Московский физико-технический институт

# Механические свойства пружины.

Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

Москва 2014

# Введение.

С точки зрения классической физики, пружину можно рассматривать как устройство, накапливающее потенциальную энергию путём изменения расстояния между атомами эластичного материала.

В теории упругости законом Гука установлено, что растяжение эластичного стержня пропорционально приложенной к нему силе, направленной вдоль его оси. В реальности этот закон выполняется не точно, а только при малых растяжениях и сжатиях. Если напряжение превышает определённый предел в материале наступают необратимые нарушения его структуры, и деталь разрушается или получает необратимую деформацию.

Основными характеристиками пружины являются: количество витков, шаг витка, диаметр проволоки, предельно воспринимаемая нагрузка, линейная зависимость между деформацией пружины и нагрузкой, приложенной к ней и т.д.

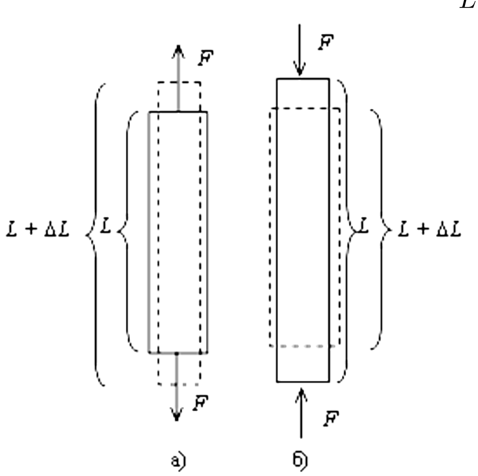
Отметим также ещё тот факт, что пружина как любое материальное тело наделено массой. Как правило в любой механической системе стараются подобрать все механизмы так, чтобы пружины считать практически не весомыми, что достаточно упрощает решение задач, однако её наличие может привести к количественным изменениям в расчётах. Более подробно это будет проиллюстрировано на примере ниже. Одновременно с этим в механических системах стараются уменьшить или сохранить фиксированной температуру пружины, поскольку её сильный нагрев может повлиять на её коэффициент жёсткости и свойства упругости, а также привести к необратимым деформациям. Однако существуют механизмы, в которых используется наличие температуры пружины! Один из них будет показан ниже.

Рассмотрим более формальный подход к расчету коэффициента жёсткости пружины и её энергии в деформированном состоянии. Поскольку существенной разницы между растянутой/сжатой пружиной и растянутым/сжатым стержнем нет, то рассмотрим последнее.

При деформациях твердого тела его частицы (атомы, молекулы, ионы), находящиеся в узлах кристаллической решетки, смещаются из своих положений равновесия. Этому смещению противодействуют силы взаимодействия между частицами твердого тела, удерживающие эти частицы на определенном расстоянии друг от друга. Поэтому при любом виде упругой деформации в теле возникают внутренние силы, препятствующие его деформации.

Силы, возникающие в теле при его упругой деформации и направленные против направления смещения частиц тела, вызываемого деформацией, называют силами упругости. Силы упругости действуют в любом сечении деформированного тела, а также в месте его контакта с телом, вызывающим деформации. В случае одностороннего растяжения или сжатия сила упругости направлена вдоль прямой, по которой действует внешняя сила, вызывающая деформацию тела, противоположно направлению этой силы и перпендикулярно поверхности тела.

Рассмотрим простейшую деформацию продольного растяжения или одностороннего сжатия стержня длины $L$, с площадью поперечного сечения $S$, к концам которого приложены силы $F$, в результате чего длина стержня меняется на величину $\triangle L$. Для характеристики деформации растяжения существенно не абсолютное значение удлинения стержня $\triangle L$, а относительное удлинение $\varepsilon = \dfrac{\triangle L}{L}$.




Растягивающие силы считаем положительными; в этом случае (рис. а) $\triangle L$ тоже положительно, поскольку при растяжении длина стержня увеличивается.

Сжимающие силы считаем отрицательными; в этом случае (рис. б) $\triangle L$ отрицательно; это означает, что, когда стержень подвергается одностороннему сжатию, его длина $L$ уменьшается.

Эксперименты свидетельствуют, что относительная деформация тем больше, чем больше действующая сила и чем меньше поперечное сечение стержня. Этот результат можно представить в виде математического соотношения:

$$(1) \qquad \varepsilon = \frac{\triangle L}{L} = \alpha \frac{F}{S}$$

Величина $\dfrac{F}{S} = \sigma$ называется механическим напряжением или просто напряжением. С учетом этого выражение (1) принимает вид:

$$(2) \qquad \varepsilon = \frac{\triangle L}{L} = \alpha\sigma,$$

где коэффициент $\alpha$, носящий название коэффициента упругости, зависит только от материала, из которого сделан стержень.

Наряду с коэффициентом упругости $\alpha$ материал принято характеризовать обратной величиной:

$$(3) \qquad E = \frac{1}{\alpha}$$

которую называют модулем упругости, или модулем Юнга. Подставляя в (2), (3) получаем:

$$(4) \qquad \varepsilon = \frac{\triangle L}{L} = \frac{1}{E}\sigma$$

Из выражения (4) находим:

$$(5) \qquad \sigma = E\varepsilon$$

Формула (5) выражает закон Гука: напряжение $\sigma$ прямо пропорционально относительному удлинению $\alpha$.

Найдём теперь выражение для энергии упруго деформированного тела. Предположим, что к стержню с первоначальной длиной $L_0$ приложено напряжение $\sigma$, тогда длина стержня после растяжения равна: $L = L_0 + \triangle L$. Так как согласно формуле (2) $\triangle L = \alpha L_0 \sigma$, новая длина стержня $L$ равна:

$$(6) \qquad L = L_0(1 + \alpha\sigma)$$

Из этой формулы видно, что в пределах упругой деформации длина стержня меняется линейно с напряжением $\sigma$. При растяжении или сжатии стержня внешние силы совершают работу. Из соотношений (1) и (3) следует, что сила не остается во время деформации постоянной. Она меняется пропорционально изменению длины стержня $\triangle L$,

$$(7) \qquad F = \frac{ES}{L}\triangle L$$

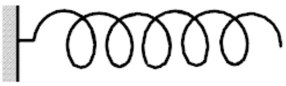
Вычислим работу такой переменной силы. Пусть длина стержня меняется от значения $L$ до $L + \triangle L$, тогда работа $A$ равна:

(8) $\quad A = \overline{F} \cdot \triangle L$, где $\overline{F}$ представляет собой среднее значение силы.

