<u>БИЛЕТ 5</u>

1. Решите уравнение $\log_{\left(6^{x-2}\right)}\left(x^2\right)+\log_{\left(36^{x-2}\right)}\left((x-5)^4\right)=\dfrac{2}{x-2}$.

Ответ: $x=3$, $x=-1$, $x=6$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2}{x-2}\log_6|x|+\frac{4}{2(x-2)}\log_6|x-5|=\frac{2}{x-2} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\log_6|x|+\log_6|x-5|=1,\\ x-2\neq 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\log_6\left|x^2-5x\right|=\log_6 6,\\ x\neq 2.\end{cases}$$

Уравнение $\left|x^2-5x\right|=6$ эквивалентно совокупности двух уравнений $x^2-5x=-6$ и $x^2-5x=6$, решая которые, находим, что $x=2$, $x=3$, $x=-1$, $x=6$. Значение $x=2$ не входит в ОДЗ.

2. Решите уравнение $2\sqrt{7}\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{27+\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

Ответ: $x=2\pi+4\pi k, k\in\mathrm{Z}$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $27+\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)=28\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)$ при условии $\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)\geq 0$. С помощью формул приведения, формул понижения степени и формулы косинуса тройного угла получаем:

$27+\cos 3x=14-14\cos(x-\pi)$, $13+4\cos^3 x-3\cos x=14\cos x$, $4\cos^3 x-17\cos x+13=0$.

Обозначая $\cos x=y$ ($|y|\leq 1$), получаем уравнение $4y^3-17y+13=0$, одним из корней которого является $y=1$. После деления на $(y-1)$ остаётся уравнение $4y^2+4y-13=0$. Его корни $\left(y=\dfrac{-1\pm\sqrt{14}}{2}\right)$ по модулю больше единицы, следовательно, они не подходят.

Если $y=1$, то $\cos x=1$, $x=2\pi m, m\in\mathrm{Z}$.

Подставляя найденные x в неравенство $\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)\geq 0$, получаем $\sin\left(\pi m-\dfrac{\pi}{2}\right)\geq 0$. Несложно видеть, что подходят только нечётные значения m, т.е. $m=2k+1, k\in\mathrm{Z}$, откуда $x=2\pi+4\pi k, k\in\mathrm{Z}$.

3. Решите неравенство $\left(\dfrac{6|x-2|}{x^2+21}\right)^{x+\sqrt{x^2-6}}>1$.

Ответ: $x\in(-\infty;-3)\cup\left(-3;-\sqrt{6}\right]$.

Решение. Запишем неравенство в виде $\left(\dfrac{6|x-2|}{x^2+21}\right)^{x+\sqrt{x^2-6}}>\left(\dfrac{6|x-2|}{x^2+21}\right)^0$. Обозначим $f(x)=\dfrac{6|x-2|}{x^2+21}$. Несложно видеть, что $f(x)$ положительна при всех x из ОДЗ (значение $x=2$ не входит в ОДЗ). Рассмотрим разность $f(x)-1=\dfrac{6|x-2|-x^2-21}{x^2+21}$.

При $x\geq 2$ она принимает вид $\dfrac{6x-12-x^2-21}{x^2+21}=\dfrac{-x^2+6x-33}{x^2+21}=\dfrac{-(x-3)^2-24}{x^2+21}$. Если $x<2$, то получаем $\dfrac{12-6x-x^2-21}{x^2+21}=\dfrac{-x^2-6x-9}{x^2+21}=-\dfrac{(x+3)^2}{x^2+21}$. Таким образом, рассматриваемая разность отрицательна при всех x, отличных от -3. Отсюда следует, что $f(x)<1$ при всех x, кроме $x=-3$.

Подстановкой убеждаемся, что $x=-3$ решением не является.

При всех остальных x неравенство равносильно каждому из следующих:

$x+\sqrt{x^2-6}<0$, $\sqrt{x^2-6}<-x$, $\begin{cases} -x>0, \\ x^2-6\ge 0, \\ x^2-6<x^2, \end{cases}$ $x\le -\sqrt{6}$.

Исключая значение $x=-3$, получаем $x\in(-\infty;-3)\cup\left(-3;-\sqrt{6}\right]$.

4. Число 58964 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 5896458964589645896458964589645896458964. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 247.

Решение. Для того, чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Для делимости на 2 нужно, чтобы последней цифрой числа была 0, 2, 4, 6 или 8. Значит, полученное число будет делиться на 2, если мы вычеркнем любые цифры, кроме двух последних. Перейдём к делимости на 3.

Если в числе заменить все цифры 4 на 1, цифры 9 и 6 на 0, а цифры 5 и 8 на 2, то остаток от деления числа на 3 не изменится (остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3). Таким образом, нужно узнать, сколькими способами можно вычеркнуть две цифры из числа $X=2200122001220012200122001220012200122001$ так, чтобы полученное число делилось на 3. Сумма цифр числа X равна 40. Чтобы после вычёркивания сумма цифр делилась на 3, мы можем вычеркнуть либо а) две двойки, либо б) единицу и ноль. Количество способов вычеркнуть две двойки равно $C_{16}^2=120$; количество способов вычеркнуть один ноль и одну единицу равно $C_{16}^1\cdot C_8^1=16\cdot 8=128$.

Две последние цифры вычёркивать нельзя, поэтому получаем $128+120-1=247$ способов.

5. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC<AD$, $\angle BCD=90^\circ$. Точка M – середина отрезка CD. Известно, что окружность радиуса 5 проходит через точки A и B и касается стороны CD в точке M, а $\cos\angle BMC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите длины отрезков AB и BC, а также площадь трапеции.

Ответ: $AB=10; BC=\frac{10}{9}; S=\frac{200\sqrt{2}}{9}$.

Решение. Поскольку окружность касается *CD*, её центр *O* лежит на перпендикуляре к *CD* в точке *M*. С другой стороны, *O* лежит на серединном перпендикуляре к *AB*. Эти две прямые пересекаются в середине *AB*. Значит, *O* — середина *AB*, и *AB* — диаметр окружности, откуда $AB=2R=10$.

Обозначим $\angle BMC=\varphi$. Тогда дуга BM равна 2φ (теорема об угле между касательной и хордой), а $\angle BAM=\varphi$ (теорема о вписанном угле). Далее находим, что $\angle BMA=90^\circ$ (опирается на диаметр), $\angle DAM=90^\circ-\angle DMA=90^\circ-\left(180^\circ-\angle BMA-\angle BMC\right)=\varphi$. Значит, прямоугольные треугольники AMB, ADM и MCB подобны.

Вычисляем основания и высоту трапеции: $BM=AB\sin\varphi=\frac{10}{3}$, $BC=BM\sin\varphi=\frac{10}{9}$, $DM=CM=BM\cos\varphi=\frac{20\sqrt{2}}{9}$, $AD=MD\operatorname{ctg}\varphi=\frac{80}{9}$. Тогда площадь трапеции S равна $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{10}{9}+\frac{80}{9}\right)\cdot\frac{40\sqrt{2}}{9}=\frac{200\sqrt{2}}{9}$.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} \left(x^2-xy+y^2\right)\left(|x-y|-6\right)\ge 0, \\ x(x+2)+y(y-2)=a? \end{cases}$$

Ответ: $a=0; a=6$.

Решение. Рассмотрим выражение $A(x;y)=x^2-xy+y^2$ как квадратный трёхчлен относительно x. Его дискриминант равен $D=y^2-4y^2=-3y^2$. При $y\ne 0$ дискриминант отрицателен, поэтому $A>0$. Если

$y=0$, то $A=x^2$, т.е. $A>0$ при $x\neq 0$ и $A=0$ при $x=0$. В итоге получаем, что выражение $A(x;y)$ обращается в ноль в точке $(0;0)$ и положительно во всех остальных точках.

Следовательно, неравенство системы равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2-xy+y^2=0, \\ |x-y|\geq 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0, \\ x-y\geq 6, \\ x-y\leq -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0, \\ y\leq x-6, \\ y\geq x+6. \end{array}\right.$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих этой совокупности, на координатной плоскости. Получаем все точки, лежащие на прямой $y=x+6$ и выше неё, точки на прямой $y=x-6$ и ниже неё, а также точку $(0;0)$.

Перейдём к уравнению $x(x+2)+y(y-2)=a$. Преобразуем левую часть, выделяя полные квадраты, и получаем $(x+1)^2+(y-1)^2=a+2$. При $a<-2$ это уравнение задаёт пустое множество, при $a=-2$ – точку $T(-1;1)$, а при $a>-2$ – окружность с центром в точке $T(-1;1)$ радиуса $\sqrt{a+2}$.

Очевидно, при $a\leq -2$ система не имеет решений. При $a>-2$ единственное решение возможно в двух случаях: окружность проходит через точку $K(0;0)$ или окружность касается прямой $y=x+6$. В первом случае радиус окружности должен быть равен длине отрезка TK, т.е. $\sqrt{a+2}=\sqrt{2}$, откуда $a=0$. Во втором случае радиус равен расстоянию от точки T до прямой $x-y+6=0$, т.е. $\sqrt{a+2}=\dfrac{|-1-1+6|}{\sqrt{1+1}}$, откуда $a=6$.

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $AK:KA_1$ и $CP:PC_1$, если $BN:NB_1=3:4$.

Ответ: $AK:KA_1=3:25$, $CP:PC_1=27:1$ *или* $AK:KA_1=27:1$, $CP:PC_1=3:25$.

Решение. Пусть, для определённости, ABC – нижнее основание призмы. Пусть α касается нижнего и верхнего оснований цилиндра в точках X и X_1 соответственно. Из симметрии, XX_1 пересекает ось цилиндра. Обозначив через X' проекцию точки X на нижнее основание; тогда XX' – диаметр нижнего основания.

Пусть K', N', P' – проекции точек K, N, P на осевое сечение цилиндра, содержащее XX_1 (тогда они лежат на XX_1), а A', B', C' – проекции точек A, B, C на XX'. Поскольку A, B, C – проекции точек K, N, P на нижнее основание, получаем, что A', B', C' также являются проекциями K, N, P (а также K', N', P') на XX'. Значит, $\dfrac{AK}{KA_1}=\dfrac{XK'}{K'X_1}=\dfrac{XA'}{A'X'}$ и, аналогично, $\dfrac{BN}{NB_1}=\dfrac{XB'}{B'X'}$ и $\dfrac{CP}{PC_1}=\dfrac{XC'}{C'X'}$.

