Решения по физике
8 класс

№1

Задача: Для определения плотности жидкостей используют торсионные весы, отличающиеся от обычных аналитических весов тем, что на одном из их плеч висит небольшой стеклянный шарик весом $\mathrm{F}_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ Н. Если этот шарик опустить в воду, показание весов будет равно $\mathrm{F}_2 = 0{,}8 \cdot 10^{-2}$ Н. Наконец, если шарик опустить в исследуемую жидкость, весы покажут $\mathrm{F}_3 = 1{,}04 \cdot 10^{-2}$ Н. Зная плотность воды $\rho_{\text{В}=}1000\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$,вычислить плотность ρ исследуемой жидкости.

Решение: Рассмотрим силы, действующие на шарик в разных сосудах:

$$\begin{cases} \mathrm{F}_1 = mg \\ F_2 = mg - \rho_{\text{в}} gV \\ F_3 = mg - \rho_{\text{иск}} gV \end{cases}$$

Найдем соотношение плотностей: $\frac{F_2 - F_1}{F_3 - F_1} = \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{иск}}}$

$$\rho_{\text{иск}} = \rho_{\text{в}} \frac{F_3 - F_1}{F_2 - F_1}$$

$$\rho_{\text{иск}} = 1000 \frac{1{,}04 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^{-2}}{0{,}8 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^{-2}} = 791{,}6 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

№2

Задача: До какой температуры надо нагреть алюминиевый куб, чтобы он, будучи положен на лед, полностью в него погрузился? Температура льда $0°\text{C}$, удельная теплоемкость алюминия $\text{c} = 836\ \frac{\text{Дж}}{(\text{кг}\cdot\text{К})}$, плотность льда $\rho_1 = 9{,}2 \cdot 10^2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность алюминия $\rho_2 = 2{,}7 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$. Теплопотерями пренебречь.

Решение: Если количество теплоты, которое выделит алюминиевый куб при охлаждении до $0°\text{C}$ будет равно количеству теплоты, которое необходимо для того чтобы расплавить лед в объеме алюминиевого куба, то он полностью погрузится в лед. Следовательно, $\rho_2 Vc(t_1 - t_0) = \rho_1 \mathrm{V}\lambda$, где t_1 – температура, до которой нужно нагреть куб; t_0 – температура плавления льда; V – объем куба.

Отсюда $t_1 = \frac{\rho_1 \lambda}{\rho_2 c} + t_0$. $t_1 = \frac{9{,}2 \cdot 10^2 \cdot 3{,}3 \cdot 10^5}{2{,}7 \cdot 10^3 \cdot 836} = 134°\text{C}$

№3

Задача: Путешественник треть всего пути ехал на велосипеде со скоростью $v_1 = 9\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, треть всего времени шел со скоростью $v_2 = 4\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а оставшуюся часть бежал со скоростью, равной средней скорости на всем пути. Найдите скорость на третьем отрезке пути.

Решение: Обозначим весь путь S, все затраченное на дорогу время t, среднюю скорость на всем пути v. Так как скорость на третьей части равна средней скорости на всем пути, то средняя скорость на первых двух участках равна средней скорости на всем пути.

$$v = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2}$$

$$S_1 = \frac{S}{3} = v\frac{t}{3}; S_2 = 4\frac{t}{3}; t_1 = \frac{S}{3 \cdot 9} = \frac{vt}{27}; t_2 = \frac{t}{3}$$

$$v = \frac{v\frac{t}{3} + 4\frac{t}{3}}{\frac{vt}{27} + \frac{t}{3}} = \frac{\frac{t}{3}(v+4)}{\frac{t}{27}(v+9)} = 9\frac{(v+4)}{(v+9)}\ ;\ 9v + 36 = v^2 + 9v; v^2 = 36; v = 6$$

$$v_3 = v = 6\ ^{\text{км}}/_{\text{ч}}$$

№4

Задача: Дистиллированную воду можно охладить до температуры –10ºС, и она не замерзает. Но если в эту переохлажденную воду бросить кристаллик льда, то она сразу же начинает замерзать. Какая часть воды замерзнет? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 335 \cdot 10^3\ ^{\text{Дж}}/_{\text{кг}}$, теплоемкость воды $c = 4200\ ^{\text{Дж}}/_{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}}$Потерями теплоты пренебречь.

Решение: Обозначим массу всей воды за m, а массу образовавшегося льда за m_1. Рассмотрим уравнение теплового баланса: $\lambda m_1 = c(m - m_1)(t_1 - t_0)$

Найдем отношение масс: $\frac{m_1}{m} = \frac{c(t_1 - t_0)}{\lambda + c(t_1 - t_0)}$

$$\frac{m_1}{m} = \frac{4200 \cdot 10}{335 \cdot 10^3 + 4200 \cdot 10} = 0{,}11 = 11\%$$

№5

Задача: Пароход, войдя в гавань, выгрузил часть груза. При этом его осадка уменьшилась на 0,6 м. Сколько груза оставил пароход в гавани, если площадь сечения парохода на уровне ватерлинии 5400 м^2.

