Московский физико-технический институт

Использование призм, клинов и прозрачных пластинок в оптических системах.

Методическое пособие
по подготовке к олимпиадам.

Составитель:
Паркевич Егор Вадимович

Москва 2014

Введение.

Оптические приборы, такие как: оптические призмы, клинья и плоскопараллельные пластинки, являются одним из основных элементов при создании оптических систем и оптических приборов. Например плоскопараллельные пластинки применяются в качестве защитных светофильтров и в угломерных приборах (для малых угловых смещений изображения), сеток (пластинок с выгравированными на них шкалами), стекол для окон, в некоторых интерферометрах (см. Люммера — Герке пластинка, Майкельсона эшелон) и т.д.

Призмы широко используются в оптических приборах различного назначения, таких как наблюдательные оптические приборы (телескопы, бинокли, микроскопы и другие), оптические приборы для регистрации изображений на электронных приёмниках, сложные многофункциональные оптические приборы. Причём, чем сложнее оптический прибор, тем большее количество и номенклатура оптических призм может в нём использоваться. Например, большое число сложных оптических призм используется в таких оптических приборах как спектральные оптические приборы, интерферометры, поляриметры и другие. Часто применяемые в оптических приборах отражательные призмы во многих отношениях эквивалентны плоскопараллельной пластинке.

Оптические призмы в зависимости от их оптической конструкции функционально позволяют изменять ход лучей в оптических приборах и направление оптической оси системы; оборачивать оптические изображения; уменьшать габариты оптических систем; разделять пучки лучей в оптических системах; объединять поля в оптических системах; вращать в оптических системах изображения; компенсировать в оптических системах поворот изображения; разлагать белый свет в спектр; получать поляризованный свет и т.д.

Следует отметить, что действие оптической призмы подобно зеркалу, однако в ряде случаев использовать оптические призмы удобнее, чем зеркала. Отметим некоторые преимущества призм перед зеркалами: действие одной призмы, часто, заменяет действие системы зеркал, углы между зеркалами должны регулироваться с большой точностью при сборке, система зеркал подвержена разъюстированию; углы же между гранями призмы неизменны; потери света у призм от граней с полным внутренним отражением равны нулю, тогда как при отражении от поверхностей зеркал потери довольно велики; кроме того, отражающие покрытия зеркал с течением времени могут портиться; конструкция крепления призм в оправах, как правило, проще чем системы зеркал, имеет меньшие габариты; для некоторых призм нет эквивалентных зеркальных систем (например, призма Дове, полупента, некоторые виды спектральных призм).

Вместе с тем, встречаются оптические системы и оптические приборы, в которых замена оптических призм на зеркала целесообразна. Важнейшими факторами являются вес прибора (зеркала значительно легче призм), а также стоимость. Кроме того призмы в ряде случаев являются источниками хроматических и некоторых других аберраций, устранить которые намного сложнее, чем например в системах с линзами.

Рассмотрим теперь работу каждого оптического прибора более подробно.

Призмы.

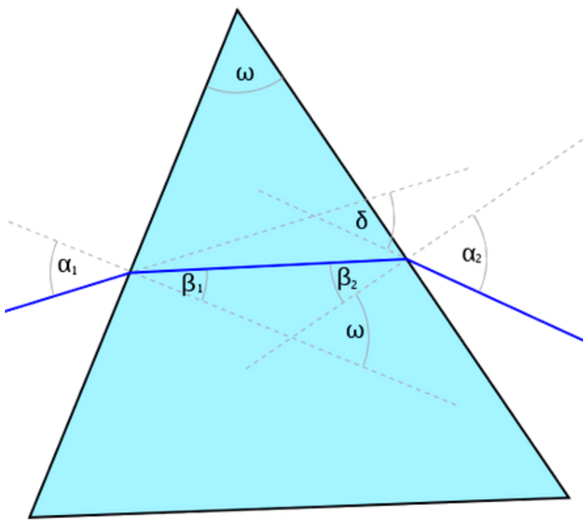
Призма — оптический элемент из прозрачного материала (например, оптического стекла) в форме геометрического тела — призмы, имеющий плоские полированные грани, через которые входит и выходит свет, свет в призме при этом преломляется.

Рабочие и нерабочие поверхности призмы — плоскости. Различают преломляющие рабочие поверхности призмы, через которые световой пучок входит в призму и выходит из нее, и отражающие поверхности призмы, от которых пучок отражается при прохождении внутри призмы. Число рабочих граней и взаимное их расположение определяет ход пучка внутри призмы и все преобразования пучка, которые при этом происходят.

Если осевой луч проходит внутри призмы в одной плоскости, то такую призму называют *плоской*. Если осевой луч идет в двух плоскостях, — такая призма называется *пространственной*.

Сечение призмы плоскостью, в которой проходит осевой луч пучка, называется *главным сечением призмы*; у плоских призм одно главное сечение, у пространственных главных сечений столько, сколько плоскостей, в которых проходит осевой луч.

Важнейшей характеристикой призмы является показатель преломления материала, из которого она изготовлена.



Рассмотрим простейший тип призмы — треугольную призму, то есть тело, представляющее собой геометрическую фигуру призма с двумя треугольными основаниями и тремя боковыми гранями в форме прямоугольников.

На рисунке показано сечение треугольной призмы плоскостью, параллельной её основаниям. Обозначения: δ — угол отклонения, ω — преломляющий угол призмы, α_1, β_2 — углы падения, соответственно, входящего через боковую грань призмы луча и луча, выходящего через другую её боковую грань, β_1, α_2 — углы преломления этих двух лучей соответственно. На данном рисунке материал призмы — оптически более плотная среда, чем её окружение, поскольку угол падения входящего луча больше его угла преломления. То есть относительный показатель преломления этого материала — больше единицы, обозначим его n .

Самая простая формула для угла отклонения получается, если предположить, что преломляющий угол призмы и угол падения входящего луча малы. Тогда будет мал и угол α_2 , а значит, малы будут и углы β_1, β_2 . По закону преломления света:

$$\alpha_1 \approx \sin\alpha_1 = n \cdot \sin\beta_1 \approx n \cdot \beta_1,\ \ \alpha_2 \approx \sin\alpha_2 = n \cdot \sin\beta_2 \approx n \cdot \beta_2$$

Учитывая, что сумма углов четырёхугольника равна 2π и принимая во внимание, что $\omega = \beta_1 + \beta_2$:

$$\pi - \delta + \pi - \omega + \alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi,\ \delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \omega \approx n \cdot (\beta_1 + \beta_2) - \omega = n \cdot \omega - \omega = (n-1) \cdot \omega$$

Таким образом, при малом угле падения входящего луча имеем приближённую формулу для угла отклонения:

$$(1) \qquad \delta \approx (n-1) \cdot \omega$$

Свойства отражательных призм.

