Московский физико-технический институт

Задачи с параметром на единственность, количество решений и нахождение множества решений.

Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

Москва 2014

Примеры решения задач.

<u>Задача №1</u> Найдите все значения параметра a, при которых неравенство:

$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \leq -\dfrac{x^2+9}{a+\cos x} - a$ имеет единственное решение.

Решение $\mapsto$ Преобразуем неравенство:

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \leq -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a \Leftrightarrow \frac{(a+\cos x)^2 - 2\sqrt{x^2+9}(a+\cos x) + x^2+9}{a+\cos x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+\cos x - \sqrt{x^2+9})^2}{a+\cos x} \leq 0$$

Пусть $f(x,a) = \dfrac{(a+\cos x-\sqrt{x^2+9})^2}{a+\cos x}$, видим, что эта функция чётная, поэтому если x_0 решение неравенства, то $-x_0$ также решение, следовательно, необходимо найти все значения a, при которых x_0 было единственным решением, и потом проверить найденные значения a.

Имеем: при $x_0 = 0 \Rightarrow \dfrac{(a-2)^2}{(a+1)} \leq 0 \Rightarrow a = 2$ или $a < -1$.

Пусть $a < -1$, тогда неравенство $\dfrac{(a+\cos x-\sqrt{x^2+9})^2}{a+\cos x} \leq 0$ выполнено для всех $x \in R$, так как для $a < -1$ справедливо

$(a+\cos x - \sqrt{x^2+9})^2 \geq 0, a+\cos x < 0.$

Пусть теперь $a = 2$, тогда $2+\cos x > 2 \forall x \epsilon R$, следовательно

$\dfrac{(2+\cos x-\sqrt{x^2+9})^2}{2+cosx} \leq 0 \Leftrightarrow (2+\cos x - \sqrt{x^2+9})^2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2+\cos x - \sqrt{x^2+9} = 0 \Leftrightarrow 2+\cos x = \sqrt{x^2+9}.$

Как видим $x_0 = 0$ — является единственным корнем данного уравнения, так как

$\forall x \neq 3 \Rightarrow 3 < \sqrt{x^2+9} = 2+\cos x \leq 3$

Ответ: $a = 2$.

<u>Задача №2</u> Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет единственное решение: $1+\sin^2 ax = \cos x$.

Решение $\mapsto$

Так как $\cos x \in [-1;1]$ и $1+\sin^2 ax \geq 1$, то равенство достигается только при $\cos x = 1$, тогда $(\sin ax)^2 = 0$, то есть:

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ (\sin ax)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n \\ ax = 2\pi k \end{cases}, \text{ где } n, k \in Z \;\; \Rightarrow 2\pi a = 2\pi k, \text{ то есть } na = k, \text{ где } n, k \in Z.$$

Теперь, поскольку существует решение независящее от a: $x = 0$, то есть случай $n = k = 0$, то нам необходимо найти все такие значения a, при которых оно будет единственным.

Как мы уже получили выше ($na = k$, где $n, k \in Z$), то $a \in R \backslash (N \bigcup Q)$, то есть a не должно быть ни целым, ни рациональным.

Ответ: $a \in R \backslash (N \bigcup Q)$.

Задача №3 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет единственное решение:

$$(1) \qquad x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 = 0$$

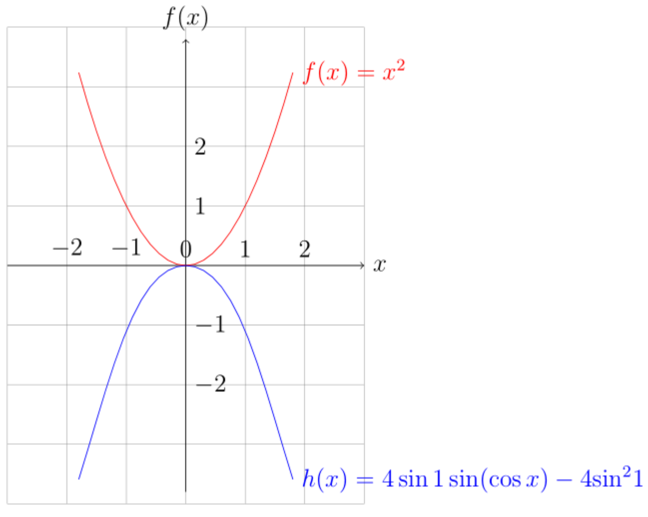
Решение $\mapsto$

Пусть $g(x) = x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2$, заметим, что эта функция чётная: $g(-x) = g(x)$, поэтому для любого $x_0 \neq 0$ будет существовать ещё по крайней мере решение $-x_0$, следовательно $x_0 = 0$.

Тогда исходное уравнение примет вид: $a(a - 2\sin 1) = 0 \;\Rightarrow\; a = 0$ или $a = 2\sin 1$.

Проверим теперь выполнение условия нашей задачи: если $a = 0$, то $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (одно решение), если $a = 2\sin 1$, то $(1) \rightarrow x^2 - 4\sin 1 \sin(\cos x) + 4\sin^2 1 = 0$, пусть $f(x) = x^2$ и

$h(x) = 4\sin 1 \sin(\cos x) - 4\sin^2 1$. Так как $\cos x \in [-1; 1]$, то $\sin(\cos x) \in [-\sin 1; \sin 1]$. Теперь сделаем следующие оценки: $\sin 1 \simeq 0.841 < \pi$ и построим график:



Откуда видим, что при $a = 2\sin 1$ будет одно пересечение функций $g(x)$ и $f(x)$ в точке $x = 0$.

Ответ: $a = 0, a = 2\sin 1$.

Задача №4 Найдите все a, при каждом из которых уравнение:

$$(1) \qquad 8x^6 + (a - x)^3 + 2x^2 = x - a$$

имеет хотя бы один корень.

Решение $\mapsto$

(1)$\Leftrightarrow (2x^2)^3+(a-x)^3+2x^2-x+a=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x^2+a-x)(4x^4-2x^2(a-x)+(a-x)^2)+2x^2-x+a=0 \Leftrightarrow (2x^2+a-x)(b^2-bt+t^2+1)=0,$

где $b=2x^2$, $t=a-x$ для $b^2-bt+t^2+1=0 \Rightarrow D=t^2-4t^2-4<0 \Rightarrow 2x^2+a-x=0$ (2).

То есть все решения (1) есть все решения (2).

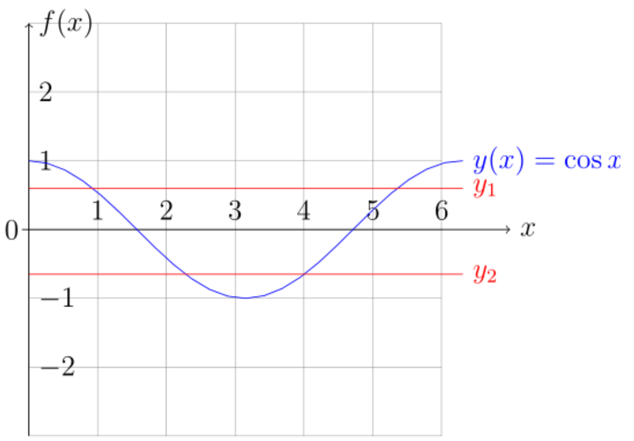
Из (2)$\Rightarrow D\geq 0 \Rightarrow 1-8a\geq 0$, то есть $a\leq 1/8$.

Ответ: $a\in(-\infty;1/8]$.

Задача №5 При каких значениях b, уравнение имеет ровно два корня на отрезке $[0;2\pi]$:

$(\cos x-\log_6 b)(\cos x-3+3b)=0$?