Решение: Запишем второй закон Ньютона до того как пароход выгрузил груз и после.

$$\begin{cases}(M+m)g = \rho Shg \\ Mg = \rho S(h-h_1)g\end{cases}$$

$$mg = \rho Shg - \rho S(h-h_1)g \Rightarrow mg = \rho S h_1 g$$

$$m = 1000 \cdot 5400 \cdot 0.6 = 3240000 \text{ кг} = 3240 \text{ т}.$$

№6

Задача: Однородная катушка массой M висит на невесомой нити. намотанной по ее меньшему радиусу r. По большому радиусу R тоже намотана нить, на конце которой висит груз. Какова масса груза m, если система находится в равновесии?

Решение: Запишем условие равновесия относительно центра.

$mg(R-r) = MgR \ \Rightarrow m = \frac{Mr}{R-r}$.

9 класс

№7

Задача: Динамометр находится на гладкой поверхности стола. К одному его концу приложена сила $F_1 = 8$ Н, к другому - $F_2 = 5$ Н. Определить показания динамометра, если динамометр состоит из обоймы весом M, крюка массы m и пружины, которую считаем невесомой.

Решение: Со стороны пружины на обойму и крюк действуют силы $\vec{T}_2$ и $\vec{T}_1$, равные по модулю T. Значение T определяет показания динамометра. Согласно второму закону Ньютона,

$$Ma = T - F_2,$$

$$ma = F_1 - T$$

Следовательно, ускорение динамометра $a = \frac{F_1 - F_2}{M+m}$.

Динамометр будет показывать значение $T = \frac{MF_1 + mF_2}{M+m}$.

№8

Задача: Если к амперметру, рассчитанному на предельный ток силой $I_A = 10$ А, подсоединить шунт сопротивлением $R_{ш} = 1$ Ом, то цена деления амперметра увеличится в $N = 10$ раз. Какое добавочное сопротивление $R_{д.с.}$ следует подключить к этому амперметру, чтобы им можно было измерять напряжение до $U = 150$ В?

Решение: Через амперметр, как зашунтированный, так и с подключенным добавочным сопротивлением, может течь только то силой I_A, не более, иначе он «сгорит». Если этот амперметр с добавочным сопротивлением подключить к участку с напряжением U, чтобы это напряжение измерить, то ток силой I_A должен течь и по добавочному сопротивлению $R_{д.с.}$ (см. рис.). При этом согласно закону Ома общее сопротивление амперметра R_A и добавочного сопротивления $R_A + R_{д.с.} = \frac{U}{I_A}$, откуда $R_{д.с.} = \frac{U}{I_A} - R_A$. (1)

Таким образом, решение сводится к определению сопротивления амперметра R_A.

Поскольку цена деления амперметра с шунтом увеличилась в Nраз по сравнению с ценой деления амперметра без шунта, значит, этот амперметр смог измерять в N раз большую силу тока I по сравнению с силой тока I_A, которую он мог измерять без шунта, т.е. $N = \frac{I}{I_A}$.

Сопротивление шунта можно определить по формуле $R_{ш} = \frac{R_A}{N-1}$, откуда $R_A = R_{ш}(N-1)$. (2)

Подставим (2) в (1), и задача будет решена:

Произведем вычисления:

$$\boxed{R_{д.с.} = \frac{U}{I_A} - R_{ш}(N-1)}$$

$$R_{д.с.} = \left(\frac{150}{10} - 1(10-1)\right)\text{Ом} = 6\ \text{Ом}.$$

№9

Задача: Вольтметр сопротивлением $R_B = 10\ \text{Ом}$ имеет цену деления шкалы $U_ц = 0{,}1\ \text{В}$. Шкала вольтметра содержит $N = 150$ делений. Для расширения шкалы прибора к вольтметру последовательно подключают добавочное сопротивление $R_{д.с.}$ (см. рис.). Какой длины l должен быть проводник с сопротивлением $R_{д.с.}$, чтобы вольтметр мог измерять напряжения до $U = 200\ \text{В}$? Проводник стальной, площадь его поперечного сечения $S = 0{,}5\ \text{мм}^2$. Удельное сопротивление стали $\rho = 1 \cdot 10^{-7}\text{Ом} \cdot \text{м}$.

Решение: Чтобы можно было измерять вольтметром напряжения, большие, чем те, на которые он рассчитан, и прибор при этом не сгорел, к вольтметру последовательно подключают проводник, который называется добавочным сопротивлением $R_{д.с.}$. При этом часть измеряемого напряжения U «падает» на сам вольтметр, а часть – на добавочное сопротивление $R_{д.с.}$. Если вольтметра рассчитан на напряжение U_B, а с его помощью хотят измерить напряжение U, то на добавочное сопротивление «упадет» $U_{д.с.} = U - U_B$. Поскольку добавочное сопротивление $R_{д.с.}$ и вольтметр сопротивлением R_B соединены последовательно, то напряжения на них пропорциональны их сопротивлениям: $\frac{U_{д.с.}}{U_B} = \frac{R_{д.с.}}{R_B}$ или $\frac{U-U_B}{U_B} = \frac{R_{д.с.}}{R_B}$. (1)

Сопротивление проводника $R_{д.с.}$ связано с его длиной и сечением S соотношением $R_{д.с.} = \rho\frac{l}{S}$ (2), где ρ – удельное сопротивление проводника. Максимальное напряжение U_B, на которое рассчитан вольтметр без добавочного сопротивления, равно произведению его цены деления $U_ц$ и числа делений N шкалы прибора: $U_B = NU_ц$. (3)

Подставим (2) и (3) в (1): $\frac{U-NU_ц}{NU_ц} = \frac{\rho l}{R_B S}$ или $\frac{U}{NU_ц} - 1 = \frac{\rho l}{R_B S}$.