Ввиду линейности возрастания силы $F$ с удлинением $\triangle L$, среднее значение силы равно среднему арифметическому из значений силы $F = 0$ (при $\triangle L = 0$) и (при данном $\triangle L$), то есть (9) $\overline{F} = \dfrac{1}{2}\dfrac{ES}{L}\triangle L$, откуда (10) $A = \dfrac{1}{2}\dfrac{ES}{L}\triangle L^2$. Эта работа пойдет на создание потенциальной энергии упруго деформированного стержня:

$$(11) \qquad E_n = \frac{1}{2}\left(\frac{ES}{L}\right)\triangle L^2$$

Таким образом, потенциальная энергия упруго деформированного стержня оказывается пропорциональной квадрату абсолютного удлинения образца.




Конкретно к пружине величину $\frac{ES}{L}$ принято обозначать за коэффициент $k$, называющийся жёсткостью.

Наличие этой характеристики у пружины позволяет использовать её в различных механизмах, а также комбинировать с другими пружинами разной жёсткости. Рассмотрим самые простые случаи последовательного и параллельного соединения пружин.

Рассмотрим две пружины, соединенные последовательно, как это изображено на рисунке 1. Если к нижней пружине приложить направленную вертикально вниз внешнюю силу $F$, то в соответствии с третьим законом Ньютона равная ей по модулю направленная вертикально вниз сила будет действовать и на вторую пружину со стороны первой.

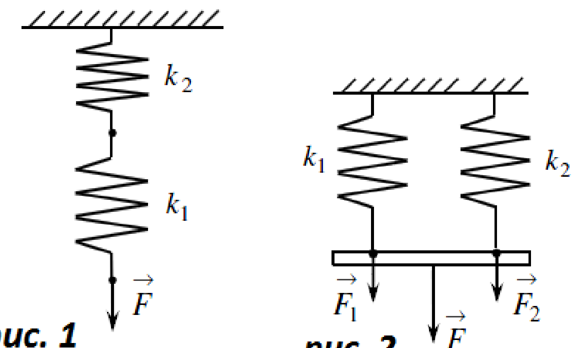



*рис. 1* *рис. 2*

Под действием силы $F$ пружины деформируются. Пусть изменение длины первой пружины равно $\triangle l_1$, а второй пружины — $\triangle l_2$. Тогда в соответствии с законом Гука: $\triangle l_1 = \frac{F}{k_1}$, $\triangle l_2 = \frac{F}{k_2}$, где $k_1, k_2$ — жёсткость первой и второй пружин соответственно. Жёсткость системы двух последовательно соединённых пружин: $k = \frac{F}{\triangle l_1 + \triangle l_2}$.

Подставляя эти значения $\triangle l_1$ и $\triangle l_2$, получаем: $k = \frac{F}{F/k_1 + F/k_2} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

В общем случае при последовательном соединении $n$ пружин:

$$(12) \qquad k_{посл} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} 1/k_i}, \text{ где } k_i \text{ — жесткость } i\text{-ой пружины.}$$

На рисунке 2 изображены две параллельно соединенные пружины, нижние концы которых закреплены на горизонтальной перемычке. Если на перемычку подействовать направленной вертикально вниз силой $F$, то произойдет деформация пружин. Со стороны перемычки на первую пружину будет действовать сила $F_1$, а на вторую пружину — сила $F_2$. В соответствии с законом Гука $F_1 = k_1 \triangle l$, $F_2 = k_2 \triangle l$, где $k_1, k_2$ — жесткость первой и второй пружин соответственно; $\triangle l$ — изменение длины каждой из пружин.

Жесткость системы двух параллельно соединенных пружин: $k = \frac{F}{\triangle l}$. Так как $F = F_1 + F_2$, то, подставляя значения $F_1$ и $F_2$, получаем: $k = \frac{k_1 \triangle l + k_2 \triangle l}{\triangle l} = k_1 + k_2$.

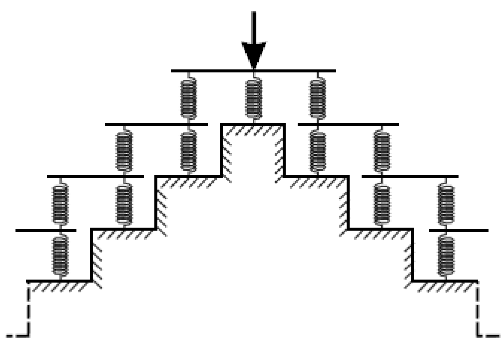
В общем случае при параллельном соединении $n$ пружин

$$(13) \qquad k_{пар} = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

Однако могут быть ещё более сложные композиции.

## Примеры решения задач.

<u>**Задача №1**</u> Найдите общий коэффициент жёсткости системы пружин, изображённой на рисунке, если внешняя сила прикладывается к верхней платформе в вертикальном направлении. Лестница, на которую опираются пружины, бесконечна. Все платформы при сжатии пружин сохраняют горизонтальное положение и не касаются ступенек лестницы. Каждая из платформ, кроме самой верхней, опирается на две пружины. Коэффициенты жёсткости всех пружин одинаковы и равны $k$, оси всех пружин вертикальны. Массой пружин и платформ можно пренебречь.



**Решение:**

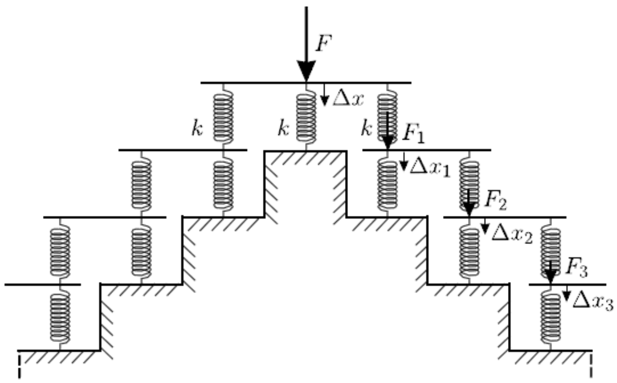
Обозначим смещение верхней платформы под действием приложенной к ней силы $F$ через $\triangle x$, а следующих, расположенных ниже платформ, под действием приложенных к ним сил $F_1, F_2, F_3, ...,$ — через $\triangle x_1, \triangle x_2, \triangle x_3, ...$ соответственно (см. рис.). Тогда из условия равновесия верхней платформы (сумма действующих на неё сил равна нулю) следует, что общий коэффициент жёсткости равен:

$$k_{\sum} = \frac{F}{\triangle x} = \frac{k\triangle x + 2k(\triangle x - \triangle x_1)}{\triangle x} = 3k - 2k\frac{\triangle x_1}{\triangle x} = k\left(3 - 2\frac{\triangle x_1}{\triangle x}\right)$$

Из условий равновесия расположенных ниже платформ следует, что $F_1 = k(\triangle x - \triangle x_1) = k\triangle x_1 + k(\triangle x_1 - \triangle x_2)$; $F_2 = k(\triangle x_1 - \triangle x_2) = k\triangle x_2 + k(\triangle x_2 - \triangle x_3)$; $F_3 = k(\triangle x_2 - \triangle x_3) = k\triangle x_3 + k(\triangle x_3 - \triangle x_4)$; ...........