Пусть теперь O – центр нижнего основания, и $\angle XOB=\varphi$. Без ограничения общности можно считать, что радиус нижнего основания равен 1. Тогда $XB'=1-\cos\varphi$. Поскольку $\angle AOB=\angle BOC=\dfrac{2\pi}{3}$, аналогично получаем, что длины отрезков XA' и XC' равны $1-\cos\left(\varphi\pm\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Из условия получаем $XB'=2\cdot\dfrac{3}{3+4}$, значит, $\cos\varphi=\dfrac{1}{7}$. Тогда $\sin\varphi=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$, откуда

$$\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\varphi\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\varphi\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{13}{14}\text{ и}$$

$$\cos\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\varphi\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\varphi\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{11}{14}.$$

Значит, один из отрезков XA' и XC' равен $\dfrac{27}{14}$, а другой – $\dfrac{3}{14}$, откуда отношения $AK:KA_1$ и $CP:PC_1$ равны $3:25$ и $27:1$ (в каком-то порядке).

8. Дан правильный 16-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответ: 364.

Решение. Опишем окружность вокруг 16-угольника. Вписанный угол, равный 90°, опирается на диаметр, поэтому одна из диагоналей является диаметром окружности, а две другие вершины находятся по разные стороны от этого диаметра. Всего есть 8 диаметров; каждую из двух других вершин можно выбрать семью способами. Тогда получается $8 \cdot 7 \cdot 7 = 392$ четвёрки точек. Но при таком подсчёте прямоугольники (т.е. четырёхугольники, у которых обе диагонали являются диаметрами) посчитаны дважды. Прямоугольников выходит $C_8^2 = 28$ штук, и в итоге получаем $392 - 28 = 364$ варианта.

БИЛЕТ 6

1. Решите уравнение $\log_{\left(4^{x+4}\right)}\left(x^4\right)+\log_{\left(2^{x+4}\right)}\left((x+5)^2\right)=\frac{4}{x+4}$.

Ответ: $x=-1$, $x=\frac{-5\pm\sqrt{41}}{2}$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{4}{2(x+4)}\log_2|x|+\frac{2}{x+4}\log_2|x+5|=\frac{4}{x+4}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\log_2|x|+\log_2|x+5|=2,\\ x+4\neq 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\log_2\left|x^2+5x\right|=\log_2 4,\\ x\neq -4\end{cases}$$

Уравнение $\left|x^2+5x\right|=4$ эквивалентно совокупности двух уравнений $x^2+5x=-4$ и $x^2+5x=4$, решая которые, находим, что $x=-1$, $x=-4$, $x=\frac{-5\pm\sqrt{41}}{2}$. Значение $x=-4$ не входит в ОДЗ.

2. Решите уравнение $\sqrt{38}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{37-\sin 3x}$.

Ответ: $x=\frac{5\pi}{2}+4\pi k,\ k\in\mathrm{Z}$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $37-\sin 3x=38\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)$ при условии $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)\geq 0$. С помощью формулы приведения, формулы понижения степени и формулы синуса тройного угла получаем:

$$37-\sin 3x=19+19\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right),\ 18-3\sin x+4\sin^3 x=19\sin x,\ 2\sin^3 x-11\sin x+9=0.$$

Обозначая $\sin x=y$ ($|y|\leq 1$), получаем уравнение $2y^3-11y+9=0$, одним из корней которого является $y=1$. После деления на $(y-1)$ остаётся уравнение $2y^2+2y-9=0$. Его корни $\left(y=\frac{-1\pm\sqrt{19}}{2}\right)$ по модулю больше единицы, следовательно, они не подходят.

Если $y=1$, то $\sin x=1$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathrm{Z}$.

Подставляя найденные x в неравенство $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)\geq 0$, получаем $\cos(\pi+\pi m)\geq 0$. Несложно видеть, что подходят только нечётные значения m, т.е. $m=2k+1,\ k\in\mathrm{Z}$, откуда $x=\frac{5\pi}{2}+4\pi k,\ k\in\mathrm{Z}$.

3. Решите неравенство $\left(\frac{6|2x+1|}{4x^2+15}\right)^{-x+\sqrt{x^2-1}}>1$.

Ответ: $x\in\left[1;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Решение. Запишем неравенство в виде $\left(\frac{6|2x+1|}{4x^2+15}\right)^{-x+\sqrt{x^2-1}}>\left(\frac{6|2x+1|}{4x^2+15}\right)^0$. Обозначим $f(x)=\frac{6|2x+1|}{4x^2+15}$. Несложно видеть, что $f(x)$ положительна при всех x из ОДЗ (значение $x=-\frac{1}{2}$ не входит в ОДЗ). Рассмотрим разность $f(x)-1=\frac{6|2x+1|-4x^2-15}{4x^2+15}$.

При $x \geq -\frac{1}{2}$ она принимает вид $\frac{12x+6-4x^2-15}{4x^2+15} = \frac{-4x^2+12x-9}{4x^2+15} = \frac{-(2x-3)^2}{4x^2+15}$. Если $x < -\frac{1}{2}$, то получаем $\frac{-12x-6-4x^2-15}{4x^2+15} = \frac{-4x^2-12x-21}{4x^2+15} = \frac{-(2x+3)^2-12}{4x^2+15}$. Таким образом, рассматриваемая разность отрицательна при всех x, отличных от $\frac{3}{2}$. Отсюда следует, что $f(x) < 1$ при всех x, кроме $x = \frac{3}{2}$.

Подстановкой убеждаемся, что $x = \frac{3}{2}$ решением не является.