Отсюда определим искомую длину проводника добавочного сопротивления l, поскольку остальные величины нам известны:

$$\boxed{l = \frac{R_B S}{\rho}\left(\frac{U}{NU_{\text{ц}}} - 1\right)}$$

Переведем единицу площади поперечного сечения S в СИ: $0{,}01\ \text{мм}^2 = 1 \cdot\ 10^{-8}\ \text{м}^2$.

Подставим числа и произведем вычисления: $l = \frac{10\cdot 1\cdot 10^{-8}}{1\cdot 10^{-7}}\left(\frac{200}{150\cdot 0{,}1} - 1\right)\text{м} = 12{,}3\ \text{м}.$

№10

Задача: Кабель состоит из $N_1 = 2$ стальных жил с площадью поперечного сечения $S_1 = 0{,}4\ \text{мм}^2$ каждая и $N_2 = 4$ медных жил с площадью поперечного сечения $S_2 = 0{,}8\ \text{мм}^2$ каждая. Найти падение напряжения U на каждых $l = 2\ \text{км}$ кабеля при силе тока в нем $\mathrm{I} = 0{,}2\ \mathrm{A}$. Удельное сопротивление стали $\rho_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-7}\text{Ом} \cdot \text{м}$, удельное сопротивление меди меди $\rho_2 = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\text{Ом} \cdot \text{м}$.

Решение: Когда говорят о кабеле, сплетенном из разных жил одинаковой длины (или о сплаве), то подразумевают, что эти жилы соединены параллельно. При таком соединении напряжение U на кабеле равно произведению силы тока I в нем на его общее сопротивление $R_{\text{общ}}$: $U = IR_{\text{общ}}$. (1)

Таким образом, задача сводится к определению общего сопротивления кабеля. Обозначим общее сопротивление N_1 стальных жил $R_{\text{общ}1}$, а общее сопротивление N_2 медных жил $R_{\text{общ}2}$. Тогда, поскольку эти жилы соединены параллельно, общее сопротивление кабеля $R_{\text{общ}} = \frac{R_{\text{общ}1} R_{\text{общ}2}}{R_{\text{общ}1} + R_{\text{общ}2}}$

Где $R_{\text{общ}1} = \frac{R_1}{N_1}$ и $R_{\text{общ}2} = \frac{R_2}{N_2}$, ведь сопротивления R_1 всех стальных жил одинаковы, а также одинаковы сопротивления R_2 всех медных жил.

Тогда $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{N_1 N_2\left(\frac{R_1}{N_1} + \frac{R_2}{N_2}\right)} = \frac{R_1 R_2}{N_1 N_2\left(\frac{R_1 N_2 + R_2 N_1}{N_1 N_2}\right)} = \frac{R_1 R_2}{R_1 N_2 + R_2 N_1}$

Здесь $R_1 = \rho_1 \frac{l}{S_1}$ и $R_2 = \rho_2 \frac{l}{S_2}$. С учетом этого получим $R_{\text{общ}} = \frac{\rho_1 l \rho_2 l}{S_1 S_2\left(\rho_1 \frac{l}{S_1} N_2 + \rho_2 \frac{l}{S_2} N_1\right)} = \frac{\rho_1 \rho_2 l^2}{S_1 S_2 l \frac{\rho_1 N_2 S_2 + \rho_2 N_1 S_1}{S_1 S_2}} = \frac{\rho_1 \rho_2 l}{\rho_1 N_2 S_2 + \rho_2 N_1 S_1}$. (2)

Подставив (2) в (1), мы ответим на вопрос задачи:

$$\boxed{U = I\frac{\rho_1 \rho_2 l}{\rho_1 N_2 S_2 + \rho_2 N_1 S_1}}$$

Переведем в СИ единицы величин: $0{,}4\text{мм}^2 = 4 \cdot 10^{-7}\text{м}^2, 0{,}8\text{мм}^2 = 8 \cdot 10^{-7}\text{м}^2, 2 \text{ км} = 2 \cdot 10^3 \text{ м}.$

Произведем вычисления: $U = 0{,}2 \frac{1{,}2\cdot10^{-7}\cdot1{,}7\cdot10^{-8}\cdot2\cdot10^3}{1{,}2\cdot10^{-7}\cdot4\cdot8\cdot10^{-7}+1{,}7\cdot10^{-8}\cdot2\cdot4\cdot10^{-7}} \text{ В} = 0{,}16 \text{ В}$

№11

Задача: Имеется бассейн с водой объемом $V_B = 10 \text{ м}^3$ при температуре $t_B = 25°\text{C}$. В него всыпают раскаленные платиновые опилки общей массой $m_\Pi = 1 \text{ кг}$ и температурой $t_\Pi = 500°\text{C}$. Оцените, сколько испарилось воды. Удельная теплоемкость пластины $c_\Pi = 140 \text{ Дж}/_{\text{кг}} \cdot °\text{C}$, воды $c_\Pi = 4200 \text{ Дж}/_{\text{кг}} \cdot °\text{C}$, удельная теплота парообразования воды $\text{r}_B = 2{,}3 \cdot 10^6 \text{ Дж}/_{\text{кг}}$.