Решение $\mapsto$ Решение этого уравнения имеет вид: $\left[\begin{array}{l}\cos x=\log_6 b\\ \cos x=3-3b\end{array}\right.$, где $x\epsilon[0;2\pi]$. Решим эту задачу графически, пусть $y_1=\log_6 b$ и $y_2=3-3b$.



Заметим, что при $b=1, y_1=y_2$, а при $b>1, y_1>y_2$, поэтому для того, чтобы было два решения, нам необходимо и достаточно рассмотреть следующие случаи:

$$\text{a)}\ \begin{cases} b>1\\ y_2<-1\\ y_1\in(-1;1]\end{cases} \quad \text{b)}\ \begin{cases} 0<b<1\\ y_2\in(-1;1]\\ y_1<-1\end{cases} \quad \text{c)}\ \begin{cases} y_1=y_2\\ b=1\end{cases}$$

Решаем каждый случай отдельно:

a) $\begin{cases} b>1 \\ y_2<-1 \\ y_1\in(-1;1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b>1 \\ b>4/3 \\ b\in(-6;6] \end{cases} \Rightarrow b\in(4/3;6]$

b) $\begin{cases} 0<b<1 \\ y_2\in(-1;1] \\ y_1<-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b<1 \\ -1<3-3b\le 1 \\ 0<b<1/6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b<1 \\ b\in[2/3;4/3) \\ b<1/6 \end{cases} \Rightarrow b\in\emptyset.$

В итоге имеем: $b\in\{1\}\bigcup(4/3;6]$.

Ответ: $b\in\{1\}\bigcup(4/3;6]$.

Задача №6 Найдите все a, при которых система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x^2-y+a=0 \\ x+y^2+a=0 \end{cases}$$

Решение $\mapsto$

$\begin{cases} x^2-y+a=0 \\ x+y^2+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-y=x+y^2 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)=x+y \Rightarrow y=-x$ и $y=x-1$, тогда начальная

система эквивалентна: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-x \\ x^2+x+a=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-1+x \\ x^2-x+1+a=0 \end{cases} \end{array}\right.$

Теперь, чтобы начальная система имела одно решение, необходимо и достаточно, чтобы множества решений данных систем совпадали или выполнялись не одновременно.

(1) $\begin{cases} y=-x \\ x^2+x+a=0 \end{cases} \rightarrow$ чтобы было одно решение $D=0\Rightarrow a=-3/4$.

(2) $\begin{cases} y=x-1 \\ x^2-x+a+1=0 \end{cases} \rightarrow$ чтобы было одно решение $D=0\Rightarrow a=1/4$.

Проверяем:

Если $a=-3/4$, то (1) — одно решение, а в случае (2)$D=1+3=4\Rightarrow$ два решения, следовательно, $a\neq-3/4$.

Если $a=1/4$, то в случае системы (1) будет одно решение, а в случае (2) $D=1-5<0$.

Ответ: $a=1/4$.

Задача №7 найдите все значения параметра c, при которых уравнение имеет решения:

$$(1) \qquad 2\cos^2(2^{2x-x^2}) = C + \sqrt{3}\sin(2\cdot 2^{2x-x^2})$$

Решение $\mapsto$ Введём новую переменную $t = 2^{2x-x^2}, t > 0$, тогда уравнение (1) примет вид: $2\cos^2 t = C + \sqrt{3}\sin 2t \Leftrightarrow 2\cos^2 t - 1 = C - 1 + \sqrt{3}\sin 2t \Leftrightarrow \cos 2t - \sqrt{3}\sin 2t = C - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+(\sqrt{3})^2}\sin\varphi = C - 1$, где $\varphi = t + \arcsin(1/2) = t + \dfrac{\pi}{6}$, имеем: $\sin\varphi = \dfrac{C-1}{2} \Rightarrow$ чтобы были решения $-1 \leq \dfrac{C-1}{2} \leq 1 \Rightarrow C \in [-1;3]$.

Ответ: $C \in [-1;3]$.