При всех остальных x неравенство равносильно каждому из следующих:

$$-x + \sqrt{x^2-1} < 0, \ \sqrt{x^2-1} < x, \ \begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 1 \geq 0, \\ x^2 - 1 < x^2, \end{cases} \quad x \geq 1.$$

Исключая значение $x = \frac{3}{2}$, получаем $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

4. Число 52168 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 5216852168521685216852168521685216852168. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 219.

Решение. Для того, чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Для делимости на 2 нужно, чтобы последней цифрой числа была 0, 2, 4, 6 или 8. Значит, полученное число будет делиться на 2, если мы вычеркнем любые цифры, кроме двух последних. Перейдём к делимости на 3.

Если в числе заменить все цифры 6 на 0, а цифры 5 и 8 на 2, то остаток от деления числа на 3 не изменится (остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3). Таким образом, нужно узнать, сколькими способами можно вычеркнуть две цифры из числа $X = 2210222102221022210222102221022210222102$ так, чтобы полученное число делилось на 3. Сумма цифр числа X равна 56. Чтобы после вычёркивания сумма цифр делилась на 3, мы можем вычеркнуть либо а) две единицы, либо б) двойку и ноль. Количество способов вычеркнуть две единицы равно $C_8^2 = 28$; количество способов вычеркнуть один ноль и одну двойку равно $C_8^1 \cdot C_{24}^1 = 8 \cdot 24 = 192$.

Две последние цифры вычёркивать нельзя, поэтому получаем $192 + 28 - 1 = 219$ способов.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC < AD$, $\angle ABC = 90^\circ$. Точка M – середина отрезка AB. Известно, что окружность радиуса 4 проходит через точки C и D и касается стороны AB в точке M, а $\cos \angle MDC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите длины отрезков CD и AB, а также площадь трапеции.

Ответ: $CD = 8;\ AB = \frac{32\sqrt{2}}{9};\ S = \frac{128\sqrt{2}}{9}$.

Решение. Поскольку окружность касается AB, её центр O лежит на перпендикуляре к AB в точке M. С другой стороны, O лежит на серединном перпендикуляре к CD. Эти две прямые пересекаются в середине CD. Значит, O — середина CD, и CD — диаметр окружности, откуда $CD = 2R = 8$.

Обозначим $\angle BMC = \varphi$. Тогда дуга CM равна 2φ (теорема об угле между касательной и хордой), а $\angle CDM = \varphi$ (теорема о вписанном угле). Далее находим, что $\angle CMD = 90^\circ$ (опирается на диаметр), $\angle ADM = 90^\circ - \angle AMD = 90^\circ - (180^\circ - \angle CMD - \angle CMB) = \varphi$. Значит, прямоугольные треугольники DMA, DCM и MCB подобны.

Вычисляем основания и высоту трапеции: $CM = CD \sin\varphi = \frac{8}{3}$, $BC = BM \sin\varphi = \frac{8}{9}$, $BM = AM = CM \cos\varphi = \frac{16\sqrt{2}}{9}$, $AB = 2AM = \frac{32\sqrt{2}}{9}$, $AD = AM \operatorname{ctg}\varphi = \frac{64}{9}$. Тогда площадь трапеции S равна $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{9} + \frac{64}{9}\right) \cdot \frac{32\sqrt{2}}{9} = \frac{128\sqrt{2}}{9}$.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases}(3x^2+3xy+2y^2)(|x+y|-8)\geq 0,\\ x(x-4)+y(y-2)=a?\end{cases}$$

Ответ: $a=0; a=7{,}5$.

Решение. Рассмотрим выражение $A(x; y)=3x^2+3xy+2y^2$ как квадратный трёхчлен относительно x. Его дискриминант равен $D=9y^2-24y^2=-15y^2$. При $y\neq 0$ дискриминант отрицателен, поэтому $A>0$. Если $y=0$, то $A=3x^2$, т.е. $A>0$ при $x\neq 0$ и $A=0$ при $x=0$. В итоге получаем, что выражение $A(x; y)$ обращается в ноль в точке $(0; 0)$ и положительно во всех остальных точках.

Следовательно, неравенство системы равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}3x^2+3xy+2y^2=0,\\ |x+y|\geq 8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=0,\\ x+y\geq 8,\\ x+y\leq -8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=0,\\ y\geq 8-x,\\ y\leq -8-x.\end{array}\right.$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих этой совокупности, на координатной плоскости. Получаем все точки, лежащие на прямой $y=8-x$ и выше неё, точки на прямой $y=-x-8$ и ниже неё, а также точку $(0; 0)$.

Перейдём к уравнению $x(x-4)+y(y-2)=a$. Преобразуем левую часть, выделяя полные квадраты, и получаем $(x-2)^2+(y-1)^2=a+5$. При $a<-5$ это уравнение задаёт пустое множество, при $a=-5$ – точку $T(2;1)$, а при $a>-5$ – окружность с центром в точке $T(2;1)$ радиуса $\sqrt{a+5}$.

Очевидно, при $a\leq -5$ система не имеет решений. При $a>5$ единственное решение возможно в двух случаях: окружность проходит через точку $K(0; 0)$ или окружность касается прямой $y=8-x$. В первом случае радиус окружности должен быть равен длине отрезка TK, т.е. $\sqrt{a+5}=\sqrt{5}$, откуда $a=0$. Во втором случае радиус равен расстоянию от точки T до прямой $x+y-8=0$, т.е. $\sqrt{a+5}=\dfrac{|2+1-8|}{\sqrt{1+1}}$, откуда $a=7{,}5$.

1. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $AK:KA_1$ и $BN:NB_1$, если $CP:PC_1=3:25$.

Ответ: $AK:KA_1=27:1$, $BN:NB_1=3:4$ *или* $AK:KA_1=3:4$, $BN:NB_1=27:1$.

8. Дан правильный 18-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответ: 540.

Решение. Опишем окружность вокруг 18-угольника. Вписанный угол, равный 90°, опирается на диаметр, поэтому одна из диагоналей является диаметром окружности, а две другие вершины находятся по разные стороны от этого диаметра. Всего есть 9 диаметров; каждую из двух других вершин можно выбрать восемью способами. Тогда получается $9\cdot 8\cdot 8=576$ четвёрок точек. Но при таком подсчёте прямоугольники (т.е. четырёхугольники, у которых обе диагонали являются диаметрами) посчитаны дважды. Прямоугольников выходит $C_9^2=36$ штук, и в итоге получаем $576-36=540$ вариантов.

БИЛЕТ 7

1. Решите уравнение $\log_{\left(3^{x-3}\right)}\left((x-4)^2\right)+\log_{\left(9^{x-3}\right)}\left(x^4\right)=\dfrac{2}{x-3}$.

Ответ: $x=1$, $x=2\pm\sqrt{7}$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2}{x-3}\log_3|x-4|+\frac{4}{2(x-3)}\log_3|x|=\frac{2}{x-3}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\log_3|x-4|+\log_3|x|=1,\\ x-3\neq 0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\log_2\left|x^2-4x\right|=\log_3 3,\\ x\neq 3\end{cases}$$

Уравнение $\left|x^2-4x\right|=3$ эквивалентно совокупности двух уравнений $x^2-4x=-3$ и $x^2-4x=3$, решая которые, находим, что $x=1$, $x=3$, $x=2\pm\sqrt{7}$. Значение $x=3$ не входит в ОДЗ.

2. Решите уравнение $2\sqrt{6}\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{23+\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

Ответ: $x=-\pi+4\pi k, k\in\mathrm{Z}$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $23+\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)=24\cos^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)$ при условии $\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)\geq 0$. С помощью формул приведения, формул понижения степени и формулы косинуса тройного угла получаем:

$$23-\cos 3x=12+12\cos(x+\pi),\ 11-4\cos^3 x+3\cos x=-12\cos x,\ 4\cos^3 x-15\cos x-11=0.$$

Обозначая $\cos x=y$ ($|y|\leq 1$), получаем уравнение $4y^3-15y-11=0$, одним из корней которого является $y=-1$. После деления на $(y+1)$ остаётся уравнение $4y^2-4y-11=0$. Его корни $\left(y=\dfrac{1\pm 2\sqrt{3}}{2}\right)$ по модулю больше единицы, следовательно, они не подходят.

Если $y=-1$, то $\cos x=-1$, $x=\pi+2\pi m, m\in\mathrm{Z}$.

Подставляя найденные x в неравенство $\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)\geq 0$, получаем $\cos(\pi+\pi m)\geq 0$. Несложно видеть, что подходят только нечётные значения m, т.е. $m=2k-1, k\in\mathrm{Z}$, откуда $x=-\pi+4\pi k, k\in\mathrm{Z}$.

3. Решите неравенство $\left(\dfrac{2|2x-3|}{x^2+10}\right)^{x+\sqrt{x^2-3}}>1$.

Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup\left(-2;-\sqrt{3}\right]$.

Решение. Запишем неравенство в виде $\left(\dfrac{2|2x-3|}{x^2+10}\right)^{x+\sqrt{x^2-3}}>\left(\dfrac{2|2x-3|}{x^2+10}\right)^0$. Обозначим $f(x)=\dfrac{2|2x-3|}{x^2+10}$.

Несложно видеть, что $f(x)$ положительна при всех x из ОДЗ (значение $x=\dfrac{3}{2}$ не входит в ОДЗ). Рассмотрим разность $f(x)-1=\dfrac{2|2x-3|-x^2-10}{x^2+10}$.

При $x\geq\dfrac{3}{2}$ она принимает вид $\dfrac{4x-6-x^2-10}{x^2+10}=\dfrac{-x^2+4x-16}{x^2+10}=\dfrac{-(x-2)^2-12}{x^2+10}$. Если $x<\dfrac{3}{2}$, то получаем $\dfrac{6-4x-x^2-10}{x^2+10}=\dfrac{-x^2-4x-4}{x^2+10}=-\dfrac{(x+2)^2}{x^2+10}$. Таким образом, рассматриваемая разность отрицательна при всех x, отличных от -2. Отсюда следует, что $f(x)<1$ при всех x, кроме $x=-2$.

Подстановкой убеждаемся, что $x=-2$ решением не является.

При всех остальных x неравенство равносильно каждому из следующих:

$x+\sqrt{x^2-3}<0$, $\sqrt{x^2-3}<-x$, $\begin{cases}-x>0,\\ x^2-3\ge 0,\\ x^2-3<x^2,\end{cases}$ $x\le-\sqrt{3}$.

Исключая значение $x=-2$, получаем $x\in(-\infty;-2)\cup\left(-2;-\sqrt{3}\right]$.

4. Число 51746 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 5174651746517465174651746517465174651746. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 219.