Складывая эти уравнения и сокращая на $k$, получаем:

$$\triangle x = 2\triangle x_1 + \triangle x_2 + \triangle x_3 + \triangle x_4 + ... \qquad (1)$$




Ясно, что общий коэффициент жёсткости правой или левой части данной бесконечной системы пружин не должен зависеть от номера ступени. Поэтому $\dfrac{F_1}{\triangle x_1} = \dfrac{F_2}{\triangle x_2} = \dfrac{F_3}{\triangle x_3} = ...$; или $\dfrac{k(\triangle x - \triangle x_1)}{\triangle x_1} = \dfrac{k(\triangle x_1 - \triangle x_2)}{\triangle x_2} = \dfrac{k(\triangle x_2 - \triangle x_3)}{\triangle x_3} = ...$

Отсюда $\dfrac{\triangle x}{\triangle x_1} = \dfrac{\triangle x_1}{\triangle x_2} = \dfrac{\triangle x_2}{\triangle x_3} = ... = n > 1$; поскольку деформации нижних пружин меньше, чем верхних. Таким образом, $\triangle x_1 = \dfrac{\triangle x}{n}; \triangle x_2 = \dfrac{\triangle x_1}{n} = \dfrac{\triangle x}{n^2}; \triangle x_3 = \dfrac{\triangle x_2}{n} = \dfrac{\triangle x}{n^3}; ...$

Подставляя полученные выражения для $\triangle x_1, \triangle x_2, \triangle x_3, ...$ в формулу (1), получаем:

$$\triangle x = 2\frac{\triangle x}{n} + \frac{\triangle x}{n^2} + \frac{\triangle x}{n^3} + \frac{\triangle x}{n^4} + ...$$

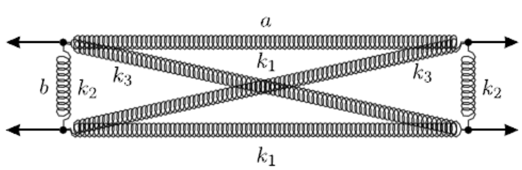
Отсюда, применяя формулу для суммы членов геометрической прогрессии, имеем:

$n = 1 + \left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3} + ...\right) = 1 + \dfrac{1}{1 - 1/n} = 1 + \dfrac{n}{n-1} = \dfrac{2n-1}{n-1}$, или $n^2 - 3n + 1 = 0$.

Решая это квадратное уравнение, находим: $n_{1;2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Поскольку $n > 1$, то $n = \dfrac{\triangle x}{\triangle x_1} = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$. С учётом этого, окончательно получаем: $k_{\sum} = k\left(3 - 2\dfrac{\triangle x_1}{\triangle x}\right) = k\left(3 - 2 \cdot \dfrac{2}{3 + \sqrt{5}}\right) = k \cdot \dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = k\sqrt{5}$.

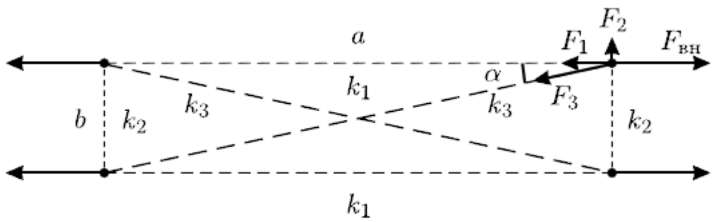
**Ответ**: $k_{\sum} = k\sqrt{5}$.

**Задача №2*** Прямоугольная рама образована тремя парами пружин с разными коэффициентами жёсткости (см. рисунок). Все пружины не деформированы и в углах рамы шарнирно соединены друг с другом. Известно, что отношение длинной и короткой сторон рамы $a = b = 25$, а отношение коэффициентов жёсткости диагональных и поперечных пружин $k_3/k_2 = 100$. Раму растягивают, прикладывая к ней четыре одинаковые силы вдоль длинной стороны, как показано стрелками на рисунке. При этом длина рамы $a$ увеличивается на $\triangle a = 0{,}001a$. Найдите относительные изменения ширины рамы $\triangle b/b$ и её площади $\triangle S/S$ при таком растяжении.

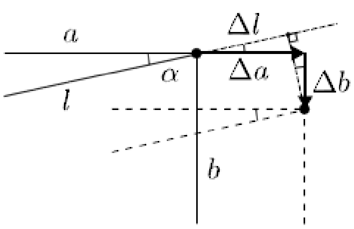



**Решение:**

При действии на раму в продольном направлении внешних сил $F_{вн}$ все пружины будут деформироваться: продольные и диагональные — растягиваться, а поперечные — сжиматься. Вследствие этого возникнут силы упругости, действующие на шарниры. Равновесное состояние рамы установится при равенстве нулю суммарной силы, действующей на каждый шарнир.




Обозначим угол между диагональю недеформированной рамы и её длинной стороной через $\alpha$, а силы упругости, действующие на шарнир со стороны продольной, поперечной и диагональной пружин — через $F_1, F_2$, и $F_3$ соответственно (см. рис.). Так как относительное удлинение рамы в продольном направлении $\triangle a/a$ очень мало, то при рассматриваемой деформации угол $\alpha$ практически не изменится. Поэтому условие равновесия шарнира в поперечном направлении имеет вид: $F_2 = F_3 \sin\alpha$. Учтём, что $F_2 = k_2 \mid \triangle b \mid, F_3 = k_3 \triangle l$, а удлинение $\triangle l$ диагональной пружины определим при помощи чертежа (см. рис.): $\triangle l \approx \triangle a \cos\alpha - \mid \triangle b \mid \sin\alpha$.