Решение: На вопрос задачи можно ответить, вычислив либо объем, либо массу воды. Подберем дополнительне данные. При обычных условиях вода кипит при температуре $t_0 = 100°\text{C}$. Найдем количество теплоты, которое было отдано опилками при остывании до температуры кипения воды. $Q_{\text{отд}} = c_\Pi m_\Pi (t_\Pi - t_0)$;

$$Q_{\text{отд}} = 140 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot °\text{C}} \cdot 1 \text{ кг } \cdot (600°\text{C} - 100°\text{C});$$

$$Q_{\text{отд}} = 70000 \text{ Дж}$$

Пренебрегая теплообменом с окружающей средой, предположим, что все тепло, отданное опилками, пошло на нагрев всей воды в бассейне и ее частичное испарение (идеализация явлений). Количество теплоты, которое необходимо для нагрева всей воды бассейна до $t_0 = 100°\text{C}$, можно рассчитать по формуле:

$$Q_{\text{пол}} = c_\text{В} m_\text{В} (t_0 - t_\text{В});$$

Массу воды в бассейне найдем, зная, что плотность воды равна $\rho_\text{В} = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$,
$m_\text{В} = \rho_\text{В} \cdot V = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10 \text{ м}^3 = 10^4 \text{ кг}.$

Тогда $Q_{\text{пол}} = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot °\text{C}} \cdot 10^4 \text{кг} \cdot (100°\text{C} - 25°\text{C})$,

$$Q_{\text{пол}} = 3150000000 \text{ Дж}.$$

Оказалось, что количество теплоты, которое могут отдать платиновые опилки при охлаждении, значительно меньше количества теплоты, необходимого для нагрева всей воды в бассейне до температуры, при которой начнется кипение. Однако известно, что если раскаленное тело поместить в воду, то часть воды непременно испарится. Для разрешения полученного противоречия еще раз уточним структуру модели, еще раз изучив условие задачи. Вспомним, что вода обладает плохой теплопроводностью, а платина – очень хорошей. Попробуем изменить модель задачной ситуации. Будем считать что нагревается и испаряется только та часть воды массой $\Delta m_{\text{В}}$, которая непосредественно контактирует с опилками. В этом случае:

$$Q_{\text{пол}} = c_{\text{В}}\Delta m_{\text{В}}(t_0 - t_{\text{В}}) + r\Delta m_{\text{В}};$$

Из уравнения теплового баланса $Q_{\text{отд}} = Q_{\text{пол}}$ получим:

$$\Delta m_{\text{В}} = \frac{c_{\text{П}} m_{\text{П}}(t_{\text{П}} - t_0)}{c_{\text{В}}(t_0 - t_{\text{В}}) + r}$$

$$\Delta m_{\text{В}} = \frac{70000 \text{ Дж}}{4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot (100^\circ\text{C} - 25^\circ\text{C}) + 2{,}3 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}}$$

$$\Delta m_{\text{В}} \approx 0{,}027 \text{ кг}.$$

№12

Задача: При хорошем освещении человеческий глаз может различать две частицы как отдельные, если угловое расстояние между ними не больше $1'$ (одной угловой минуты). Определите, каким должно быть минимальное расстояние между отметками на шкале линейки, чтобы человек различал их на расстоянии вытянутой руки $L = 70$ см.

Решение: Связь между линейным и угловым расстояниями можно изобразить на рисунке. Учитывая геометрические соотношения, можно записать, что $D = 2Lsin\frac{\alpha}{2}$. Так как угол α мал, то $sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ (если величина угла выражена в радианах). Учитывая, что 2π радиан $= 360^\circ = 360 \cdot 60'$, получим что $D = L\frac{\alpha' \cdot 2\pi}{360 \cdot 60'} \approx 0{,}2$ мм. Значит цену деления шкалы измерительной линейки можно сделать в 5 раз меньше одного миллиметра. Учитывая, что данное значение справедливо лишь при хорошей освещенности, при меньшей освещенности предел углового разрешения глаза уменьшается. Поэтому расстояние в 1 мм можно считать оптимальным для практического использования измерительной линейки.

10 класс

№13

Задача: Тормозной путь некоторого тела, движущегося по шероховатой поверхности, оказался равен 60 м. Найти скорость тела перед началом движения. Коэффициента трения известен и равен 0,5.