Отметим также то, что работа призмы аналогична работе системы, содержащей плоскопараллельную пластинку и зеркала.

Применение:

1) Для оборачивания изображения,

2)для сокращения габаритов приборов,

3) для разделения пучков,

4) для компенсаций поворота изображений (используют как правило призмы Брове)

Преимущество:

1) угол между отражающими плоскостями всегда постоянный,

2) потеря света, при полном внутреннем отражении практически равна нулю, в отличие от зеркал, которые имеют сравнительно большой вес и большие потери света при отражении.

Виды призм.

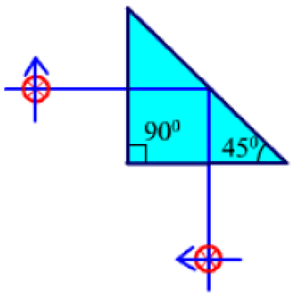
1) Призмы, которые меняют ход луча в одной плоскости. Они делятся на призмы с одним, двумя и тремя отражениями. Существуют призмы, состоящие из двух призм.

2) Призмы с крышей. Они строятся на базе призм с плоским ходом луча, только одна одна из отражённых граней заменяется двумя с двугранным углом.

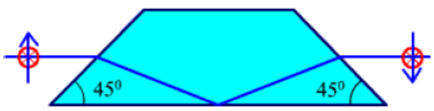
3) Призменные системы, они меняют ход лучей в пространстве и состоят из нескольких призм.

Каждая призма маркируется буквами и цифрами: первая буква определяет число отражающих граней (А — одна отражающая грань, Б — две, В — три), вторая — характер конструкции призмы (Р — равнобедренная, С — ромбическая, П — пента-призма, У — полпента-призма, Л — Лемана); число указывает угол отклонения осевого луча в градусах. Для обозначения призм с крышей добавляются буква " к ". Например, прямоугольная призма обозначается $AP - 90°$.

Прямоугольная призма: прямоугольная призма может стоять как в параллельном, так и в сходящемся пучке лучей. Излом оси 90°, изображение зеркальное.

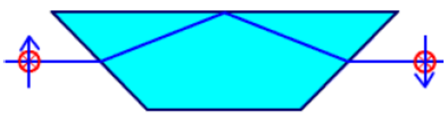


Призма Дове: призма Дове не отклоняет и не смещает оптическую ось, она служит для компенсации поворота изображения в оптических приборах, даёт зеркальное изображение, может устанавливаться только в параллельных пучках. При установке призмы Дове в сходящихся или расходящихся пучках она вносит несимметричные искажения, которые невозможно исправить линзовой оптикой.



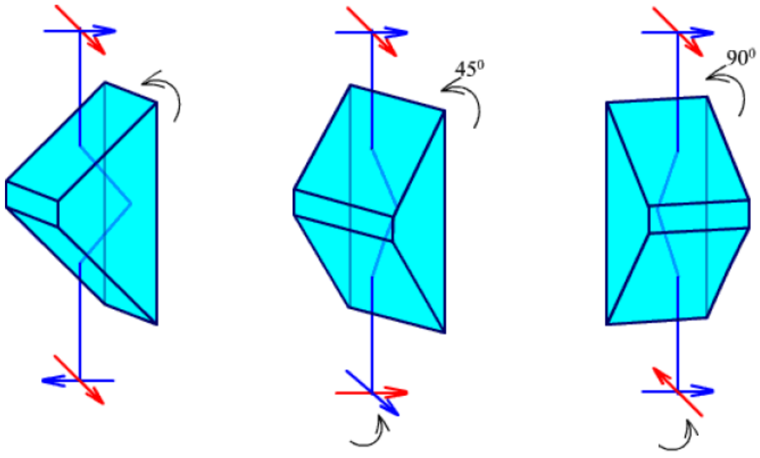
а) Исходное положение призмы.

б) Призма повернута на 90°*, изображение повернулось на* 180°.

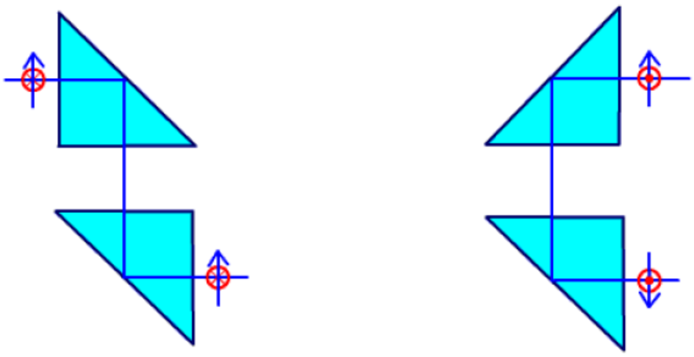


в) Призма повернута на 180°*, изображение повернулось на* 360°.

При повороте призмы на угол α, изображение поворачивается на угол 2α. Поворот изображения в зависимости от угла поворота призмы показан на рисунках.



Рассмотрим, из-за чего возникает поворот изображения в оптических приборах. На рисунках ниже показана система, состоящая из двух прямоугольных призм.

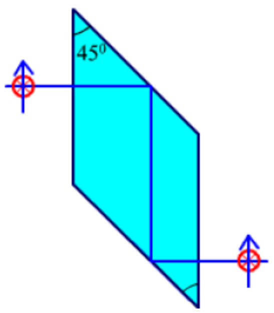


а) Изображение прямое

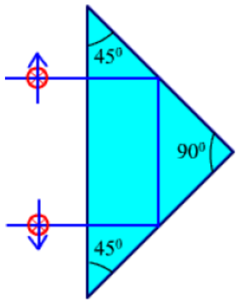
б) Призма повернута на 180°, *изображение – на* 180°

При повороте головной призмы вокруг оси y, можно осуществить обзор по горизонту на 360°. При этом происходит поворот изображения. Если призма поворачивается на угол α, изображение поворачивается также на угол α.