Отсюда получим: $k_2 \mid \triangle b \mid \approx k_3(\triangle a \cos\alpha \cos\alpha - \mid \triangle b \mid \sin\alpha)\sin\alpha$, и

$$\mid \triangle b \mid \approx \frac{k_3 \sin\alpha \cos\alpha}{k_2 + k_3 \sin^2\alpha} \triangle a = \frac{(k_3/k_2)\sin\alpha\cos\alpha}{1 + (k_3/k_2)\sin^2\alpha} \triangle a.$$

Так как $b = a \operatorname{tg}\alpha$, то $\dfrac{\mid \triangle b \mid}{b} \approx \dfrac{(k_3/k_2)\cos^2\alpha}{1 + (k_3/k_2)\sin^2\alpha} \cdot \dfrac{\triangle a}{a}$

Учитывая, что $\triangle b$ отрицательно (рама в поперечном направлении сжимается), $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha, \cos\alpha \approx 1$, окончательно найдём:

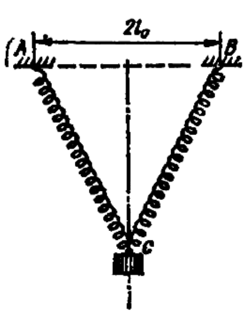
$\dfrac{\triangle b}{b} \approx -\dfrac{k_3/k_2}{1 + (k_3/k_2)\operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \dfrac{\triangle a}{a} = -\dfrac{k_3/k_2}{1 + (k_3/k_2)(b/a)^2} \cdot \dfrac{\triangle a}{A} = -\dfrac{100}{1 + 100 \cdot (1/25)^2} \cdot 0,001 \approx -0,1$, то есть относительное изменение ширины рамы составляет $\sim 10\%$.

Относительное изменение площади рамы при этом равно: $\dfrac{\triangle S}{S} = \dfrac{(a + \triangle a)(b + \triangle b) - ab}{ab} \approx \dfrac{\triangle a}{a} + \dfrac{\triangle b}{b}$.

Так как $\triangle a/a \ll \mid \triangle b \mid /b$, то $\triangle S/S \approx \triangle b/b \approx -0,1$. Мы видим, что в данном случае площадь рамы при её растяжении уменьшается. Это свидетельствует о том, что объём тела при растяжении может не только увеличиваться (как это имеет место для большинства упругих тел), но и уменьшаться. Приведённая в задаче модель показывает, каким может быть внутреннее строение вещества (например, некоторого полимера), обладающего такими необычными свойствами.

**Ответ**: $\triangle S/S \approx \triangle b/b \approx -0,1$.

**Задача №3** Две одинаковые пружины, закреплённые в точках $A$ и $B$, растянулись под действием груза так, что система пришла в равновесие при $\mid AC \mid = \mid BC \mid = \mid AB \mid = 2l_0$. С какой циклической частотой $\omega$ будет колебаться груз, если его немного сместить из положения равновесия в вертикальном положении и отпустить?



**Решение:** Из симметрии системы следует, что груз будет совершать колебания вдоль вертикальной прямой — оси X. Циклическая частота таких колебаний $\omega = \sqrt{k_0/m}$, где $m$ — масса груза, $k_0$ — жесткость системы подвеса.

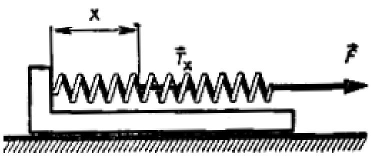
Малое смещение $x$ груза из положения равновесия вызовет удлинение каждой пружины на величину $\triangle l = x\cos\alpha$ и появление в неё дополнительной силы упругости $F_1 = kx\cos\alpha$, где $k$ — жесткость пружины. Тогда сила, возвращающая груз в положение равновесия, $F = 2kx\cos^2\alpha = k_0x$, где $k_0 = 2k\cos^2\alpha$.

Следовательно, циклическая частота $\omega = \cos\alpha\sqrt{2k/m}$. Из условия равновесия груза в точке $C$ следует, что

$mg = 2kl_0\cos\alpha$. Поэтому $\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{g}{l_0}}$.

**Ответ**: $\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{g}{l_0}}$.

**Задача №4* (Динамометр)** К динамометру приложена сила 4 Н так, что он движется с постоянным ускорением по горизонтальному столу. Что показывает динамометр, если масса пружины равна массе корпуса?




**Решение:**

Возникающая при растяжении пружины сила упругости $T$ пропорциональна удлинению пружины $\triangle L$: $T = k\triangle L$, где $k$ — жесткость пружины.

В обычных условиях, когда динамометр неподвижен, сила упругости в любом сечении пружины одна и та же, т. е. любые равные участки пружины удлиняются при растяжении на одну и ту же величину. При движении динамометра с ускорением дело обстоит не так. Рассмотрим сечение пружины, которое находится на расстоянии $x$ от конца пружины, прикрепленного к корпусу динамометра. Сила упругости $T_x$ сообщает ускорение корпусу динамометра и участку пружины длиной $x$. Масса этого участка пружины равна $M_x = \frac{M}{L}x$, где $M$ — масса и $L$ — длина всей пружины.

Если динамометр движется с ускорением $a$, то согласно второму закону Ньютона силу упругости в сечении $x$ можно записать так:

$$(1) \quad T_x = (M + M\frac{x}{L})a$$

Так как ускорение динамометру сообщает сила $\overrightarrow{F}$, то $a = \frac{F}{M+M} = \frac{1}{2}\frac{F}{M}$. Поэтому $T_x = \frac{1}{2}F\left(1 + \frac{x}{L}\right)$. Итак, сила $T_x$ меняется от сечения к сечению вдоль пружины.

Для того чтобы найти удлинение пружины, мысленно разобьем нерастянутую пружину на одинаковые маленькие участки длиной $\triangle l$. На каждом таком участке можно силу упругости считать постоянной. Пусть таких участков будет $n$ ($n \gg 1$). Так как при одной и той же силе упругости деформация $n$ соединенных последовательно участков в $n$ раз больше деформации одного участка, то жесткость одного участка в $n$ раз больше жесткости всей пружины:

$$k^1 = kn$$

Будем отсчитывать участки от конца пружины, прикрепленного к корпусу динамометра. Удлинение $i$-го участка равно $\triangle l_i = \frac{T_i}{k^1} = \frac{T_i}{kn}$. Но, как следует из формулы (1), $T_i = \frac{1}{2}F\left(1 + \frac{il}{nl}\right) = \frac{1}{2}F\left(1 + \frac{i}{n}\right)$. Поэтому $\triangle l_i = \frac{1}{2kn}F\left(1 + \frac{i}{n}\right)$

Полное удлинение пружины найдем суммированием удлинений отдельных участков:

$$\triangle l = \sum \triangle l_i = \frac{1}{2kn} F \sum \left(1 + \frac{i}{n}\right)$$

Так как $\sum_1^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)$ представляет собой сумму членов арифметической прогрессии с разностью прогрессии $\frac{1}{n}$, то $\triangle l = \frac{F}{4k}\frac{3n+1}{n}$. Но $n > 1$. Поэтому $\triangle l \approx \frac{3}{4}\frac{F}{k}$.

Подставим это выражение для $\triangle L$ в формулу (1), найдём показания динамометра: $T = k\frac{3F}{4k} = \frac{3}{4}F = 3$ Н.