Решение. Для того, чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Для делимости на 2 нужно, чтобы последней цифрой числа была 0, 2, 4, 6 или 8. Значит, полученное число будет делиться на 2, если мы вычеркнем любые цифры, кроме двух последних. Перейдём к делимости на 3.

Если в числе заменить все цифры 7 и 4 на 1, цифры 6 на 0 и цифры 5 на 2, то остаток от деления числа на 3 не изменится (остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3). Таким образом, нужно узнать, сколькими способами можно вычеркнуть две цифры из числа $X=2111021110211102111021110211102111021110$ так, чтобы полученное число делилось на 3. Сумма цифр числа X равна 40. Чтобы после вычёркивания сумма цифр делилась на 3, мы можем вычеркнуть либо а) две двойки, либо б) единицу и ноль. Количество способов вычеркнуть две двойки равно $C_8^2=28$; количество способов вычеркнуть один ноль и одну единицу равно $C_8^1\cdot C_{24}^1=8\cdot 24=192$.

Две последние цифры вычёркивать нельзя, поэтому получаем $28+192-1=219$ способов.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC<AD$, $\angle ADC=90^\circ$. Точка K – середина отрезка CD. Известно, что окружность радиуса 3 проходит через точки A и B и касается стороны CD в точке K, а $\sin\angle KAD=\frac{1}{3}$. Найдите длины отрезков AB и CD, а также площадь трапеции.

Ответ: $AB=6$, $CD=\frac{8\sqrt{2}}{3}$; $S=8\sqrt{2}$.

Решение. Поскольку окружность касается *CD*, её центр *O* лежит на перпендикуляре к *CD* в точке *K*. С другой стороны, *O* лежит на серединном перпендикуляре к *AB*. Эти две прямые пересекаются в середине *AB*. Значит, *O* — середина *AB*, и *AB* — диаметр окружности, откуда $AB=2R=10$.

Обозначим $\angle BKC=\varphi$. Тогда дуга BK равна 2φ (теорема об угле между касательной и хордой), а $\angle BAK=\varphi$ (теорема о вписанном угле). Далее находим, что $\angle BKA=90^\circ$ (опирается на диаметр), $\angle DAK=90^\circ-\angle DKA=90^\circ-\left(180^\circ-\angle BKA-\angle BKC\right)=\varphi$. Значит, прямоугольные треугольники AKB, ADK и KCB подобны.

Вычисляем основания и высоту трапеции: $BK=AB\sin\varphi=2$, $BC=BK\sin\varphi=\frac{2}{3}$, $DK=CK=BK\cos\varphi=\frac{4\sqrt{2}}{3}$, $CD=2CK=\frac{8\sqrt{2}}{3}$, $AD=KD\operatorname{ctg}\varphi=\frac{16}{3}$. Тогда площадь трапеции S равна $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{16}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{8\sqrt{2}}{3}=8\sqrt{2}$.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases}\left(x^2-4xy+7y^2\right)\left(10-|x-y|\right)\le 0,\\ x(x-2)+y(y+6)=a?\end{cases}$$

Ответ: $a=0; a=8$.

Решение. Рассмотрим выражение $A(x;y)=x^2-4xy+7y^2$ как квадратный трёхчлен относительно x. Его дискриминант равен $D=16y^2-28y^2=-12y^2$. При $y\ne 0$ дискриминант отрицателен, поэтому $A>0$. Если $y=0$, то $A=x^2$, т.е. $A>0$ при $x\ne 0$ и $A=0$ при $x=0$. В итоге получаем, что выражение $A(x;y)$ обращается в ноль в точке $(0;0)$ и положительно во всех остальных точках.

Следовательно, неравенство системы равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2-4xy+7y^2=0, \\ |x-y|\ge 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0, \\ x-y\ge 10, \\ x-y\le -10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0, \\ y\le x-10, \\ y\ge x+10. \end{array}\right.$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих этой совокупности, на координатной плоскости. Получаем все точки, лежащие на прямой $y=x+10$ и выше неё, точки на прямой $y=x-10$ и ниже неё, а также точку $(0;0)$.

Перейдём к уравнению $x(x-2)+y(y+6)=a$. Преобразуем левую часть, выделяя полные квадраты, и получаем $(x-1)^2+(y+3)^2=a+10$. При $a<-10$ это уравнение задаёт пустое множество, при $a=-10$ – точку $T(1;-3)$, а при $a>-10$ – окружность с центром в точке $T(1;-3)$ радиуса $\sqrt{a+10}$.

Очевидно, при $a\le -10$ система не имеет решений. При $a>-10$ единственное решение возможно в двух случаях: окружность проходит через точку $K(0;0)$ или окружность касается прямой $y=x-10$. В первом случае радиус окружности должен быть равен длине отрезка TK, т.е. $\sqrt{a+10}=\sqrt{10}$, откуда $a=0$. Во втором случае радиус равен расстоянию от точки T до прямой $x-y-10=0$, т.е. $\sqrt{a+10}=\dfrac{|1+3-10|}{\sqrt{1+1}}$, откуда $a=8$.

1. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $CP:PC_1$ и $BN:NB_1$, если $AK:KA_1=1:12$.

Ответ: $CP:PC_1=25:27$, $BN:NB_1=49:3$ *или* $CP:PC_1=49:3$, $BN:NB_1=25:27$.

8. Дан правильный 20-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответ: 765.