Решение: Закон сохранения энергии: вся исходная кинетическая энергия идет на работу сил трения. $\frac{mv^2}{2} = \mu mgS \;\Rightarrow v = \sqrt{2\mu gS} = 10\sqrt{6}\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}}$.

№14

Задача: Автомобиль движется из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно $\mathrm{S} = 45$ км. Первый отрезок своего пути он двигался со скоростью, равной половине средней скорости всего движения, а затем со скоростью, равной удвоенной средней скорости всего движения. Определить длину первого отрезка пути.

Решение: Обозначим среднюю скорость v. Тогда по определению средней скорости имеем $S = vt$, где t – время всего движения. Кроме того, $S = \frac{v}{2}\tilde{t} + 2v(t - \tilde{t})$, где $\tilde{t}$ – время, за которое он прошел первый отрезок пути. Приравняв S, получаем $S = vt = \frac{3}{2}v\tilde{t}$, откуда длина первой части пути $\tilde{S} = \frac{1}{3}S = 15$ км.

№15

Задача: Про некоторое газообразное вещество, молекула которого состоит только из атомов углерода и атомов водорода известно, что при атмосферном давлении и температуре $\mathrm{t} = 27℃$ 0,65 г этого вещества занимает 1 литр. Определить вещество. Атомные веса: $\mu_{\mathrm{C}} = 12, \mu_{\mathrm{H}} = 1$.

Решение: Пусть вещество имеет молекулярную массу μ. Из уравнения Менделеева-Клайперона $\mu = \frac{mRT}{PV} = 16 \cdot 10^{-3}\ {}^{\text{кг}}/_{\text{моль}}$, значит, молекула такого вещества либо состоит из 16 атомов водорода, что невозможно, либо из 1 атома углерода и 4 атомов водорода ⇒ это вещество – метан $\mathrm{CH_4}$.

№16

Задача: Точечный источник света движется около зеркала так, что в наблюдаемый момент его скорости относительно изображения и относительно зеркала равны. Найти угол, под которым в этот момент движется источник.

Решение: Разложим скорость v на две составляющих: параллельно зеркалу v_x и перпендикулярно ему v_y. Тогда скорость относительно изображения равна $2v_y$, а скорость относительно зеркала $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Получаем $v_x = \sqrt{3} v_y$, откуда $\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30°$.

№17

Задача: Цилиндрический запаянный сосуд разделен тонкой подвижной перегородкой на 2 части. В обе половины помещен идеальный газ. Когда сосуд лежит боковой поверхностью на плоскости, поршень находится ровно на середине сосуда, а давление в обеих частях одинаково и равно P_0. Найти смещение положения поршня x после того, как сосуд медленно переместили в вертикальное положение. Площадь поперечного сечения S, длина $2\mathrm{L}$, а температура поддерживается все время постоянной.

Решение: Сначала у идеальных газов одинаковы давления, объемы и температуры $\Rightarrow$ одинаковы и их количества. После перемещения сосуда у верхнего газа давление станет $P_0 - mgS$, а у нижнего $P_0 + mgS$. Температуры совпадают $\Longrightarrow (P_0 - mgS)(SL + Sx) = (P_0 + mgS)(SL - SX)$. Получаем отсюда ответ $x = \frac{mgSL}{P_0}$.

№18

Задача: Стержень, один конец которого закреплен сферическим шарниром, погружается другим концом в воду. Если расстояние от точки закрепления до поверхности меньше половины длины стержня, то под водой оказывается его половина. Найти плотность материала, из которого он изготовлен. Стержень считать однородным.

Решение: Уравнение моментов относительно точки закрепления дает $mg\frac{l}{2}\sin(\alpha) = F_{\text{Арх}}\frac{3l}{4}\sin(\alpha)$, где α – угол стержня с вертикалью. Для силы Архимеда имеем $F_{\text{Арх}} = \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ст}}}\rho_{\text{ст}}V_{\text{погр}} = \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ст}}}\frac{m}{2}g$. Тогда из равенства моментов $3\rho_{\text{ж}} = \rho_{\text{ст}}$.

№19

Задача Точечный источник и два его изображения в зеркалах, соединенных в двугранный угол, образуют равнобедренный треугольник с углом при основании $75°$. Найти угол между зеркалами.

Решение: Первая конфигурация – боковые стороны равнобедренного треугольника соединяют источник и его изображения. Вторая – боковые стороны равнобедренного треугольника – одна соединяет изображения, а другая – источник и одно из изображений. В первом случае угол между направлениями от источника к изображениям равен $30°$, а во втором - 75. Угол между зеркалами дополняет угол между направлениями от источника к изображениям до $180°$, так как эти углы имеют попарно перпендикулярные стороны. Поучаем 2 возможных угла: $150°$ или $105°$.

11 класс

№20

Задача: Найти плотность материала кубика, если известно, что минимальная работа, которую нужно совершить, чтобы полностью погрузить такой кубик в воду (изначально кубик плавал в воде), равна A. Длина стороны куба h.