**Ответ**: $T = \frac{3}{4}F = 3$ Н.

**Задача №5** Одна из обкладок плоского конденсатора площадью $S$ подвешена на пружине, а другая обкладка закреплена неподвижно. Расстояние между пластинами в начальный момент равно $l_0$. Конденсатор на короткое время подключили к батарее, и он зарядился до напряжения $U$. Какой должна быть жесткость $k$ пружины, чтобы не происходило касания пластин в результате их взаимного притяжения после зарядки? Смещением пластины конденсатора за время зарядки можно пренебречь.

**Решение:**

При подключении к источнику конденсатор заряжается до напряжения $U$ и его пластины приобретают заряды $+q$ и $-q$, равные по модулю $q = CU = \frac{\varepsilon_0 SU}{l_0}$ (в системе СИ).

Верхняя заряженная пластина конденсатора оказывается при этом в поле заряда нижней пластины, и на нее действует сила $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$, где $\overrightarrow{E}$ — напряженность поля заряда нижней пластины. Так как в плоском конденсаторе линейные размеры пластин много больше расстояния между пластинами, то можно считать, что это поле совпадает с полем бесконечной равномерно заряженной плоскости. Напряженность такого поля не зависит от расстояния до плоскости и равна по модулю $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}$, где $\sigma$ — плотность заряда.

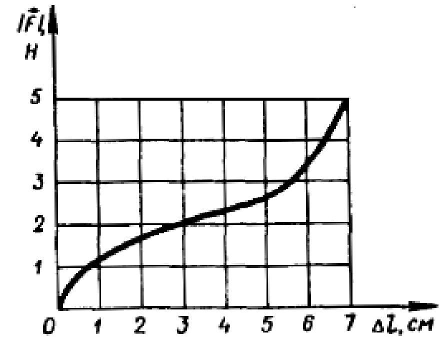
Под действием силы $\overrightarrow{F}$ верхняя пластина придет в движение, растягивая пружину. Эта сила, как и сила тяжести, не зависит от положения пластины. Сила же упругости $\overrightarrow{F}_{упр}$ пружины по модулю пропорциональна смещению. Поэтому пластина будет совершать гармонические колебания около положения равновесия, в котором $F + mg = F_{упр}$, (1) где $m$ — масса пластины. Амплитуда колебаний пластины будет равна расстоянию $h$ между ее первоначальным положением и положением равновесия. Следовательно, пластины не будут соприкасаться, если это расстояние $h$ меньше половины первоначального расстояния $l_0$ между пластинами (при незаряженном конденсаторе). Обозначим $\triangle x_0$ деформацию пружины в первоначальном положении. Ее деформация в новом положении равновесия равна $\triangle x_0 + h$. В этом положении сила упругости пружины по модулю равна $F_{упр} = k(\triangle x_0 + h)$. Так как при отсутствии на пластинах конденсатора зарядов верхняя пластина находилась в равновесии, то $mg = k\triangle x_0$.

Подставив выражения для $F_{упр}$ и $mg$ в формулу (1), получим: $F + k\triangle x_0 = k(\triangle x_0 + h)$, откуда $h = \frac{F}{k}$.

Таким образом, пластины не коснутся, если $\frac{F}{k} < \frac{1}{2}l_0$, т. е. при $k > \frac{2F}{l_0} = \frac{2qE}{l_0} = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{l_0^3}$.

**Ответ**: при $k > \frac{2F}{l_0} = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{l_0^3}$.

**Задача №6*** Трубка, в которой находится пружинка длиной $l_0 = 2$ см с прикрепленным к ней шариком, может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через конец трубки. Свободный конец пружинки прикреплен к трубке. Нарисуйте примерный график зависимости смещения шарика вдоль трубки от угловой скорости при увеличении ее от нуля до значения, при котором $F = 5$ Н. Как изменится эта зависимость при уменьшении угловой скорости? График зависимости модуля силы упругости $F$ от удлинения пружины представлен на рисунке.




**Решение:**

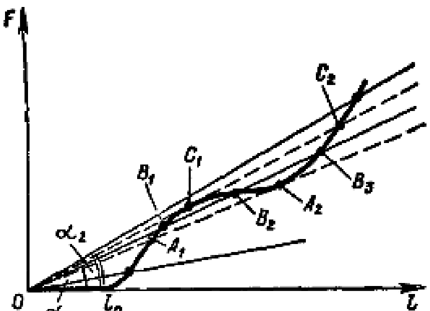



рис. а

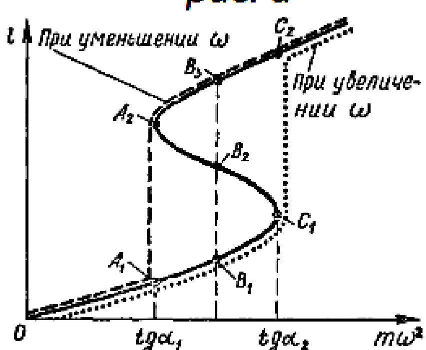



рис. б

Будем считать, что угловая скорость со вращения трубки меняется медленно, так что при каждом значении со шарик находится в равновесном состоянии относительно трубки, а в неподвижной системе отсчета шарик движется по окружности радиуса $l_0 + \triangle l$ (где $\triangle l$ — изменение длины пружины). Так как центростремительное ускорение $a = \omega^2(l_0+\triangle l)$ сообщается шарику силой упругости пружины, то согласно второму закону Ньютона

$$m\omega^2(l_0 + \triangle l) = F_{упр} \quad (1)$$

Для того чтобы решить задачу, необходимо из уравнения (1) найти зависимость $\triangle l$ от $\omega$ или, что удобнее, $l = l_0 + \triangle l$ от $m\omega^2$.

Зависимость силы упругости пружины от удлинения пружины задана графически, поэтому уравнение (1) мы будем решать тоже графически. Перерисуем график, сдвинув начало координат в точку с координатой $-l_0$ (рис. 1 а). Теперь по оси абсцисс оказывается отложенной полная длина $l$ пружины. Если из начала координат провести прямую линию, то координатами точки пересечения этой прямой с графиком будут значения силы упругости $F_{упр}$ и соответствующей ей длины пружины $l$, а тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс будет равен

$$\frac{F_{упр}}{l} = m\omega^2$$

Чтобы построить график зависимости $l$ от $m\omega^2$, проведем из начала координат пучок прямых и отметим все точки пересечения прямых с графиком. Затем, зная значения $l$ и соответствующие им значения $m\omega^2 = \operatorname{tg}\alpha$, будем отмечать их на графике зависимости $l$ от $m\omega^2$.

