Московский физико-технический институт

Использование теорем Менелая и Чевы при решении геометрических задач.

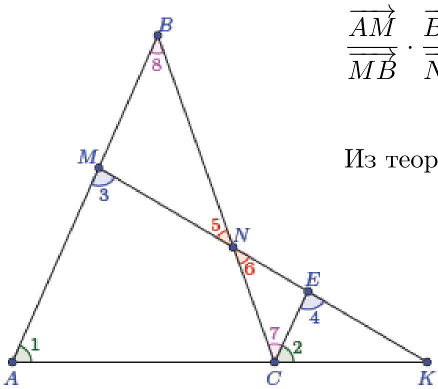
Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

Москва 2014

Теоретический материал.

Теорема Менелая: Пусть на прямых BC, CA, AB, содержащих стороны треугольника ABC, даны соответственно точки M, N, K. Для того, чтобы эти точки лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство:



$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{NC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CK}}{\overrightarrow{KA}} = -1.$$

Из теоремы, в частности, следует соотношение для длин: $\dfrac{\mid AM \mid}{\mid MB \mid} \cdot \dfrac{\mid BN \mid}{\mid NC \mid} \cdot \dfrac{\mid CK \mid}{\mid KA \mid} = 1.$

Доказательство :

1) Сделаем дополнительное построение $CE \parallel AB$. Видим, что $\triangle AMK$ подобен $\triangle CEK$ ($\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$)

$$\Rightarrow \frac{EK}{MK} = \frac{CK}{AK} = \frac{EC}{AM}.$$

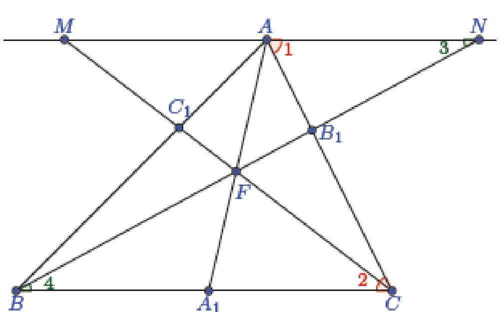
2) $\angle 5 = \angle 6$ (вертикальные), $\angle 7 = \angle 8$ (внутренние накрест лежащие). Следовательно $\triangle NBM \sim \triangle NEC$, откуда имеем:

$$\frac{NE}{MN} = \frac{EC}{MB} = \frac{NC}{BN}.$$

3) Далее $EC = \dfrac{CK \cdot AM}{AK}$, $\dfrac{CK}{AK} \cdot \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{NC}{BN} \Leftrightarrow \dfrac{AM}{MB} \cdot \dfrac{BN}{NC} \cdot \dfrac{CK}{KA} = 1.$

Ч.т.д.

Теорема Чевы: Пусть на сторонах треугольника ABC даны точки A_1, B_1, C_1. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 тогда и только тогда пересекаются в одной точке, когда:



$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$

Доказательство:

1) Дополнительное построение $MN \parallel BC$ и $CC_1 \parallel MN = M, BB_1 \bigcap MN = N$.

2) Заметим, что $\triangle BB_1C$ подобен $\triangle ANB_1$ ($\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$). Имеем: $\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{AN}{BC}$.

Из подобия $\triangle AC_1M$ и $\triangle BC_1C \Rightarrow \dfrac{MA}{BC} = \dfrac{AC_1}{C_1B}$ и из подобия $\triangle FAN$ и $\triangle BFA_1$ получим:

$$(1) \qquad \frac{AN}{BA_1} = \frac{AF}{FA_1} = \frac{NF}{BF}.$$

Также из подобия $\triangle MFA$ и $\triangle FCA_1 \Rightarrow$

$$(2) \qquad \frac{AF}{A_1F} = \frac{MA}{A_1C} = \frac{MF}{FC}$$

и из подобия $\triangle MFN$ и $\triangle BFC \Rightarrow \dfrac{MF}{FC} = \dfrac{NF}{BF}$.

Из (1) и (2) следует, что $\dfrac{AN}{BA_1} = \dfrac{AF}{FA_1} = \dfrac{MF}{FC} \Rightarrow \dfrac{AN}{BA_1} = \dfrac{MA}{A_1C} \Rightarrow \dfrac{AN}{MA} = \dfrac{BA_1}{A_1C}$.