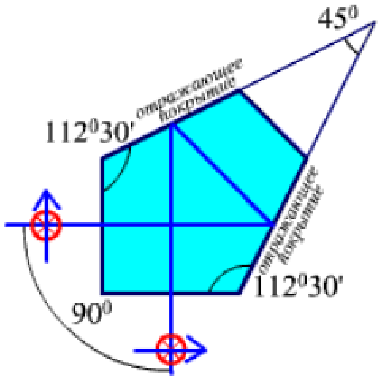
Ромбическая призма: призму — ромб можно рассматривать как комбинацию двух прямоугольных призм, между которыми находится плоскопараллельная пластика. Такая призма даёт параллельное смещение оптической оси и прямое изображение.



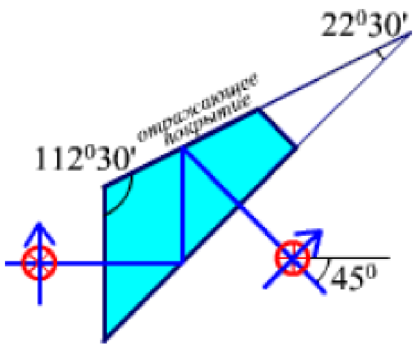
Прямоугольная призма с двумя отражениями: На рисунке дана прямоугольная призма с двумя отражениями. В призме входной гранью является гипотенузая. Призма даёт полностью перевернутое изображение, излом оси 180°.



Пента — призма: на рисунке приведена пента-призма. В призме излом оси 90°, изображение прямое. Углы падения лучей на отражающие грани меньше предельных углов полного внутреннего отражения, поэтому требуется нанесение отражающего покрытия.

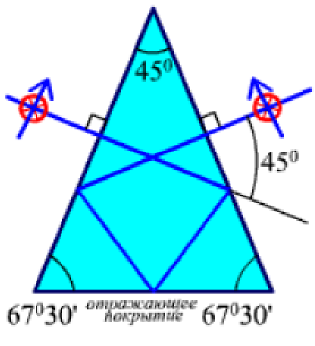


На следующем рисунке дана полупента-призма. Она даёт излом оптической оси 45° и прямое изображение. На отражающую грань нужно наносить отражающее покрытие.

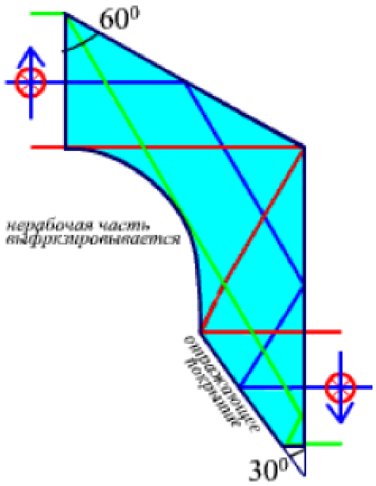


Призмы с тремя отражениями (Шмидта и Лемана)

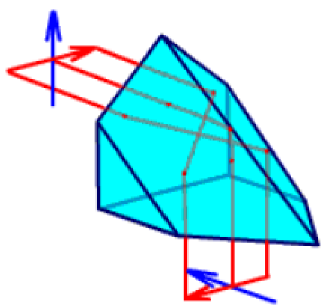
Призма Шмидта даёт зеркальное изображение и отклоняет оптическую ось на 45°. На вторую отражающую грань наносится отражающее покрытие.



Призму Лемана можно рассматривать как комбинацию двух прямоугольных призм с углами 60° и 30°. Такая призма даёт смещение оптической оси и зеркальное изображение. На третью отражающую грань наносится отражающее покрытие. Нерабочая часть призмы (где не проходят лучи) фрезеруется.



Призмы с крышкой: для оборачивания изображения в плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа, на одну из отражающих граней призмы наносят крышку: одну из отражающих граней заменяют двумя перпендикулярными друг другу плоскостями, ребро которых лежит в главном сечении призмы.



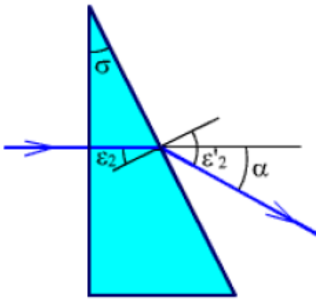
Лучи, идущие от горизонтальной (красной) стрелки, расположенной перпендикулярно ребру крыши, попадают, соответственно, на левую и правую отражающие поверхности, затем пучки перекидываются на противоположные стороны крыши и направляются на выходную грань призмы. Происходит оборачивание стрелки справа налево.

Лучи, идущие от параллельной оси y стрелки (синей), проходят через призму с крышей так же, как и через призму без крыши.

Крышу наносят на отражающую грань, но эта грань должна быть одновременно входной или выходной. Если одна из отражающих граней призмы требует нанесения отражающего покрытия, то крышу выгоднее наносить на эту грань, так как крыша не требует нанесения зеркального покрытия.

Клинья.

Клин — преломляющая система с малым углом преломления ($\sigma < 6°$). Клинья используются в качестве компенсаторов при юстировках и измерениях. Определим угол отклонения луча клином.



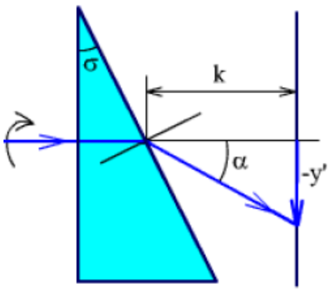
При малых углах закон преломления будет иметь вид:

$$n \cdot \varepsilon = n' \cdot \varepsilon'$$

Пусть первая поверхность перпендикулярна падающему лучу. Из рисунка следует: $\alpha = \varepsilon_2' - \varepsilon_2$. Принимая во внимание: $n \cdot \varepsilon_2 = \varepsilon_2', \varepsilon_2 = \sigma$, получаем: $\alpha = n \cdot \varepsilon_2 - \varepsilon_2 = \sigma(n-1)$.