Решение. Опишем окружность вокруг 20-угольника. Вписанный угол, равный 90°, опирается на диаметр, поэтому одна из диагоналей является диаметром окружности, а две другие вершины находятся по разные стороны от этого диаметра. Всего есть 10 диаметров; каждую из двух других вершин можно выбрать девятью способами. Тогда получается $10\cdot 9\cdot 9=810$ четвёрок точек. Но при таком подсчёте прямоугольники (т.е. четырёхугольники, у которых обе диагонали являются диаметрами) посчитаны дважды. Прямоугольников выходит $C_{10}^2=45$ штук, и в итоге получаем $810-45=765$ вариантов.

БИЛЕТ 8

1. Решите уравнение $\log_{\left(2^{x+1}\right)}\left(x^2\right)+\log_{\left(4^{x+1}\right)}\left((x+3)^4\right)=\dfrac{2}{x+1}$.

Ответ: $x=-2$, $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2}{x+1}\log_2|x|+\frac{4}{2(x+1)}\log_2|x+3|=\frac{2}{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2|x|+\log_2|x+3|=2,\\ x+1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2\left|x^2+3x\right|=\log_2 2,\\ x\neq -1\end{cases}$$

Уравнение $\left|x^2+3x\right|=2$ эквивалентно совокупности двух уравнений $x^2+3x=-2$ и $x^2+3x=2$, решая которые, находим, что $x=-1$, $x=-2$, $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$. Значение $x=-1$ не входит в ОДЗ.

2. Решите уравнение $\sqrt{29+\sin 3x}=\sqrt{30}\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: $x=\dfrac{3\pi}{2}+4\pi k, k\in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $29+\sin 3x=30\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$ при условии $\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\geq 0$. В левой части раскладываем синус тройного угла, а в правой части используем формулу понижения степени и формулу приведения, и получаем:

$$29+\sin 3x=15-15\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right),\ 14+3\sin x-4\sin^3 x=-15\sin x,\ 2\sin^3 x-9\sin x-7=0.$$

Обозначая $\sin x=y$ ($|y|\leq 1$), получаем уравнение $2y^3-9y-7=0$, одним из корней которого является $y=-1$. После деления на $(y+1)$ остаётся уравнение $2y^2-2y-7=0$. Его корни $\left(y=\dfrac{1\pm\sqrt{15}}{2}\right)$ по модулю больше единицы, следовательно, они не подходят.

Если $y=-1$, то $\sin x=-1$, $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z$.

Подставляя найденные x в неравенство $\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\geq 0$, получаем $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi m\right)\geq 0$. Несложно видеть, что подходят только нечётные значения m, т.е. $m=2k+1, k\in Z$, откуда $x=\dfrac{3\pi}{2}+4\pi k, k\in Z$.

3. Решите неравенство $\left(\dfrac{4|x+1|}{x^2+8}\right)^{-x+\sqrt{x^2-2}}>1$.

Ответ: $x\in\left[\sqrt{2};2\right)\cup(2;+\infty)$.

Решение. Запишем неравенство в виде $\left(\dfrac{4|x+1|}{x^2+8}\right)^{-x+\sqrt{x^2-2}}>\left(\dfrac{4|x+1|}{x^2+8}\right)^0$. Обозначим $f(x)=\dfrac{4|x+1|}{x^2+8}$. Несложно видеть, что $f(x)$ положительна при всех x из ОДЗ (значение $x=-1$ не входит в ОДЗ). Рассмотрим разность $f(x)-1=\dfrac{4|x+1|-x^2-8}{x^2+8}$.

При $x \geq -1$ она принимает вид $\dfrac{4x+4-x^2-8}{x^2+8} = \dfrac{-x^2+4x-4}{x^2+8} = \dfrac{-(x-2)^2}{x^2+8}$. Если $x < -1$, то получаем $\dfrac{-4x-4-x^2-8}{x^2+8} = \dfrac{-x^2-4x-12}{x^2+8} = \dfrac{-(x+2)^2-8}{x^2+8}$. Таким образом, рассматриваемая разность отрицательна при всех x, отличных от 2. Отсюда следует, что $f(x) < 1$ при всех x, кроме $x = 2$.

Подстановкой убеждаемся, что $x = 2$ решением не является.

При всех остальных x неравенство равносильно каждому из следующих:

$$-x+\sqrt{x^2-2} < 0, \quad \sqrt{x^2-2} < x, \quad \begin{cases} x > 0, \\ x^2-2 \geq 0, \\ x^2-2 < x^2, \end{cases} \quad x \geq \sqrt{2}.$$

Исключая значение $x = 2$, получаем $x \in \left[\sqrt{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

4. Число 96182 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 9618296182961829618296182961829618296182. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 247.

Решение. Для того, чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Для делимости на 2 нужно, чтобы последней цифрой числа была 0, 2, 4, 6 или 8. Значит, полученное число будет делиться на 2, если мы вычеркнем любые цифры, кроме двух последних. Перейдём к делимости на 3.

Если в числе заменить все цифры 9 и 6 на 0, а цифры 8 на 2, то остаток от деления числа на 3 не изменится (остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3). Таким образом, нужно узнать, сколькими способами можно вычеркнуть две цифры из числа $X = 0012200122001220012200122001220012200122$ так, чтобы полученное число делилось на 3. Сумма цифр числа X равна 40. Чтобы после вычёркивания сумма цифр делилась на 3, мы можем вычеркнуть либо а) две двойки, либо б) единицу и ноль. Количество способов вычеркнуть две двойки равно $C_{16}^2 = 120$; количество способов вычеркнуть один ноль и одну единицу равно $C_{16}^1 \cdot C_8^1 = 16 \cdot 8 = 128$.