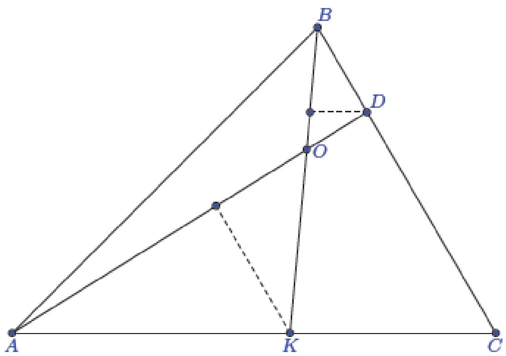
Получаем систему: $\begin{cases} BC = \dfrac{AN \cdot B_1C}{AB_1} \\ BC = \dfrac{MA \cdot C_1B}{AC_1} \\ \dfrac{AN}{MA} = \dfrac{BA_1}{A_1C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{AN}{MA} \cdot \dfrac{B_1C}{AB_1} \cdot \dfrac{AC_1}{C_1B} = 1 \\ \dfrac{BA_1}{A_1C} \cdot \dfrac{B_1C}{AB_1} \cdot \dfrac{AC_1}{C_1B} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{BA_1}{A_1C} \cdot \dfrac{CB_1}{B_1A} \cdot \dfrac{AC_1}{C_1B} = 1.$

Ч.т.д.

Примеры решения задач.

Задача №1 Точки D и K лежат на сторонах $AC, BC, \triangle ABC$, при этом $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{2}{5}, \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{3}{2}$. В каком отношении прямая BK делит AD?

Решение:



Пусть $AD \bigcap BK = O$, тогда по теореме Менелая получим:

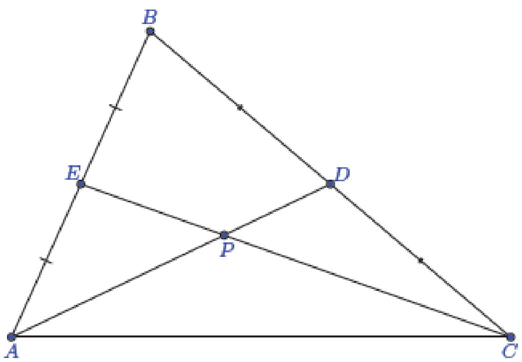
$$\frac{CD}{DB} \cdot \frac{BO}{OK} \cdot \frac{KC}{CA} = 1 \text{ и } \frac{CK}{KA} \cdot \frac{AO}{OD} \cdot \frac{DB}{BC} = 1.$$

Имеем: $\dfrac{CK}{KA} = \dfrac{2}{3}$. Так как $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow BD = \dfrac{2}{5}DC$, $BD + DC = BC$, то есть $BC = \dfrac{7}{5}DC \Rightarrow DC = \dfrac{5}{7}BC$, получим, что $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{AO}{OD} \cdot \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{DC}{BC} = 1$ (где $DC = \dfrac{5}{7}BC$). Имеем: $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{AO}{OD} \cdot \dfrac{2}{7} = 1 \Rightarrow \dfrac{AO}{OD} = \dfrac{21}{4}$.

Ответ: $\dfrac{AO}{OD} = \dfrac{21}{4}$.

Задача №2 Медиана AD и высота CE равнобедренного треугольника $\triangle ABC$ $(AB = BC)$ пересекаются в точке P. Найти $S_{\triangle ABC}$, если $CP = 5, PE = 2$.

Решение:



Известно $CE = 2 + 5 = 7$, найдём $\dfrac{EA}{AB}$. По теореме Менелая получим:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CP}{PE} \cdot \frac{EA}{AB} = 1 \text{ и } \frac{BE}{EA} \cdot \frac{AP}{PD} \cdot \frac{DC}{CB} = 1.$$

Получим систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{BE}{EA} \cdot \dfrac{AP}{PD} \cdot \dfrac{DC}{CB} = 1 \\ \dfrac{BD}{DC} \cdot \dfrac{CP}{PE} \cdot \dfrac{EA}{AB} = 1 \\ AB = BC, BD = DC \\ CP = 5, PE = 2 \end{cases}$

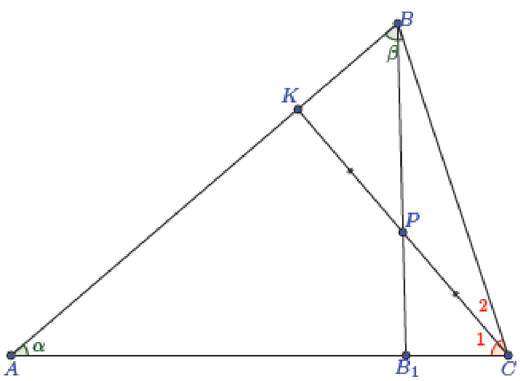
Имеем: $\dfrac{BD}{DC} = 1$ и $\dfrac{CP}{PE} = \dfrac{5}{2}$, откуда $\dfrac{EA}{AB} = \dfrac{2}{5}$, то есть $EA = \dfrac{2}{5}AB$. $EB = AB - \dfrac{2}{5}AB = \dfrac{3}{5}AB$.

В $\triangle BEC$ $(EC \perp EB)$ и $EC = 7$ по теореме Пифагора: $49 = -\dfrac{9}{25}AB^2 + AB^2$ (так как $BC = AB$) $\Rightarrow AB = \dfrac{35}{4}$. Получаем: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot CE = \dfrac{245}{8}$.