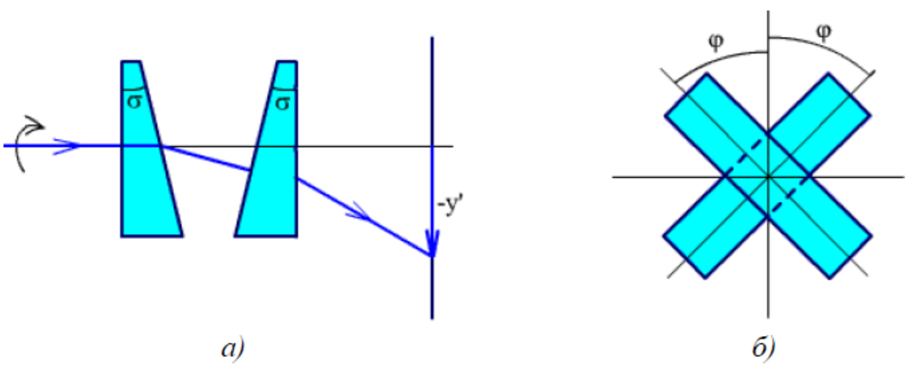
$$(2) \quad \alpha = \sigma(n-1)$$

Угол отклонения луча клином α не меняется при повороте клина вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа.



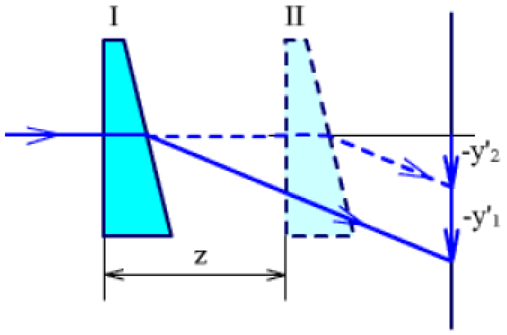
Рассмотрим работу вращающихся клиньев. При вращении одного клина изображение точки описывает окружность радиуса y'. Радиус этой окружности равен: $y' = k \cdot \alpha = \sigma(n-1)k$.

Для того, чтобы получить прямолинейное движение осевой точки, необходимо иметь два одинаковых вращающихся клина. На рисунке показаны два клина в максимуме отклонения: $\alpha = 2(n-1)\sigma$.



Два вращающихся клина.

Если основание клиньев направлены в противоположные стороны, тогда $\alpha = 0$. При повороте клиньев вокруг оси на равные углы в противоположных направлениях угол отклонения луча изменяется в соответствии с формулой: $\alpha = 2(n-1)\sigma \cdot \cos\varphi$. Прямолинейное перемещение осевой точки можно получить за счёт поступательного перемещения клина. В этом случае: $\triangle y' = z \cdot \alpha = z \cdot \sigma(n-1)$.

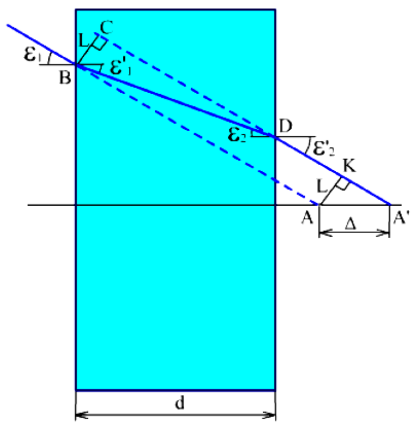


Поступательное перемещение клина.

Поступательно перемещающийся клин для компенсации и измерения малых линейных величин является менее точным. Вращающиеся клинья можно использовать только в параллельных пучках лучей, а перемещающиеся клинья можно использовать и в сходящихся пучках лучей.

Плоскопараллельная пластинка.

Рассмотрим работу плоскопараллельной пластинки в параксиальной области.



Из рисунка следует, что $\varepsilon_1' = \varepsilon_2, n_1 = 1, n_1' = n_2 = n, n_2' = 1$. Закон преломления в параксиальной области для первой и второй поверхностей пластины имеет вид: $\varepsilon_1 = n \cdot \varepsilon_1', n \cdot \varepsilon_2 = \varepsilon_2'$. Откуда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2'$.

Угол, образованный падающим лучом с оптической осью постоянным, происходит только параллельное смещение луча на величину $\triangle$. Определим удлинение, вносимое плоскопараллельной пластинкой в параксиальной области. Из рисунка следует:

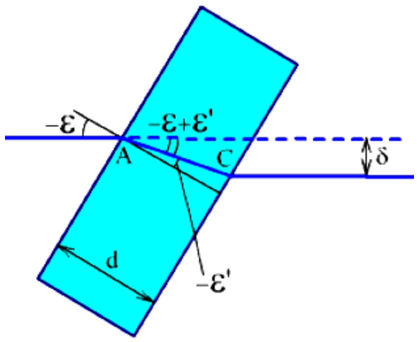
$$\triangle = \frac{L}{\varepsilon_1} = \frac{BD(\varepsilon_1 - \varepsilon_1')}{\varepsilon_1} = \frac{d(\varepsilon_1 - \varepsilon_1')/\cos\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = d\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \triangle = d - d/n \qquad (3)$$

Удлинение, вносимое пластинкой при конечных углах падения и преломления $\triangle_p$, определяется по формуле:

$$(4) \qquad \triangle_p = d \cdot \left(1 - \frac{\cos\varepsilon_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon_1}}\right)$$

Если плоскопараллельная пластинка, стоящая перпендикулярно оптической оси, поворачивается на некоторый угол ε, то происходит смещение оптической оси на величину:

$\delta = AC \cdot \sin(-\varepsilon + \varepsilon'), \quad \sin\varepsilon' = \dfrac{\sin\varepsilon}{n}, \; AC = \dfrac{d}{\cos\varepsilon'}.$

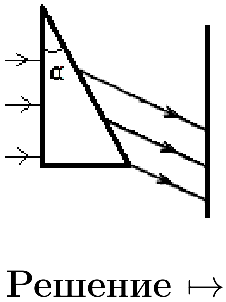


Если выполнить расчёт в параксиальной области, то:

$$(5) \qquad \delta = \frac{n-1}{n} \cdot d \cdot \sin\varepsilon$$

Примеры.

Задача №1 Экран освещается солнечным светом, падающим перпендикулярно его плоскости. Как изменится освещенность экрана, если на пути света поставить стеклянную призму с углом при вершине α (см. рис.)? Грань, на которую падает свет, параллельна плоскости экрана. Показатель преломления стекла равен n. Считать, что отражения света от граней призмы нет.