Решение: Пусть плавающий кубик погружен в воду на $\tilde{x}$. Тогда $\rho_ж g\tilde{x}S = mg = \rho gSh$, откуда $\rho_ж\tilde{x} = \rho h$. Силу, действующую на кубик, находим из $F + mg = \rho_ж gxS \Rightarrow F = gS(\rho_ж x - \rho h)$. Сила линейно меняется от нуля (при $x = \tilde{x}$) до максимального значения при $x = h$. Работа есть площадь под графиком $F(x)$, а в данном случае – это площадь прямоугольного треугольника с катетами $h - \tilde{x}$ и $F(h)$, откуда $A = \frac{1}{2}F(h)(h - \tilde{x})$. Получаем, с учетом $\rho_ж\tilde{x} = \rho h$, $2A = gS(\rho_ж - \rho)h\left(h - \frac{\rho}{\rho_ж}h\right) \Rightarrow \frac{2A}{gSh^2} = (\rho_ж - \rho)^2 \Rightarrow \rho = \rho_ж - \sqrt{\frac{2A}{gSh^2}}$.

№21

Задача: Точка движется с постоянной по модулю скоростью по радиусу вращающейся с постоянной угловой скоростью окружности. Если бы окружность не вращалась, ускорение точки было бы равно a_1. Если бы точка не двигалась относительно окружности, ее ускорение было бы a_2. Найти ускорение движущейся точки при движущейся окружности.

Решение: В двух данных случаях ускорение точки центростремительное, а радиус один и тот же – радиус окружности. Получаем тогда $a_1 = \frac{v_т^2}{R}, a_2 = \frac{v_{окр}^2}{R}$, откуда $v_т = \sqrt{a_1R}, v_{окр} = \sqrt{a_2R}$. Когда движутся и точка и окружность $v_т = \frac{(v_т+v_{окр})^2}{R} = (\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2$

№22

Задача: Найти среднюю кинетическую энергию молекул гелия, если известно, что изменение среднеквадратичной скорости при малом увеличении температуры (на 1 градус) составляет одну четверть процента. Указание: Для соотношения $y = f(x)$ допустимо приближенное использование $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$.

Решение: Обозначим среднеквадратическую скорость v. Тогда $v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, откуда $\Delta v \approx \sqrt{\frac{3R}{\mu}}\frac{\Delta T}{2\sqrt{T}}$. Дано относительное изменение среднеквадратичной скорости $\frac{\Delta v}{v}$, выражая отношение этого изменения к изменению температуры, получаем: $\frac{\Delta v}{v\Delta T} = \frac{1}{2T}$. Остается заметить, что $E = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{4}k\frac{\Delta T}{\Delta v/_v}$.

№23

Задача: В сосуде находится водяной пар при температуре 373 К. Найти его количество, если при изотермическом сжатии в 3 раза давление выросло вдвое. Начальный объем сосуда 3 литра.

Решение: Предположим, что при сжатии ничего не сконденсировалось. Тогда при неизменной температуре, по закону Бойля-Мариотта давление должно было возрасти в три раза, а увеличилось только вдвое. Значит часть пара сконденсировалась и удвоенное давление равно давлению насыщенных паров при $100°C$. Значит, исходное давление равно половине давления насыщенных паров при $100°C$. Тогда определяем $\nu = \frac{3V^{P_{нас}}/_2}{RT}$.

№24

Задача: Рассмотрим две проволоки из одного материала, но различного поперечного сечения (d_1 и d_2). Известно, что при параллельном включении этих проволок теплоотдача (пропорциональная площади поверхности) одинакова. Определить отношение длин этих проволок.

Решение: Пусть длины l_1 и l_2. Сопротивления пропорциональны (с одним и тем же коэффицентом, так как совпадает материал)$\frac{l}{d^2}$. Теплоотдача пропорциональна ld и пропорциональна $Q = \frac{U^2}{R}t$, откуда получаем: $\frac{l_1 d_1}{l_2 d_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{l_2 {d_1}^2}{l_1 {d_2}^2}$, откуда $\frac{l_2}{l_1} = \sqrt{\frac{d_2}{d_1}}$.

№25

Задача: Снаряд, подброшенный вертикально вверх с начальной скоростью v_0 разорвался в полете на две равные части в тот момент, когда его скорость в первый раз стала нулевой. Первый осколок достиг земли в точке, где был выпущен снаряд, причем его скорость перед падением была равна $2v_0$. Найти, через какое время после падения первого осколка упадет второй осколок.

Решение: Первый раз скорость снаряда стала нулевой в точке максимального подъема, то есть на высоте $h = \frac{v_0^2}{2g}$. Затем снаряд распался на 2 равные части, по закону сохранения импульса эти части имели одинаковые по модулю и противоположные по направлению скорости v_1. Найдем v_1: перед падением скорость была $2v_0$, откуда $t = \frac{2v_0 - v_1}{g}$ и тогда из условия $h = \frac{v_0^2}{2g} = v_1 t + \frac{gt^2}{2}$ получим $3v_0^2 = v_1^2$. От момента разрыва первый осколок падал $t_1 = \frac{2v_0 - v_1}{g} = \frac{(2-\sqrt{3})v_0}{g}$. Второй осколок сначала поднимался на высоту $h + \tilde{h} = h + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{4v_0^2}{2g}$, затратив на это время $\frac{v_1}{g}$, а затем падал с нее $t = \sqrt{\frac{2(h+\tilde{h})}{g}} = \frac{2v_0}{g}$, откуда суммарное время полета второго осколка от разрыва до падения на землю равно $t_2 = \frac{(2+\sqrt{3})v_0}{g}$. Значит второй осколок упал через $\frac{2\sqrt{3}v_0}{g}$ после первого.