Ответ: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{245}{8}$

Задача №3 В остроугольном треугольнике $S_{\triangle ABC}$ через вершину B и середину CK проведена прямая. В каком отношении делит эта прямая $S_{\triangle ABC}$, если $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$ и CK — высота.

Решение:



Из отношения площадей имеем: $\dfrac{S_{\triangle ABB_1}}{S_{\triangle BCB_1}} = \dfrac{AB_1}{B_1C}$.

По теореме Менелая: $\dfrac{AB_1}{B_1C} \cdot \dfrac{CP}{PK} \cdot \dfrac{KB}{AB} = 1$

$\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{AB}{KB}$ $(AB = AK + KB)$

$\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{AK}{KB} + 1$

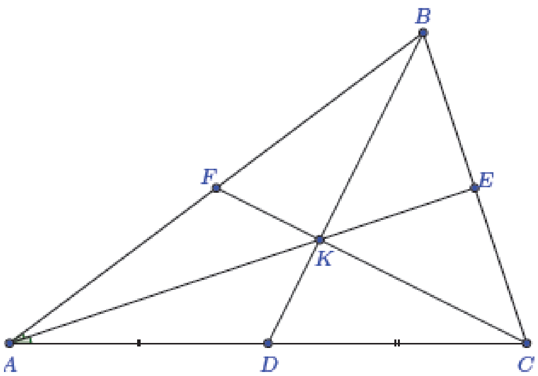
По теореме синусов: $\begin{cases} \dfrac{AK}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \dfrac{KC}{\sin\alpha} \\ \dfrac{KB}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \dfrac{KC}{\sin\beta} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AK}{KB} = \dfrac{\sin\beta\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\sin\alpha\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)}$

Имеем: $\dfrac{S_{ABB_1}}{S_{BCB_1}} = \dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta} + 1.$

Ответ: $\dfrac{S_{ABB_1}}{S_{BCB_1}} = \dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta} + 1.$

Задача №4 В треугольнике $\triangle ABC$: BD — медиана, AE — биссектриса, K — их точка пересечения. Прямая, проходящая через вершину C и K, пересекает AB в точке F. Известно, что $AB = c, AC = b$. Найти AF и FB.

Решение:



По теореме Чевы будем иметь:

$$\frac{AD}{DC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1 \ (AD = BC).$$

По теореме о биссектрисе:

$$\frac{CE}{EB} = \frac{CA}{AB} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{BF}{FA} = \frac{c}{b}, BF = \frac{c}{b}FA;$$

$BF + AF = c$, получаем: $\left(\frac{c}{b} + 1\right)AF = c; \frac{c+b}{b}AF = c \Rightarrow AF = \frac{cb}{c+b}$ и $BF = \frac{c^2}{c+b}$.

Ответ: $AF = \frac{cb}{c+b}$, $BF = \frac{c^2}{c+b}$.

Упражнения.

1) В $\triangle ABC$ даны стороны: $AB = c, BC = a, CA = b$. Биссектриса AM пересекает биссектрису BN в точке K. Отрезки MN и CK пересекаются в точке L. Найти ML/LN.

Ответ: $\frac{ML}{LN} = \frac{c+a}{c+b}$.

2) В $\triangle ABC$ на стороне BC выбрана точка D так, что $BD : DC = 1 : 2$. Медиана CE треугольника ABC пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF?

Ответ: 0,1.

3) Через точку P, лежащую на медиане CC_1 треугольника ABC_1 проведены прямые AA_1 и BB_1 (точки A_1 и B_1 лежат на стороне BC и CA соответственно). Докажите, что $A_1B_1 \parallel AB$.

Указание: применить теорему Чевы.

4) Прямая, соединяющая точку P пересечения диагоналей четырех-угольника $ABCD$ с точкой Q пересечения прямых AB и CD, делит сторону AD пополам. Докажите, что она делит пополам и сторону DC.

Указание: применить теорему Чевы.

5) Медиана AM и биссектриса CD прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если $CO = 9, OD = 5$.

Ответ: 66,15.

Литература

[1] Иркутский государственный университет, Лаборатория педагогического творчества, Лицей ИГУ, Л.А. Осипенко, Е.Э. Стацевичуте, Опорные задачи планиметрии, Методическое пособие.

[2] Зив Б.Г. Задачи по геометрии для 7 – 11 классов./ Б.Г. Зив, В.М. Мейлер, А.П. Баханский. М.: Просвещение, 2009. – 271с.

[3] Куланин Е.Д. 3000 конкурсных задач по математике. / Е.Д. Куланин, В.П. Норин, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – Изд. 5- е испр. – М.: Айрис-пресс, 2003. - 624с.

[4] Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 2 т. Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости./ Я.П. Понарин. М.: МЦНМО, 2004. – 312с.

[5] Шарыгин И.Ф. Математика. 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы, И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 1999. – 304с.