Решение $\mapsto$ По закону преломления $\sin\beta = n\sin\alpha$. Освещенность изменится по двум причинам: во-первых, меняется угол падения на экран — вместо угла, равного $0°$ будет угол $\beta - \alpha$;

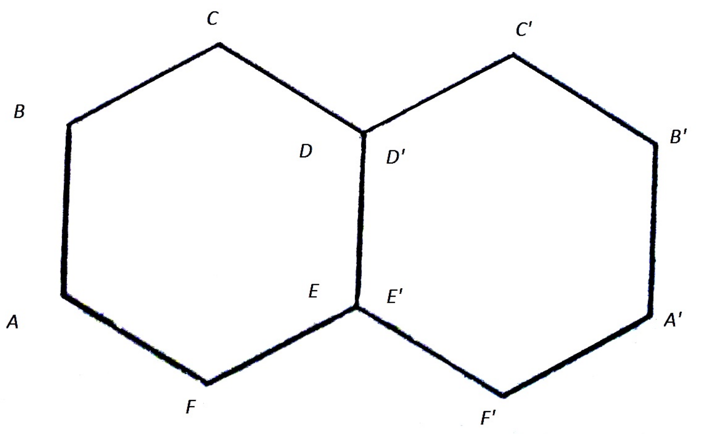
во-вторых, изменяется освещенная площадь экрана за счет изменения ширины пучка — вместо ширины AB получается ширина CD (см. рис.). Таким образом, $\dfrac{E_2}{E_1} = \dfrac{AB}{GF}\cos(\beta - \alpha)$.

Найдём отношение GF/AB. Поскольку $GF \perp LC, ML \parallel AB, LM = AB, \angle MLF = \alpha, \angle LFG = \beta, LF = LM/\cos\alpha = AB/\cos\alpha$, то $GF = LF\cos\beta = AB\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$; отсюда $\dfrac{E_2}{E_1} = \dfrac{\cos(\beta-\alpha)}{\cos\beta}\cos\alpha$.

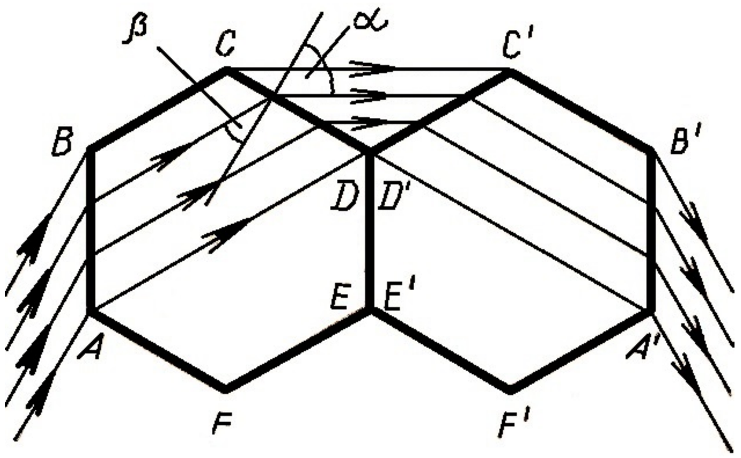
С учетом закона преломления окончательно получаем $\dfrac{E_2}{E_1} = \cos\alpha\left(\cos\alpha + \dfrac{n\sin\alpha^2}{\sqrt{1-n^2\sin\alpha^2}}\right)$.

Ответ: $\dfrac{E_2}{E_1} = \cos\alpha\left(\cos\alpha + \dfrac{n\sin\alpha^2}{\sqrt{1-n^2\sin\alpha^2}}\right)$.

Задача №2 Две правильные шестигранные призмы $ABCDEF$ и $A'B'C'D'E'F'$ из прозрачного материала сложены вплотную зачерненными гранями DE и $D'E'$ (см. рис.). Остальные грани имеют просветляющее покрытие, то есть на них не происходит отражения света. Грань AB освещается широким параллельным пучком света, параллельным плоскости основания призмы. При некотором значении угла падения весь световой поток, попадающий на грань AB, выходит через грань $A'B'$ второй призмы. Определить показатель преломления материала призм.



Решение ↦ Для того чтобы весь световой поток вышел через грань $A'B'$ второй призмы, он должен выйти из первой призмы через грань CD перпендикулярно грани DE, а попасть на грань CD параллельно грани BC.

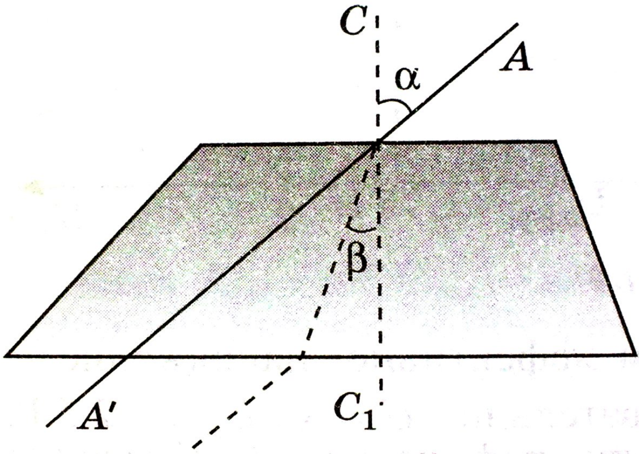


При этом, как видно из рисунка, $\beta = 30°$, а $\alpha = 60°$. Следовательно, $n = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{3}$.

Ответ: $n = \sqrt{3}$.

Задача №3 Как определить показатель преломления призмы, используя следующие инструменты: прозрачная призма с параллельными боковыми гранями, лист бумаги, линейка, карандаш.

Ответ $\mapsto$ Учтём то, что после прохождения светового луча через параллельные грани призмы он будет смещён относительно своего первоначального (до прохождения через призму) положения. Проведём с помощью линейки на бумаге прямую линию AA' и расположим на листе призму так, как показано на рисунке.



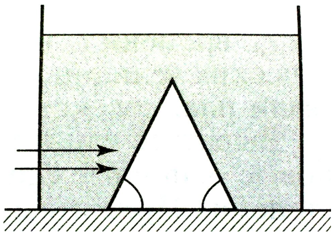
Затем посмотрим на призму сбоку так, чтобы видеть линию через параллельные боковые грани. Отметим на бумаге, где видимое продолжение линии выходит из призмы, а саму призму обведём по контуру.