Из рисунка а) видно, что при углах $\alpha < \alpha_1$, т. е. при $m\omega^2 < \operatorname{tg}\alpha_1$, каждая из проведенных прямых пересекается с графиком $F_{упр}(l)$ только в одной точке. И каждому значению $m\omega^2$ соответствует одно значение $l$. При $a_1 < \alpha < \alpha_2$ прямая пересекается в трех точках (при $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ — в двух), т. е. одному и тому же значению $m\omega^2$ соответствуют три значения $l$. Отметим их все на графике. При $\alpha > \alpha_2$, т. е. при $m\omega^2 < \operatorname{tg}\alpha_2$, каждая из прямых опять пересекается с графиком только в одной точке и каждому значению $m\omega^2$ соответствует лишь одно значение $l$. Соединив все нанесенные точки плавной кривой, мы получим график, показанный на рисунке б).

При $m\omega^2 < \ tg\alpha_1$ и при $m\omega^2 > \operatorname{tg}\alpha_2$ каждому значению угловой скорости соответствует одно значение $l$. Но при $\operatorname{tg}\alpha_1 < m\omega^2 < \operatorname{tg}\alpha_2$ имеется три разных значения $l$ для каждого значения $m\omega^2$. На каком же расстоянии от оси вращения находится шарик?

Прежде всего ясно, что шарик не может находиться на таком расстоянии, которое соответствует точке $B_2$ графика (см. рис. а). Действительно, предположим, что по случайной причине шарик слегка отклонился от этого положения равновесия, так что $l$ увеличилась на $\triangle x$. Для того чтобы шарик вращался, находясь на расстоянии $l + \triangle x$ от оси, сила упругости должна возрасти. Как видно из рисунка, в рассматриваемом случае сила упругости уменьшается. Следовательно, эта сила не может сообщить шарику необходимое для его движения центростремительное ускорение и шарик будет продолжать двигаться вдоль трубки к положению $B_3$. Таким образом, точка $B_2$ соответствует положению неустойчивого равновесия шарика. Аналогично можно показать, что точки $B_1$ и $B_3$ соответствуют положениям устойчивого равновесия шарика. Поэтому при $\operatorname{tg}\alpha_1 < m\omega^2 < \operatorname{tg}\alpha_2$ шарик может находиться в положениях, соответствующих участкам графика $A_1C_2$ и $A_2C_2$.

В каком же именно из своих устойчивых; положений будет находиться шарик? Ответ на этот вопрос зависит от того, как изменяется угловая скорость вращения трубки. Если $\omega$ увеличивается, то шарик не может попасть в положения, соответствующие участку $A_2C_2$ графика, не пройдя положений, соответствующих участку $A_1C_1$, каждое из которых является устойчивым.

Следовательно, при увеличении угловой скорости $\omega$ изменение видят по графику, показанному на рисунке б) справа (в точке $m\omega^2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ величина $l$ изменяется скачком от значения, соответствующего точке $C_1$, до значения, соответствующего точке $C_2$). При уменьшении же угловой скорости график зависимости $l$ от $m\omega^2$ будет таким, как показано на том же рисунке слева. Конечно, следует иметь в виду, что если трубка вращается с такой угловой скоростью, что $\operatorname{tg}\alpha_1 < m\omega^2 < \operatorname{tg}\alpha_2$, то, сильно толкнув шарик, можно перевести его в положение, соответствующее «чужому» участку графика, по которому и будет в дальнейшем изменяться $l$ при изменении $\omega$.

**Ответ**: смотри решение.

**Задача №7 (Нелинейная пружина)** На тонкой легкой нити подвешен грузик, под тяжестью которого нить удлинилась на $\triangle x_0 = 10$ см. Определить период малых вертикальных колебаний этого грузика после вывода его из вертикальных колебаний этого грузика после вывода его из положения равновесия, если известно, что сила, с которой нить действует на грузик, выражается формулой: $F = -k_1\triangle x - k_2(\triangle x)^3$, где $\triangle x$ — приращение длины нити, а коэффициенты $k_1$ и $k_2$ имеют значения: $k_1 = 294$ Н/м, $k_2 = 9800$ Н/м$^3$. Как изменится период колебаний, если изменить массу грузика?

**Решение** $\mapsto$ Введём величину $\xi$, характеризующую отклонение грузика от положения равновесия: $\triangle x = \triangle x_0 + \xi$. На грузик действуют сила тяжести и сила упругости. Равнодействующая этих сил равна:

$$F = mg - k_1(\triangle x_0 + \xi) - k_2(\triangle x_0 + \xi)^3 = mgk_1\triangle x_0 - k_2(\triangle x_0)^3 - [k_1 + 3k_2(\triangle x_0)^2]\xi - 3k_2\triangle x_0\xi^2 - k_2\xi^3.$$

Так как по условию задачи нас интересуют малые колебания, то $\xi \ll 1$, поэтому членами, содержащими $\xi^2$ и $\xi^3$, можно пренебречь. Для состояния равновесия имеем $mg = k_1\triangle x_0 + k_2(\triangle x_0)^3$, значит, силу $F = -[k_1 + 3k_2(\triangle x_0)^2]\xi$.

Движение, совершаемое под действием такой силы, является гармоническим. Частота гармонических колебаний удовлетворяет условию $\omega^2 = -(F/m)$, период равен $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + 3k_2(\triangle x_0)^2}}$, где $m$ — масса тела, которая явно не задана, но её нетрудно определить из условия равновесия, рассмотренного выше. Имеем $m = \dfrac{k_1\triangle x_0 + k_2(\triangle x_0)^3}{g}$.

Окончательно выражение для периода принимает вид: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{k_1\triangle x_0 + k_2(\triangle x_0)^3}{g[k_1 + 3k_2(\triangle x_0)^2]}}$.

Подставив в это выражение численные значения величин, получаем $T = 0.52$ с.

Определим зависимость периода от массы грузика. Прежде всего отметим, что с увеличением массы $\triangle x_0$ возрастает (в состоянии равновесия).

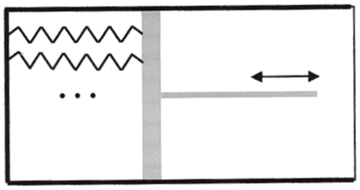
Теперь найдём, каким образом период $T$ зависит от $\triangle x_0$. После несложных вычислений получим

$$\frac{dT}{d(\triangle x_0)} = \frac{\pi}{gT}\frac{k_1^2 + 3k_2^2(\triangle x_0)^4}{[k_1 + 3k_2(\triangle x_0)^2]^2} > 0.$$

Это означает, что $T$ также возрастает с увеличением $\triangle x_0$. А поскольку $\triangle x_0$ является возрастающей функцией массы, то и период также возрастает с увеличением массы.

