

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

БИЛЕТ 5

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{(6^{x-2})}(x^2) + \log_{(36^{x-2})}((x-5)^4) = \frac{2}{x-2}.$$

2. Решите уравнение

$$2\sqrt{7} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{27 + \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{6|x-2|}{x^2+21}\right)^{x+\sqrt{x^2-6}} > 1.$$

4. Число 58964 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 5896458964589645896458964589645896458964. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

5. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD , причём $BC < AD$, $\angle BCD = 90^\circ$. Точка M – середина отрезка CD . Известно, что окружность радиуса 5 проходит через точки A и B и касается стороны CD в точке M , а $\cos \angle BMC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите длины отрезков AB и BC , а также площадь трапеции.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} (x^2 - xy + y^2)(|x - y| - 6) \geq 0, \\ x(x + 2) + y(y - 2) = a? \end{cases}$$

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1 , BB_1 и CC_1 в точках K , N , P соответственно. Найдите отношения $AK : KA_1$ и $CP : PC_1$, если $BN : NB_1 = 3 : 4$.

8. Дан правильный 16-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90° . (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

БИЛЕТ 6

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{(4^{x+4})}(x^4) + \log_{(2^{x+4})}((x+5)^2) = \frac{4}{x+4}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{38} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{37 - \sin 3x}.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{6|2x+1|}{4x^2+15}\right)^{-x+\sqrt{x^2-1}} > 1.$$

4. Число 52168 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 5216852168521685216852168521685216852168. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычеркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD , причём $BC < AD$, $\angle ABC = 90^\circ$. Точка M – середина отрезка AB . Известно, что окружность радиуса 4 проходит через точки C и D и касается стороны AB в точке M , а $\cos \angle MDC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите длины отрезков CD и AB , а также площадь трапеции.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} (3x^2 + 3xy + 2y^2)(|x+y| - 8) \geq 0, \\ x(x-4) + y(y-2) = a? \end{cases}$$

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1 , BB_1 и CC_1 в точках K , N , P соответственно. Найдите отношения $AK : KA_1$ и $BN : NB_1$, если $CP : PC_1 = 3 : 25$.

8. Дан правильный 18-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90° . (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

БИЛЕТ 7

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{(3^{x-3})}((x-4)^2) + \log_{(9^{x-3})}(x^4) = \frac{2}{x-3}.$$

2. Решите уравнение

$$2\sqrt{6} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{23 + \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{2|2x-3|}{x^2+10}\right)^{x+\sqrt{x^2-3}} > 1.$$

4. Число 51746 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 517465174651746517465174651746517465174651746. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD , причём $BC < AD$, $\angle ADC = 90^\circ$. Точка K – середина отрезка CD . Известно, что окружность радиуса 3 проходит через точки A и B и касается стороны CD в точке K , а $\sin \angle KAD = \frac{1}{3}$. Найдите длины отрезков AB и CD , а также площадь трапеции.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} (x^2 - 4xy + 7y^2)(10 - |x - y|) \leq 0, \\ x(x-2) + y(y+6) = a? \end{cases}$$

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1 , BB_1 и CC_1 в точках K , N , P соответственно. Найдите отношения $CP : PC_1$ и $BN : NB_1$, если $AK : KA_1 = 1 : 12$.

8. Дан правильный 20-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90° . (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

БИЛЕТ 8

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{(2^{x+1})}(x^2) + \log_{(4^{x+1})}((x+3)^4) = \frac{2}{x+1}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{29 + \sin 3x} = \sqrt{30} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{4|x+1|}{x^2+8}\right)^{-x+\sqrt{x^2-2}} > 1.$$

4. Число 96182 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 9618296182961829618296182961829618296182. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD , причём $BC < AD$, $\angle BAD = 90^\circ$. Точка K – середина отрезка AB . Известно, что окружность радиуса 6 проходит через точки C и D и касается стороны AB в точке K , а $\cos \angle KCB = \frac{1}{3}$. Найдите длины отрезков CD и AB , а также площадь трапеции.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} (2x^2 - 5xy + 4y^2)(7 - |x + y|) \leq 0, \\ x(x - 6) + y(y + 4) = a? \end{cases}$$

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1 , BB_1 и CC_1 в точках K , N , P соответственно. Найдите отношения $AK : KA_1$ и $BN : NB_1$, если $CP : PC_1 = 1 : 27$.

8. Дан правильный 14-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90° . (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)