С помощью призмы строим перпендикуляр к одной из её параллельных граней. Для этого находим такое положение призмы, при котором видимое сквозь призму изображение линии CC_1, проведённой перпендикулярно одной из параллельных граней, остаётся прямым (без излома). В этом случае грань призмы перпендикулярна линии CC_1.

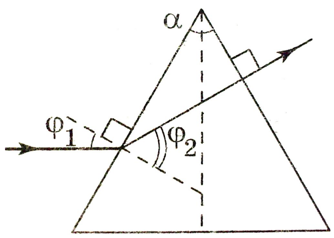
Вычислим $n_\alpha \sin\alpha$ и $n_\beta \sin\beta$ по измеренным с помощью линейки катету и гипотенузе. Получаем для показателя преломления $n = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Опыт повторяет для нескольких значений угла α и усредняем результаты.

Задача №4 В аквариуме, заполненном прозрачной жидкостью, закреплена тонкостенная полая равнобедренная призма. Схематически это изображено на рисунке. Узкий пучок света, распространяющийся параллельно дну аквариума, после прохождения призмы выходит из неё перпендикулярно её боковой грани. Для каких значений показателя преломления жидкости это возможно?



Решение $\mapsto$ Согласно теореме о равенстве углов со взаимно перпендикулярными сторонами угол падения равен половинному углу при вершине полой призмы: $\varphi_1 = \alpha/2$, а угол преломления равен углу при вершине полой призмы: $\varphi_2 = \alpha$.



По закону Снелла $n \sin\varphi_1 = \sin\varphi_2$ и после соответствующей подстановки получим:

$$n \sin\alpha/2 = \sin\alpha$$

Воспользуемся тригонометрической формулой $\sin\alpha = 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$. Тогда получим выражение для показателя преломления:

$$n = 2\cos(\alpha/2)$$

По физическому смыслу задачи $0 < \alpha < \pi/2$. С учётом этого равенства получаем $\sqrt{2} < n < 2$.

Ответ: $\sqrt{2} < n < 2$.

Задача №5 Световой луч падает по нормали на боковую грань прямой стеклянной призмы, поперечное сечение которой — равнобедренный треугольник, $\alpha = 70°$. Показатель преломления стекла $n = 1.5$ Определите угол между падающим и вышедшим из призмы лучами.

Решение $\mapsto$ Так как луч падает по нормали к боковой грани призмы, то в призме он будет распространяться в том же самом направлении.

Если далее он попадёт на другую боковую грань, то на ней он испытывает полное внутреннее отражение и выйдет из призмы через её основание. Угол падения луча на основание равен:

$$i = 180° - \frac{180° - \alpha}{2} - (90° - \alpha) - 90° = 15°$$

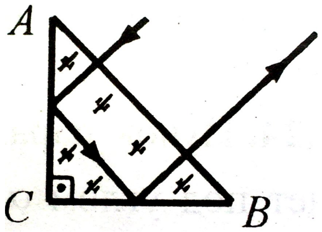
Угол преломления на основании $r = \arcsin(n \cdot \sin i) \approx 22.8°$.

Следовательно, отклонение вышедшего луча от первоначального направления составит $\triangle\varphi = 2(90° - \alpha) - [r - i] \approx 32.2°$.

Если в призме луч попадает сразу на её основание, то он испытывает на нём отражение, и попадает на другую грань под углом $i = 0°$. Пройдя через эту грань, не преломившись, он отклонится от первоначального направления на угол $\triangle\varphi = \alpha = 70°$.

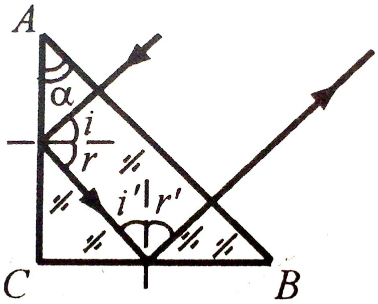
Ответ: $\triangle\varphi = \alpha = 70°$.

Задача №6 При каких значениях показателя преломления материала прямоугольной призмы возможен ход луча, изображённый на рисунке? Сечение призмы — равнобедренный прямоугольный треугольник, луч падает на грань AB перпендикулярно.



Решение $\mapsto$ Угол при вершине призмы $\alpha = 45°$. На гранях AC и BC луч должен испытывать полное внутреннее отражение, то есть должны выполняться условия:

$$\begin{cases} \sin i \geq \dfrac{1}{n}; \\ \sin i' \geq \dfrac{1}{n}, \end{cases} \text{, где } n \text{ — показатель преломления призмы.}$$



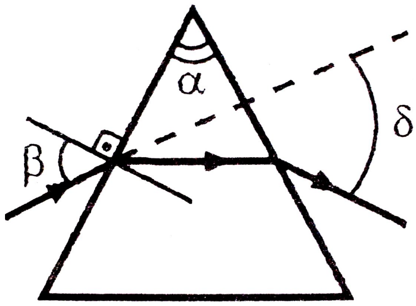
При отражении света внутри призмы $i = r, i' = r'$, поэтому

$$\begin{cases} \sin i \geq \dfrac{1}{n} \\ \sin i' = \sin(\pi/2 - i) \geq \dfrac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin i \geq \dfrac{1}{n}; \\ \cos i \geq \dfrac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha^2 \geq \dfrac{1}{n^2}; \\ \cos\alpha^2 \geq \dfrac{1}{n^2} \end{cases} \Rightarrow \sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 \geq \frac{2}{n^2}.$$

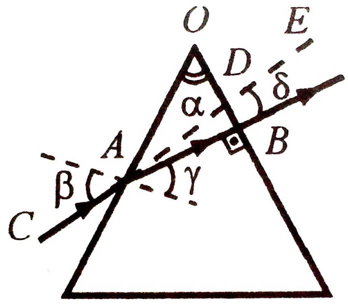
Следовательно, $n \geq \sqrt{2}$.

Ответ: $n \geq \sqrt{2}$.

Задача №7 Тонкий световой луч падает из воздуха на боковую грань стеклянной призмы под углом $\beta = 45°$. Угол между боковыми гранями призмы равен $\alpha = 30°$. Показатель преломления воздуха равен 1, а стекла $n = 1.41$. Определите угол смещения луча от первоначального направления распространения δ.



Решение $\mapsto$ Из закона Снелла $\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \dfrac{n_{ст}}{n_{взд}}$ находим угол преломления луча в призме (см. рисунок): $\sin\gamma = \sin\beta \dfrac{n_{взд}}{n_{ст}} \approx 0.5 \Rightarrow \gamma = 30°$.