Решения по математике
5-7 класс

№1

Замените буквы A, B, C и D цифрами так, чтобы получилось верное равенство:

$AAAA + BBB + CC - D = 2015$.

Ответ. $1111 + 888 + 22 - 6 = 2015$.

№2

Задача: По кольцевой линии в одном направлении курсируют с одинаковой скоростью и равными интервалами 60 трамваев. Сколько трамваев нужно добавить, чтобы при той же скорости интервалы между трамваями уменьшились на одну пятую?

Ответ. 15.

Решение.

Длина интервала обратно пропорциональна числу трамваев. Значит, их должно стать $60 \cdot \frac{5}{4} = 75$. То есть нужно добавить 15 трамваев.

№3

Задача: Укажите наименьшее натуральное число N такое, что при вычеркивании цифр числа N можно получить числа, произведение цифр которых равны 12, 14, 16, 18, 20. Доказывать, что число наименьшее, не требуется.

Ответ. 2233457.

№4

Задача: У продавца есть чашечные весы. Помогите продавцу придумать набор из 4 гирь, с помощью которых он сможет взвешивать на этих весах любое целое число килограммов от 1 до 12. При каждом взвешивании можно использовать не более двух гирь; гири можно ставить на разные чашки весов.

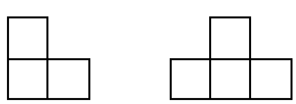
Решение.

Подойдет, например, такой набор гирь: 1 кг, 2 кг, 5 кг и 10 кг. В таблице показано, как ставить гири на чашки весов. (Предполагается, что взвешиваемый товар находится на левой чашке весов.)

Масса товара	Левая чашка	Правая чашка
1		1
2		2
3		$1+2$
4	1	5
5		5
6		$5+1$
7		$5+2$
8	2	10
9	1	10
10		10
11		$10+1$
12		$10+2$

№5

Задача: Составьте какой-нибудь квадрат из трехклеточных уголков и четырехклеточных букв «Т» (см. рис.) так, чтобы каждая фигурка граничила (имела общий отрезок) с фигурками обоих типов.

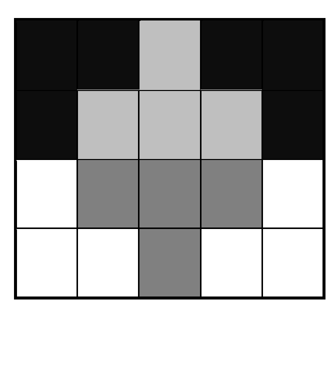


Решение.

Из фигурок можно составить прямоугольник 4×5 клеток, как показано на рисунке.

В таком прямоугольнике каждая фигурка граничит с фигурками обоих типов.

А из этих прямоугольников можно составить квадрат 20×20 клеток.



8-9 класс

№6

Задача: Три ученика *A, B* и *C* участвовали в беге на 100 м. Когда *A* прибежал на финиш, *B* был позади него на 10 м, также, когда *B* финишировал, *C* был позади него на 10 м. На сколько метров на финише *A* опередил *C*?

Ответ. На 19 метров.

Решение.

Скорость *B* составляет 0.9 от скорости *A*, а скорость *C* составляет 0.9 от скорости *B*, т.е. 0.81 от скорости *A.*

№7

Задача: Укажите наименьшее натуральное число *N* такое, что при вычеркивании цифр числа *N* можно получить числа, произведение цифр которых равны 16, 20, 24, 28, 32, 36. Доказывать, что число наименьшее, не требуется.

Ответ. 2233578.

№8

Задача: В выпуклом четырехугольнике *ABCD* серединные перпендикуляры к сторонам *AB*, *BC* и *CD* не пересекаются внутри этого четырехугольника и пересекают сторону *AD* соответственно в точках *P*, *Q*, *R*. Известно, что $AP = PQ = QR = RD$. Докажите, что *ABCD* – трапеция.

Решение.
Из условия вытекает, что точка *P* равноудалена от *A* и *B*, а точка *R* равноудалена от *C* и *D*. Отсюда $BP=AP=PQ=QR=DR=CR$. Точка *Q* равноудалена от *B* и *C*, т.е. $BQ=QC$, и треугольники *BPQ* и *CRQ* равны, откуда $\angle BQP = \angle CQR$.
Пусть *K* – середина *BC*. Из равенства треугольников *BKQ* и *CKQ* следует, что $\angle BQK=\angle CQK$. Отсюда углы *KQP* и *KQR* равны, и так как их сумма равна 180°, то они равны по 90°. Итак, $KQ\perp PR$, и $BC \parallel PR$. То есть $BC \parallel AD$. Значит, *ABCD* – трапеция.

Замечание. Решение упростится, если заметить, что высоты равных треугольников *BPQ* и *CRQ* равны.