Задача №8 При каких значениях параметра a, уравнение имеет решения:

$$\sin x - a = \sqrt{\sin x + 1/3}$$

Решение $\mapsto$ Пусть $\sin x = t, \mid t \mid < 1$, тогда исходное уравнение примет вид:

$t - \sqrt{t + 1/3} = a$. Рассмотрим функцию $f(t) = t - \sqrt{t+1/3}$ и её производную

$f(t)' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{t+1/3}}, f(t)' = 0 \Rightarrow t = -1/2.$

$\min f(t) = f(-1/2) = -7/12, f(-1/3) = -1/3, f(1) = 1 - 2/\sqrt{3} \Rightarrow a\,\epsilon\,[-7/12; 1 - 2/\sqrt{3}].$

Ответ: $a \in [-7/12; 1 - 2/\sqrt{3}]$.

Задача №9 Найдите все целые значения k, при каждом из которых уравнение

$2 - 2\cos x = 3k + 4\sin x$ имеет решение. Найти эти решения.

Решение $\mapsto$ Представим это уравнение в виде:

$4\sin x + 2\cos x = \sqrt{20}\sin\varphi \equiv -3k + 2 \Leftrightarrow \sin\varphi = \dfrac{2-3k}{\sqrt{20}}.$

Теперь, чтобы были решения, необходимо, чтобы: $\mid \dfrac{2-3k}{\sqrt{20}} \mid \leq 1 \Rightarrow \dfrac{2-\sqrt{20}}{3} \leq k \leq \dfrac{2+\sqrt{20}}{3}.$

Сделаем оценки для k: $\quad \dfrac{2-\sqrt{20}}{3} \simeq -0.82; \dfrac{2+\sqrt{20}}{3} \simeq 2.15 \Rightarrow k = \{0, 1, 2\}.$

$\varphi = x + \arcsin(\dfrac{1}{\sqrt{5}}) \Rightarrow \sin\left(x + \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) = \dfrac{2-3k}{2\sqrt{5}} \Rightarrow$

Если $k = 0$, то $x = \pi n, n \in N$

Если $k = 1$, то $x = -\arcsin\left(\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\right) - \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi m, m \in Z$

Если $k=2$, то $x=-\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\pi p, p\in Z$

Ответ: $k=0: \quad x=\pi n, n\in N$

$k=1: \quad x=-\arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\pi m, m\in Z$

$k=2: \quad x=-\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\pi p, p\in Z$

Задача №10 Найти все значения параметра a, при которых неравенство выполняется для любых значений $x: \quad 3\geq\mid \sin^2x-2(a-1)\sin x\cos x+3\cos^2x-a+1\mid$

Решение $\mapsto$

$\sin^2x=1-\cos^2x \Rightarrow\mid 2+2\cos^2x-a-(a-1)\sin 2x\mid\leq 3 \;\Leftrightarrow\mid \sqrt{a^2-2a+2}\sin\varphi+3-a\mid\leq 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2-2a+2}\sin\varphi+3-a\leq 3\\ \sqrt{a^2-2a+2}\sin\varphi+3-a\geq -3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\varphi\leq\dfrac{a}{\sqrt{a^2-2a+2}}\\ \sin\varphi\geq\dfrac{a-6}{a^2-2a+2}\end{cases}$$

Чтобы эта система выполнялась для $\forall x\in R$, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{a^2-2a+2}}\geq 1\\ \dfrac{a-6}{a^2-2a+2}\leq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2\geq a^2-2a+2\\ 6-a\geq\sqrt{a^2+2-2a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\geq 1\\ a\leq 34/10\end{cases}$$

Ответ: $a\in[1;17/5]$.

Задача №11 Найти все a, при которых уравнение $\cos(\sqrt{a^2-x^2})=1$ имеет ровно 8 решений.

Решение $\mapsto$ Исходное уравнение эквивалентно следующей системе: $\begin{cases}a^2-x^2=4\pi^2n^2\\ a^2\geq x^2\end{cases}$, откуда следует, что: (1) $x=\pm\sqrt{a^2-4\pi^2n^2}$. Как видим, чтобы исходное уравнение имело 8 решений, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (1) имело 4 решения, здесь параметр a зависит от $n\in Z$, при этом $n\neq 0$ иначе будет нечётное число решений, следовательно $n=\{1,2,3,4\}$.