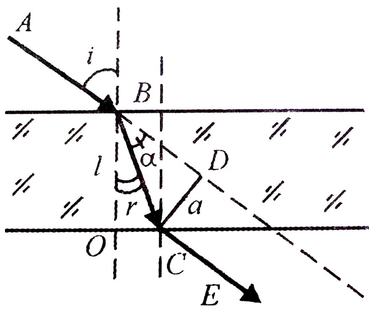


В треугольнике OAB : $\angle BAO = 60°$, следовательно, угол падения луча на другую грань призмы равен $90°$, то есть луч выходит из призмы, не преломляясь. В таком случае угол смещения луча в призме будет равен углу DAB, то есть $\delta = \angle BAO - \beta = 15°$.

Ответ: $\delta = \angle BAO - \beta = 15°$.

Задача №8 Луч падает на плоскопараллельную пластинку из стекла под углом равным 45°. Какова толщина пластинки, если луч при выходе из неё сместится на $a = 2.0$ см? Показатель преломления стекла $n = 1.8$.

Решение $\mapsto$ Ход луча в пластинке показан на рисунке.



Обозначим толщину пластинки $OB = l$. Угол преломления r найдём, воспользовавшись законом Снелла: $\sin r = \dfrac{\sin i}{n}$.

Из треугольника OBC $BC = \dfrac{l}{\cos r}$, а из треугольника BCD $a = BC\sin\alpha = BC\sin(i - r)$.

Решая полученную систему уравнений относительно l, находим:

$$l = \frac{a\sqrt{n^2 - \sin i^2}}{\sin i\left(\sqrt{n^2 - \sin i^2} - \cos i\right)} \approx 4.5 \text{ см}.$$

Ответ: $l = \dfrac{a\sqrt{n^2 - \sin i^2}}{\sin i\left(\sqrt{n^2 - \sin i^2} - \cos i\right)} \approx 4.5$ см.

Задача №9 Луч света падает из воздуха на поверхность жидкости под углом $\alpha_1 = 40°$ и преломляется под углом $\beta_1 = 24°$. При каком угле падения луча угол преломления будет $\beta_2 = 20°$?

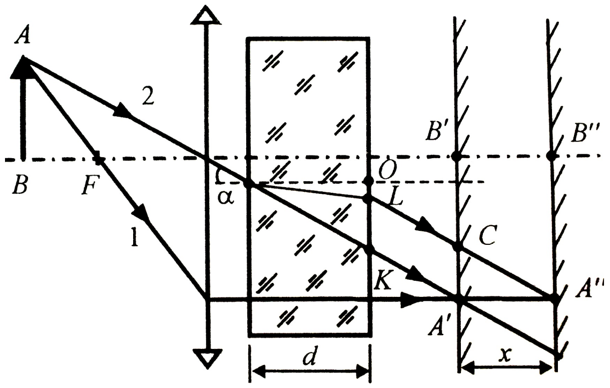
Решение $\mapsto$ Из закона Снелла для двух лучей, падающих на поверхность жидкости под углами α_1 и α_2, справедливо равенство: $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}$, где β_1 и β_2 — углы преломления лучей.

Отсюда $\alpha_2 = \arcsin(\dfrac{\sin\alpha_1\sin\beta_2}{\sin\beta_1}) \approx 33°$.

Ответ: $\alpha_2 = \arcsin(\dfrac{\sin\alpha_1\sin\beta_2}{\sin\beta_1}) \approx 33°$.

Задача №10 Собирающая линза даёт изображение предмета на экране. Между линзой и экраном параллельно плоскости линзы установлена стеклянная плоскопараллельная пластинка толщиной $d = 4$ см с показателем преломления $n = 1.4$. Как надо переместить экран, чтобы вновь получить отчётливое изображение предмета? Считать углы падения малыми.

Решение $\mapsto$ Построим ход лучей в системе до и после помещения стеклянной пластинки между линзой и экраном (см. рис.). Луч 1, проходящий через фокус линзы, после преломления в линзе пойдёт параллельно главной оптической оси и, следовательно, перпендикулярно поверхности пластинки, поэтому преломляться ею не будет. Луч 2, являясь центральным, упадёт на поверхность пластинки под некоторым углом α и испытывает преломление на обеих поверхностях пластинок. Выйдя из пластинки лучи 1 и 2 определяют положение точки A' и, следовательно, изображения $A'B'$ предмета AB, а при наличии пластинки положение точки A'' и, следовательно, изображения $A''B''$.



Из рисунка следует, что расстояние X, на которое необходимо переместить экран, равно

$X = B'B'' = \dfrac{A'C}{\operatorname{tg}\alpha}$, где $A'C = OK - OL = d(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$, β — угол преломления луча 2 в пластинке.

Следовательно, $X = \dfrac{d(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)}{\operatorname{tg}\alpha} = d\left(1 - \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$.

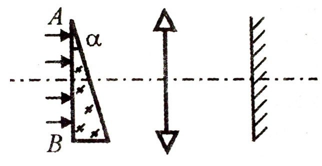
По условию задачи углы падения малы, поэтому справедливы соотношения: $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$ и $\sin\beta \approx \operatorname{tg}\beta$. Учитывая также закон преломления $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{n_{стек}}{n_{возд}}$ и полагая $n_{возд} = 1$, находим

$X \approx d\dfrac{(n-1)}{n} \approx 1.14$ см.

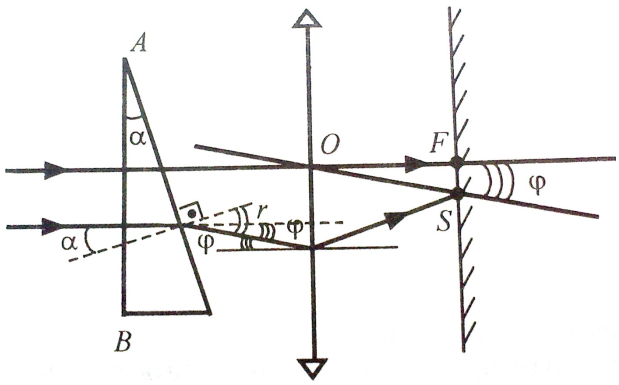
Следовательно, экран необходимо отодвинуть от пластинки на расстояние $X = 1.14$ см.