**Ответ**: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{k_1\triangle x_0 + k_2(\triangle x_0)^3}{g[k_1 + 3k_2(\triangle x_0)^2]}}$.

**Задача №8* (Наличие температуры)** Некий талантливый изобретатель создал тепловую машину, в которой рабочим телом является система из $N \gg 1$ одинаковых невесомых пружин, закреплённых между жёсткой стенкой цилиндрического сосуда и жёстким поршнем, скользящим без трения в сосуде (см. рисунок). Цилиндр располагается горизонтально, справа и слева от поршня — вакуум. Коэффициент жёсткости пружин при $l \gg l_0$ зависит от их длины и температуры ($l_0$ — длина пружин в недеформированном состоянии): $k(T,l) = k_0\sqrt{\frac{T}{T_0}} \cdot \frac{l_0}{l}$. Цикл машины состоит из следующих процессов:



1) — пружины растягиваются постоянной силой от $l_1 \gg l_0$ до $l_2 = 2l_1$.

2) растяжение продолжается до $l_3 = 4l_1$ без теплообмена пружин с внешними телами

3) пружины сжимаются при неизменной температуре до $l_2$

4) сжатие пружин без теплообмена с внешними телами до начальной длины $l_1$.

Запишите уравнение состояния рабочего тела (то есть уравнение, связывающее давление, создаваемое пружинами, с объёмом и температурой) и выражение для внутренней энергии рабочего тела через объём и давление. Изобразите цикл рабочего тела в координатах $p - V$. Вычислите КПД этого цикла.

**Решение:**

Нетрудно заметить, что в этом случае (учитывая, что $V = lS$ и $l \gg l_0$):

$P = -\frac{F}{S} = -\frac{Nk(l-l_0)}{S} = -\frac{Nk_0l_0}{S}\sqrt{\frac{T}{T_0}}\left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \approx -\frac{Nk_0l_0}{S}\sqrt{\frac{T}{T_0}}$, то есть, если обозначить за $\alpha = \frac{Nk_0l_0}{2S\sqrt{T_0}}$, то мы получим уравнение состояния: $P = -2\alpha\sqrt{T}$.

Здесь важно было обратить внимание на два обстоятельства: во первых давление в рабочей области отрицательно, так как растянутые пружины втягивают поршень в занимаемый им объем; во вторых в приближении $l_0 \gg l$ давление не зависит от объема и изобары совпадают с изотермами.

Для дальнейшего решения необходимо выбрать выражение для внутренней энергии системы. Здесь можно идти разными путями, так как в действительности «тепловые» свойства описанной в условии системы можно определять по разному, при этом после выбора выражения для $U$ решение становится однозначным.

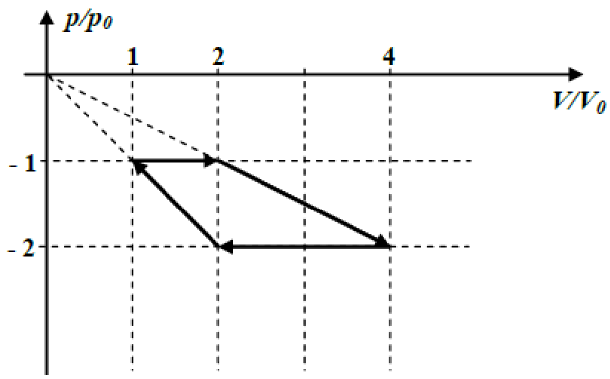
Рассмотрим самый простой вариант, воспользуемся выражением для внутренней энергии пружин, согласно механическому подходу: $U = \frac{Nk(l-l_0)^2}{2} = \frac{Nk_0l_0}{2l}(l-l_0)^2\sqrt{\frac{T}{T_0}} \approx \frac{Nk_0l_0}{2S}V\sqrt{\frac{T}{T_0}} = \alpha V\sqrt{T}$.

В этом случае легко можно найти выражение для внутренней энергии через давление и объем: $U = -\frac{PV}{2}$ и вывести уравнение адиабатических процессов в координатах $P - V$: условие отсутствия теплообмена:

$\delta Q = PdV + dU = \frac{1}{2}(PdV - VdP) = \frac{P^2}{2} \cdot d\left(\frac{V}{P}\right) = 0$ (здесь мы воспользовались формулой дифференцирования частного).

Следовательно, для адиабаты $d\left(\frac{V}{P}\right) = 0 \Rightarrow P = \text{const} \cdot V$

Итак, адиабаты в координатах $P - V$ изображаются прямыми, проходящими через начало координат. Теперь нетрудно изобразить цикл нашей тепловой машины в этих координатах (давление и объем в начальном состоянии обозначены $-P_0$ и $V_0$ соответственно):

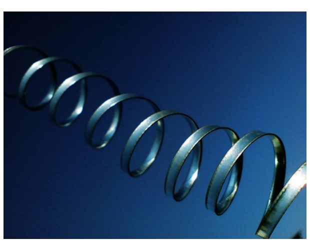



Как видно по направлению обхода, это действительно цикл тепловой машины, причем вещество получает тепло в процессе изотермического сжатия, и отдает в процессе изотермического расширения. Поэтому (работу цикла удобно вычислять как площадь трапеции): $Q_H = A_{34} + \triangle U_{34} = -2P_0(-2V_0) + \left[-\dfrac{(-2P_0)(2V_0)}{2} + \dfrac{(-2P_0)(4V_0)}{2}\right] = 2P_0V_0$, а работа за цикл: $A = P_0 \cdot \dfrac{V_0 + 2V_0}{2} = \dfrac{3}{2}P_0V_0$, откуда находим КПД цикла: $\eta = 75\%$.

Замечание: если говорить о физической стороне вопроса, то можно обратить внимание, что у реальных веществ в конденсированной фазе действительно существуют состояния с отрицательным давлением (среднее расстояние между молекулами превышает равновесное расстояние при данной температуре), более того — существуют реальные вещества, для которых в некоторой области выражение для внутренней энергии близко к $-\dfrac{PV}{2}$.

**Ответ**: смотри решение.

**Задача №9 (Эксперимент с пружиной)** Экспериментатор держит в руке конец длинной (около 1 м) свободно свисающей неподвижной спирали, затем отпускает её. При этом сначала начинает падать верхняя часть спирали, а нижняя часть висит неподвижно до тех пор, пока её не достигает падающая верхняя часть. Только после этого спираль падает как единое целое. Для сравнения рядом со спиралью одновременно отпускают вертикальную палку, которая при падении достигает поверхности намного быстрее. Объясните эксперимент! Оцените коэффициент жёсткости пружины, если ее масса и длины в свободном и свободно свисающем состоянии известны.