Тогда $\begin{cases}a^2>4\pi^2\cdot 16\\ a^2<4\pi^2\cdot 15\end{cases}$ (последнее условие ограничивает число решений для n).

Имеем: $8\pi<\mid a\mid<10\pi \;\Rightarrow\; a\epsilon(-10\pi,-8\pi)\bigcup(8\pi,10\pi)$

Ответ: $8\pi<\mid a\mid<10\pi \;\Rightarrow\; a\in(-10\pi,-8\pi)\bigcup(8\pi,10\pi)$.

Задача №12 Найти все p, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства максимально: $4x^2 - 20(x-1) + 3 \mid 4x - p \mid - p \leq 0$

Решение $\mapsto$ $\mid 12x - 2p \mid \leq -4x^2 + 20x - 20 + p \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 3p \leq -4x^2 + 20x - 20 + p \\ 12x - 3p \geq 4x^2 - 20x + 20 - p \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 \leq p \leq -2x^2 + 16x - 10$

Пусть $f_1(x) = x^2 - 2x + 5$ и $f_2(x) = -2x^2 + 16x - 10$, $f_1(x)' = 2x - 2, f_2(x)' = -4x + 16$, так как $f_1 \geq 0$ и $f_2 \leq 22$, то нам необходимо условие:

$f_1 \leq f_2 \Rightarrow x^2 - 2x + 5 \leq -2x^2 + 16x - 10 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \leq 0 \Rightarrow x \in [1;5]$ (так как исходное неравенство выполняется для $\forall x \in R$)

Получаем: если $x = 1$, то $p = 4$

если $x = 2$, то $5 \leq p \leq 14$

если $x = 3$, то $8 \leq p \leq 20$

если $x = 4$, то $13 \leq p \leq 22$

если $x = 5$, то $p = 20$

Откуда получаем следующие целочисленные решения неравенства: $x = \{2;3;4\}$ при $p \in [13;14] \bigcup \{20\}$

и $x = \{3;4;5\}$ при $p = 20$

Ответ: $x = \{2;3;4\}$ при $p \in, [13;14] \bigcup \{20\}$ и $x = \{3;4;5\}$ при $p = 20$

Задача №13 Найдите все p, при каждом из которых неравенство $(p - x^2)(p + x - 2) < 0$ не содержит решений неравенства $x^2 \leq 1$.

Решение $\mapsto$

1) если $p < 0$, то $(p - x^2) < 0$, тогда $p + x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 - p$, откуда чтобы было верно исходное неравенство, $2 - p > 2$.

Если $p = 0$, то $x \geq 2$, следовательно $p \in (-\infty; 0]$.

2)если $p > 0$, то $(x - \sqrt{p})(x + \sqrt{p})(x - (2 - p)) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 - p \leq -1 \\ \sqrt{p} \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 3 \\ p \geq 1 \end{cases} \Rightarrow p \geq 3 \Rightarrow p > 4$

Таким образом: $p \in (-\infty; 0] \bigcup [3; +\infty)$

Ответ: $p \in (-\infty; 0] \bigcup [3; +\infty)$.

Задача №14 Найдите все значения x, для каждого из которых равенство:

$$2 \log_2(4 - \sqrt{7 + 2x}) = \log_{2 + a^2 x^2}(4 - 3x)$$

выполняется при любом значении a?