Две последние цифры вычёркивать нельзя, поэтому получаем $120 + 128 - 1 = 247$ способов.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC < AD$, $\angle BAD = 90^\circ$. Точка K – середина отрезка AB. Известно, что окружность радиуса 6 проходит через точки C и D и касается стороны AB в точке K, а $\cos\angle KCB = \dfrac{1}{3}$. Найдите длины отрезков CD и AB, а также площадь трапеции.

Ответ: $CD = 12;\ AB = \dfrac{16\sqrt{2}}{3};\ S = 32\sqrt{2}$.

Решение. Поскольку окружность касается *AB*, её центр *O* лежит на перпендикуляре к *AB* в точке *K*. С другой стороны, *O* лежит на серединном перпендикуляре к *CD*. Эти две прямые пересекаются в середине *CD*. Значит, *O* — середина *CD*, и *CD* — диаметр окружности, откуда $CD = 2R = 12$.

Обозначим $\angle AKD = \varphi$. Тогда дуга KD равна 2φ (теорема об угле между касательной и хордой), а $\angle KCD = \varphi$ (теорема о вписанном угле). Далее находим, что $\angle CKD = 90^\circ$ (опирается на диаметр), $\angle BCK = 90^\circ - \angle BKC = 90^\circ - \left(180^\circ - \angle CKD - \angle AKD\right) = \varphi$. Значит, прямоугольные треугольники DKA, DCK и KCB подобны.

Вычисляем основания и высоту трапеции: $CK = CD\cos\varphi = 4$, $BC = CK\cos\varphi = \dfrac{4}{3}$, $BK = AK = CK\sin\varphi = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$, $AB = 2BK = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$, $AD = AK\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{32}{3}$. Тогда площадь трапеции S равна $\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{4}{3}+\dfrac{32}{3}\right)\cdot\dfrac{16\sqrt{2}}{3} = 32\sqrt{2}$.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases}\left(2x^2-5xy+4y^2\right)\left(7-|x+y|\right)\le 0,\\ x(x-6)+y(y+4)=a\,?\end{cases}$$

Ответ: $a=0; a=5$.

Решение. Рассмотрим выражение $A(x;\,y)=2x^2-5xy+4y^2$ как квадратный трёхчлен относительно x. Его дискриминант равен $D=25y^2-32y^2=-7y^2$. При $y\ne 0$ дискриминант отрицателен, поэтому $A>0$. Если $y=0$, то $A=2x^2$, т.е. $A>0$ при $x\ne 0$ и $A=0$ при $x=0$. В итоге получаем, что выражение $A(x;\,y)$ обращается в ноль в точке $(0;\,0)$ и положительно во всех остальных точках.

Следовательно, неравенство системы равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}2x^2-5xy+4y^2=0,\\ |x+y|\ge 7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=0,\\ x+y\ge 7,\\ x+y\le -7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=0,\\ y\ge -x+7,\\ y\le -x-7.\end{array}\right.$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих этой совокупности, на координатной плоскости. Получаем все точки, лежащие на прямой $y=-x+7$ и выше неё, точки на прямой $y=-x-7$ и ниже неё, а также точку $(0;0)$.

Перейдём к уравнению $x(x-6)+y(y+4)=a$. Преобразуем левую часть, выделяя полные квадраты, и получаем $(x-3)^2+(y+2)^2=a+13$. При $a<-13$ это уравнение задаёт пустое множество, при $a=-13$ – точку $T(3;-2)$, а при $a>-13$ – окружность с центром в точке $T(3;-2)$ радиуса $\sqrt{a+13}$.

Очевидно, при $a\le -13$ система не имеет решений. При $a>-13$ единственное решение возможно в двух случаях: окружность проходит через точку $K(0;0)$ или окружность касается прямой $y=-x+7$. В первом случае радиус окружности должен быть равен длине отрезка TK, т.е. $\sqrt{a+13}=\sqrt{13}$, откуда $a=0$. Во втором случае радиус равен расстоянию от точки T до прямой $x+y-7=0$, т.е. $\sqrt{a+13}=\dfrac{|3-2-7|}{\sqrt{1+1}}$, откуда $a=5$.

1. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $AK:KA_1$ и $BN:NB_1$, если $CP:PC_1=1:27$.

Ответ: $AK:KA_1=4:3$, $BN:NB_1=25:3$ *или* $AK:KA_1=25:3$, $BN:NB_1=4:3$.

8. Дан правильный 14-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответ: 231.

Решение. Опишем окружность вокруг 14-угольника. Вписанный угол, равный 90°, опирается на диаметр, поэтому одна из диагоналей является диаметром окружности, а две другие вершины находятся по разные стороны от этого диаметра. Всего есть 7 диаметров; каждую из двух других вершин можно выбрать шестью способами. Тогда получается $7\cdot 6\cdot 6=252$ четвёрки точек. Но при таком подсчёте прямоугольники (т.е. четырёхугольники, у которых обе диагонали являются диаметрами) посчитаны дважды. Прямоугольников выходит $C_7^2=21$ штук, и в итоге получаем $252-21=231$ вариант.