**Решение:**

Вначале пружина находится в состоянии покоя, это означает, сумма всех сил равна нулю. На каждую точку на пружине действует сила тяжести, которая компенсируется силой растяжения. Когда пружину отпускают сверху, равновесие этих сил прерывается, в результате верхний конец пружины начинает падать с ускорением $a > g$ (т.к. и сила тяжести, и сила растяжения действуют в одном направлении). Одновременно сверху вниз начинает распространяться волна (аналогично звуковой волне), которая меняет силу растяжения, потому что удлинение пружины поменялось. Однако скорость этой волны уже вскоре становится меньше, чем скорость падения верхнего конца: верхний конец опережает это (аналогично сверхзвуковой скорости). В связи с этим, нижние участки пружины ещё находятся в равновесии под действием силы тяжести и силы растяжения, поэтому не падают, пока их не достигнет верхний конец (аналогично ударной волне).

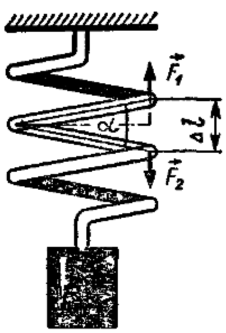
Чтобы решить дополнительное задание, обозначим массу пружины $M$, количество витков — $N$, длину в недеформированном состоянии $L_0 = Nd$, где $d$ толщина витков, длина в начальном состоянии $L$. Введём координату $y$ вдоль витков пружины так, чтобы $y_0 = 0$ в нижнем конце пружины, $y_1 = 2\pi RN$ в верхнем конце, где $R$ — радиус витка. В начальном состоянии, когда пружина свободно свесится, в каждой точке $y$ есть равновесие между силой тяжести $Mgy/y_1$ и силой растяжения $k_1 x$, где $x = l - d$ удлинение данного витка и $k_1$ — коэффициент жёсткости одного витка.

Видим, что удлинение витка с координатой $y$ равно $x = Mgy/k_1 y_1$ и что оно прямопропорционально их координате, т.е количеству витков, которые находятся под ним. То есть, среднее удлинение витка, которое мы можем определить, относительно удлинения всей пружины, равно $x_{средний} = (L - L_0)/N$, которое соответствует координате $y_1/2$. Этой точке припишем полученное выше выражение удлинения $(L - L_0)/N = Mg/2k_1$, чтобы получить коэффициент жёсткости одного витка $k_1 = MgN/2(L - L_0)$. При одинаково приложенной силе, удлинение каждого витка одинаково, поэтому коэффициент жёсткости пружины, что определяет общее удлинение пружины, будет $k = k_1/N$. В результате получаем, что коэффициент жёсткости пружины $k = Mg/2(L - L_0)$.

Если масса пружины равна 200г, удлинение $L - L_0$=100 см, получим коэффициент жёсткости $k$=1 N/m.

**Ответ**: $k = Mg/2(L - L_0)$=1 N/m.

**Задача №10** Из двух одинаковых кусков стальной проволоки свили две пружины. Диаметр витков одной из них $d$, другой — $2d$. Первая пружина под действием груза растянулась на 1/10 своей длины. На какую часть своей длины растянется под действием того же груза вторая пружина?




**Решение:**

Удлинение $\triangle l$ пружины можно выразить так: $\triangle l = n \cdot 2d \sin\dfrac{\alpha}{2}$, где $n$ — число витков пружины, а $\alpha$ — угол, на который разворачивается виток пружины. Так как общее удлинение пружины мало, то этот угол мал и $\sin\dfrac{\alpha}{2} \approx \dfrac{\alpha}{2}$.

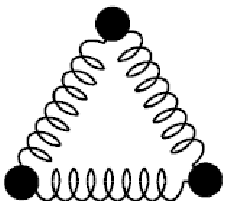
Следовательно, $\triangle l = nd\alpha$. Угол $\alpha$ пропорционален моментам сил $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$, которые растягивают виток: $\alpha \sim Fd$, где $F = |\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}|$. Так как силы $|\overrightarrow{F_1}|$ и $|\overrightarrow{F_2}|$ по модулю равны весу $P$ груза, подвешенного к пружине, то $\triangle l \sim nd^2P$.

Диаметр витков второй пружины вдвое больше, а число витков у неё вдвое меньше; следовательно, абсолютное удлинение второй пружины вдвое больше, чем первой. Таким образом, вторая пружина растянется на $\dfrac{2}{5}$ своей длины.

**Ответ**: $\dfrac{2}{5}$.

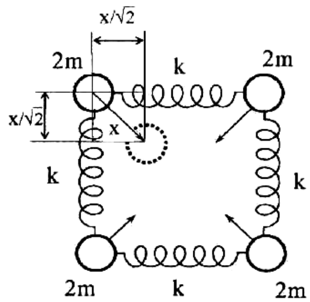
## Упражнения.

1) Имеются три шарика одинакового объема (рис.). Один изготовлен из материала с плотностью 2г/см$^3$, а два других — из материала с плотностью 0,5 г/см$^3$. Шарики соединили тремя одинаковыми пружинами и бросили в воду. Какую форму примет конструкция? (Укажите углы треугольника.) Масса и объем пружин пренебрежимо малы. Объем каждого шарика $V = 1$ см$^3$, жесткость пружин $k = 0{,}2$ Н/м. Длина нерастянутых пружин 10 см.



**Ответ**: $\alpha = 2kl_0/3\rho gV \approx 8°$.

2) Четыре одинаковых шарика массы $2m$ каждый, соединенные одинаковыми пружинами жесткости $k$, образуют квадрат. Одновременно все четыре шарика толкнули, сообщив им одинаковые по модулю скорости, направленные к центру квадрата. Через какое минимальное время после этого пружины будут сильнее всего сжаты? Массами пружин пренебречь.




**Ответ**: $t_1 = T/4 = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

## Литература

[1] Корявов, методы решения задач по физике, Механика.

[2] Виленкин(задачник по физике).

[3] Григорьев Ю. М., Муравьёв В. М., Потапов В. Ф. Олимпиадные задачи по физике, Международная олимпиада Туймаада.

[4] Олимпиада школьников « Покори Воробьёвы Горы », 2011.

[5] Латвийская физическая олимпиада, Рига, 2014.

[6] Слободецкий, Орлов, Всесоюзные олимпиады по физике (1982).

[7] Санкт-Петербургские олимпиады по физике (physolymp.spb.ru).

[8] Окружные, региональные этапы по физике, Москва.

[9] Учебное издание: Варламов С. Д., Зинковский В. И., Семёнов М. В., Старокуров Ю. В., Шведов О. Ю., Якута А. А. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005.

[10] Польские физические олимпиады, В. Горшковский, 1982 г.