Решение $\mapsto \log_2(4-\sqrt{7+2x}) = \log_{2+a^2x^2}(\sqrt{4-3x})$

ОДЗ: $\begin{cases} 4-3x \geq 0 \\ 7+2x \geq 0 \\ 7+2x \leq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 11/3 \\ x \geq -3.5 \end{cases} \Rightarrow x \in [-3.5; 11/3)$

Преобразуем исходное уравнение:

$\dfrac{\log_{2+a^2x^2}(4-\sqrt{7+2x})}{\log_{2+a^2x^2} 2} = \log_{2+a^2x^2}\sqrt{4-3x} \Leftrightarrow \log_{\sqrt{4-3x}}(4-\sqrt{7+2x}) =$
$= \log_{2+a^2x^2} 2 \Leftrightarrow (2+a^2x^2)^{\log_{\sqrt{4-3x}}(4-\sqrt{7+2x})} = 2.$

Пусть $f_1(x) = 4-\sqrt{7+2x}$, $f_1(-3.5) = 4$ и $f_1(11/3) > 2 \Rightarrow$ при $x \in [-3.5; 11/3)$ следует неравенство $2 < f_1 \leq 4$. Пусть $f_2(x) = \sqrt{4-3x}$ при $x \in, [-3.5; 11/3)$ следует неравенство $0 < f_2 \leq 14.5$

Если $\sqrt{4-3x} > 1$, то $f_1 > 1, f_2 > 1 \Rightarrow \log_{f_2(x)} f_1(x) < 0 \Rightarrow (2+a^2x^2)^{\log_{f_2(x)} f_1(x)} > 2$

Если $\sqrt{4-3x} < 1$, то $f_1 < 1, f_2 > 1 \Rightarrow \log_{f_2(x)} f_1(x) < 0 \Rightarrow (2+a^2x^2)^{\log_{f_2(x)} f_1(x)} > 2$

Если $\sqrt{4-3x} = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (2+a^2x^2)^{\log_1 1} = 2$. Поскольку $\log_1 1$ — любая степень, то это равенство верно для $\forall a \in R$.

Ответ: $x = 1$.

Задача №15 Найдите все значения b, при каждом из которых существует такое число a, что уравнение $x^2 + (\sin a + 3\cos a)x + b = 0$ имеет действительное решение.

Решение $\mapsto$ Чтобы уравнение имело действительное решение, необходимо и достаточно, чтобы $D \geq 0 \Rightarrow \sin a + 3\cos a = \sqrt{10}\sin\varphi$, $D = 10\sin\varphi^2 - 4b$, если $b \leq 0$, то $D > 0$ — верно. Если $b \geq 0$, то $10\sin\varphi^2 \geq 4b \Rightarrow b \in [0; 5/2]$.

Ответ: $b \in [0; 5/2]$.

Упражнения

1)При каких значениях a неравенство $x + \sin x + 2a + \sin 2a < 0$ является следствием неравенства $x^2 - 4ax + a < 0$?

2)Найдите все значения a, при которых уравнения $x^2+2x+7-2a = 0$ и $\dfrac{2x+1}{a-2} = \dfrac{3}{\sqrt[4]{x-3} + \ln(x-2)}$ одновременно не имеют корней.

3) При каких положительных значениях параметра a во множество решений неравенства $\sqrt{2ax-x^2} \geq a-x$ можно поместить два непересекающихся промежутка длиной $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ каждый?

4) При каких значениях параметра a:

а) неравенство $2x + \ln 2 + \ln x - a^2 < 2\ln a$ имеет решения и любое его решение удовлетворяет неравенству $x^2 - 4ax - 5a^2 \leq 0$

б) ни одно решение неравенства $x + 3^x - 2a - 9^a < 0$ не является решением неравенства
$\dfrac{x - 3a - 1}{x - 5a + 3} < 0$

5) при каких значениях параметра a уравнение $x^2 - ax + \sin a = 0$ является следствием уравнения $x + \sin x - \sin a = a$.

Литература

[1] http://www.problems.ru/

[2] http://www.math.ru/

[3] Методическое пособие по математике для поступающих в вузы, МФТИ, 2008 год.

[4] А.И.Козко, В.Г.Чирский, задачи с параметром и другие сложные задачи, 2008 год.

[5] варианты ЕГЭ по математике 2003—2012 год.