Ответ: $X = 1.14$ см.

Задача №11 На клин с углом раствора $\alpha = 1°$ и показателем преломления $n = 1.5$ нормально к его грани AB падает параллельный пучок света. За клином расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 180$ см. Грань AB перпендикулярна главной оптической оси линзы. В фокальной плоскости линзы находится экран. На сколько сместится светлая точка на экране, если клин убрать?



Решение $\mapsto$ После прохождения света через клин, пучок сохраняет параллельность, но отклоняется на некоторый угол φ вследствие преломления. Величина этого угла может быть найдена из закона преломления света. На передней грани клина пучок не преломляется, так как он падает нормально к этой грани (угол падения $i = 0$). На заднюю грань клина пучок падает под углом α, а выходит из клина под углом φ к главной оптической оси линзы, равным (см. рисунок) $\varphi = r - \alpha$, где r находится из закона преломления, $\dfrac{\sin\alpha}{\sin r} = \dfrac{1}{n}$. Таким образом, $\varphi = \arcsin(n\sin\alpha) - \alpha$. Параллельный пучок света, падающий на собирающую линзу под углом φ к главной оптической оси, соберётся в точку в фокальной плоскости линзы, отстоящую от главной оптической оси на расстоянии $d = f \cdot \operatorname{tg}\varphi$.

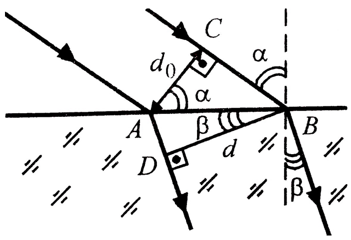


Принимая во внимание малость углов α и φ, получаем $d \approx f(n-1)\alpha \approx 1.5 \cdot 10^{-2}$ м.

Ответ: $d \approx f(n-1)\alpha \approx 1.5 \cdot 10^{-2}$ м.

Задача №12 Пучок параллельных световых лучей шириной $d_0 = 1.0$ см падает под углом $\alpha = 60^\circ$ из воздуха (показатель преломления равен 1) на плоскую поверхность толстой стеклянной пластинки. Определите показатель преломления стекла, если ширина пучка в пластинке $d = 1.6$ см.

Решение $\mapsto$ Из треугольников ACB и ABD (см. рисунок) следует $ABA = \dfrac{d_0}{\cos\alpha} = \dfrac{d}{\cos\beta} \Rightarrow$ $\cos\beta = \dfrac{d}{d_0}\cos\alpha \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{\sqrt{{d_0}^2 - d^2\cos\alpha^2}}{d_0}$.

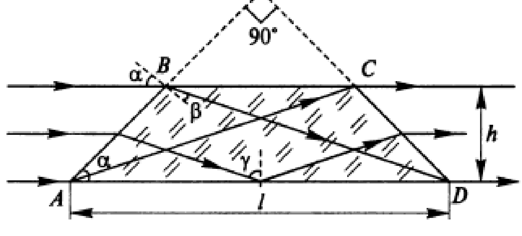


Полагая в уравнении закона Снелла $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{n_{cm}}{n_{вэд}}$, $n_{вэд} = 1$, получаем

$$n_{cm} = \frac{\sin\alpha \cdot d_0}{\sqrt{{d_0}^2 - d^2\cos\alpha^2}} = 1.44.$$

Ответ: $n_{cm} = \dfrac{\sin\alpha \cdot d_0}{\sqrt{{d_0}^2 - d^2\cos\alpha^2}} = 1.44.$

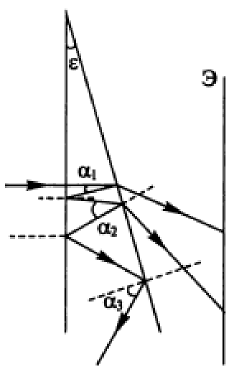
Задача №13 Для обращения (переворачивания) изображения часто используют так называемую призму Дове (см. рис.), представляющую собой усеченную прямоугольную равнобедренную призму. Найди длину l основания призмы, которая должна обращать пучок света максимального сечения, если её высота $h = 2.11$ см, а показатель преломления стекла $n = 1.41$.



Решение $\mapsto$ Сечение пучка будет максимальным, если один крайний луч, идущий из верхней точки B, попадёт в нижнюю точку D, а второй уже после отражения от нижней грани из точки A идёт в точку C. На нижней грани, чтобы свет не выходил из призмы, угол падения γ должен быть больше угла полного внутреннего отражения $\sin\alpha_{кр} = \dfrac{1}{n} = 0.7092$. Имея тригонометрические таблицы, можно провести расчёты с большей точностью. Можно использовать, что заданная величина n близка к $\sqrt{2}$. Из законов Снелла будем иметь $\beta = 30°, (\alpha - \beta) = 15°$. Считая этот угол малым, находим $\operatorname{tg} 15° = 15/57,3 = 0.26$. Отсюда $l = h(1 + 1/\operatorname{tg} 15°) \approx 10$см.

Ответ: $l = h(1 + 1/\operatorname{tg} 15°) \approx 10$см.

Задача №14 При многократном отражении луча внутри призмы из-за увеличения угла отражения наступает полное внутреннее отражение. Найдем количество светлых пятен на экране за стеклянным клином ($n = 1.41$, $\varepsilon = 10°$), если на него, как показано на рисунке, падает тонкий луч света.



Решение $\mapsto$ Из рисунка получаем $\alpha_{кр} = 45°$. При первом падении угол $\alpha_1 = 10°$, при втором $\alpha_2 = 30°$, при третьем $\alpha_3 = 50°$. Это больше критического $\alpha_3 > \alpha_{кр}$, и поэтому луч не выходит из клина.

Ответ: три.

Литература

[1] В. И. Лукашик, Физическая олимпиада, 1987 год.

[2] Учебное издание: Варламов С. Д., Зинковский В. И., Семёнов М. В., Старокуров Ю. В., Шведов О. Ю., Якута А. А. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005.

[3] Методическое пособие для поступающих в вузы/ МФТИ, 2008 год.

[4] В. Горшковский, Польсике физические олимпиады, 1982 год.

[5] И.Ш. Слободецкий, В.А. Орлов, Всесоюзные олимпиады по физике, 1982 год.

[6] Лекции по спектроскопии, ФИАН.

[7] Г. И. Цуканова, лекции по прикладной оптике, СПБГУ.