№9

Задача: Различные действительные числа a, b, c таковы, что $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$. Какие значения может принимать выражение $a+b+c$?

Ответ. 1.

Решение.

После тождественных преобразований получаем равенство $(c-b)(a-c)(b-a)(a+b+c)=(c-b)(a-c)(b-a)$. Так как числа a, b, c различны, то $(c-b)(a-c)(b-a)\neq 0$. Поделив на это выражение обе части равенства, получим, что $a+b+c=1$.

№10

Задача: Можно ли закрасить каждую клетку 1×1 квадрата 1000×1000 в один из трех цветов: красный, синий и зеленый так, чтобы у каждой красной клетки были две соседние синие клетки, у каждой синей клетки – две соседние зеленые клетки, у каждой зеленой клетки – две соседние красные клетки? Клетки являются соседними, если они имеют общую сторону.

Ответ. Нельзя.

Решение.

Пусть такая раскраска существует, и левая верхняя клетка – красная. Тогда две соседние с ней клетки синие (см. рис.). Но тогда три следующие клетки, образующие диагональ, – зеленые. Следующая диагональ состоит из красных клеток и т.д. Но тогда оба соседа красной клетки, стоящей в противоположном углу, – зеленые. Противоречие.

k	s	z	k	
s	z	k		
z	k			
k				

10-11 класс

№11

Задача: Можно ли расположить по кругу числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 так, чтобы сумма любых трех последовательных чисел была не более 13?
Ответ. Нельзя.
Решение.

Рассмотрим число 0, а оставшиеся 9 чисел разобьем на три тройки последовательных чисел. Если бы в каждой тройки сумма чисел была не более 13, то сумма всех чисел была бы не более $3 \cdot 13 = 39$. Но сумма всех чисел равна 45 – противоречие.

№12

Задача: Найдите наименьшее натуральное число n такое, что среди чисел от n до $n+2015$ нет ни одного точного квадрата (квадрата целого числа).

Ответ. $n = 1008^2 + 1$.

Решение.

Из минимальности следует, что $n-1 = m^2$ и, по условию, $n+2015 < (m+1)^2$. Значит, $2016 < (m+1)^2 - m^2 = 2m+1$. Откуда $m \geq 1008$. Осталось заметить, что $n = 1008^2 + 1$ подходит.

№13

Задача: При каких значениях параметра *a* один из корней уравнения $(a^2+a+1)x^2+(2a-3)x+(a-5)=0$ больше 1, а другой – меньше 1?

Ответ. $a \in (-2-\sqrt{11}; -2+\sqrt{11})$.

Решение.

Так как коэффициент при x^2 положителен при любом значении параметра *a*, то условие задачи равносильно тому, что указанная функция в точке *x* = 1 принимает отрицательное значение. Отсюда $a \in (-2-\sqrt{11}; -2+\sqrt{11})$.

№14

Задача: Найдите углы α, β, γ треугольника *ABC*, если известно, что для них выполняются соотношения: $\sin\alpha + \sin\beta\sin\gamma = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}$, $\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ответ. $30°, 30°, 120°$.

Решение.

Вычитая из первого равенства второе, получаем: $\sin\alpha - \cos\alpha - \cos(\beta+\gamma) = \frac{1}{2}$, то есть $\sin\alpha - \cos\alpha - \cos(\pi - \alpha) = \sin\alpha = \frac{1}{2}$. Возможны два случая:

1) $\alpha = 30°$. Тогда $\sin\beta\sin\gamma = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $\cos\beta\cos\gamma = -\frac{\sqrt{3}}{4}$. Откуда $\cos(\beta-\gamma) = 0$, то есть $\beta - \gamma = \pm 90°$. Но $\beta + \gamma = 150°$. Значит $\{\beta, \gamma\} = \{30°, 120°\}$

2) $\alpha = 150°$. Тогда $\cos\beta\cos\gamma = \frac{3\sqrt{3}}{4} > 1$, что невозможно.

№15

Задача: В прямоугольном треугольнике *ABC* ($\angle C = 90°$) проведена высота *CD*. Окружность с диаметром *CD* пересекает стороны *AC* и *BC* в точках *E* и *F*. Пусть *G* – точка пересечения прямых *CD* и *EF*. Найдите углы треугольника *ABC*, если $CG^2 = CE \cdot CF$.

Ответ. $15°$, $75°$, $90°$.
Решение.

Из того, что $\angle ECF = 90°$, следует, что EF – диаметр окружности и $CG = \frac{1}{2}CD$. Пусть $\alpha = \angle A$, тогда $\angle ACD = 90° - \alpha \Rightarrow CE = CD \cdot \cos(90° - \alpha) = CD\sin\alpha$. Аналогично, $\angle B = 90° - \alpha \Rightarrow \angle BCD = \alpha \Rightarrow CF = CD\cos\alpha$. Из данного в условии соотношения получаем: $\frac{1}{4}CD^2 = CD^2\cos\alpha \cdot \sin\alpha$, т.е. $\frac{1}{2} = \sin 2\alpha$, $2\alpha = 30°$.