqrt{y^2-10y+30}=10-y$, решая которое, находим, что $y=7$. Если $y<5$, то получаем уравнение $\sqrt{y^2-10y+30}=y$, решая которое, находим, что $y=3$.

При $x=\frac{-5y-10}{3}$ второе уравнение системы принимает вид $6+\sqrt{y^2-10y+30}=6 \Leftrightarrow y^2-10y+30=0$, следовательно, в этом случае решений нет.

8. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1\le a\le 1100$, $1\le b\le 1100$, сумма $a+b$ делится на 4, а произведение ab делится на 11. (При $a\ne b$ пары $(a;b)$ и $(b;a)$ считаются различными.)

Ответ: 52500.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) Пусть a делится на 11 (на отрезке $[1;1100]$ имеется $1100:11=100$ таких значений a). Для каждого такого значения a подходят те и только те значения b, при которых сумма остатков от деления a на 4 и b на 4 равна 0 или 4. То есть, подходит каждое четвёртое значение b. Итого, для каждого значения a получаем по 275 вариантов.
2) Пусть a не делится на 11 (на отрезке $[1;1100]$ имеется $1100-100=1000$ таких значений a). Для каждого такого a подходят те и только те значения b, кратные 11, при которых сумма остатков от деления a на 4 и b на 4 равна 0 или 4. То есть, подходит одно из каждых $11\cdot 4=44$ значений b. Итого, для каждого значения a получаем по 25 вариантов.

Суммируем количество пар: $100\cdot 275+1000\cdot 25=52500$.