МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ» ПО МАТЕМАТИКЕ 2013

БИЛЕТ 1 ШИФР ______________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{\left(3^{x-1}\right)}\left(x^2-11x+19\right)+\log_{\left(27^{x-1}\right)}\left(x^3\right)=\frac{2}{x-1}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{|x+1|-2}}\le\frac{1}{9+x}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{3+4\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\sqrt{3}}+3\cos x.$$

4. Число 72350 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 72350723507235072350723507235072350. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

5. В параллелограмме $ABCD$ угол ADC равен $\arcsin\frac{\sqrt{24}}{5}$. Окружность Ω, проходящая через точки A, C и D, пересекает стороны AB и BC в точках N и L соответственно, причём $AN=11$, $BL=6$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases}\left(x^2-xy+y^2\right)\left(x^2-36\right)\ge 0,\\ |x-2+y|+|x-2-y|\le a\,?\end{cases}$$

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC=2\sqrt{3}$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω – сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что $\angle SAB=\arccos\frac{1}{4}$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

8. Дан правильный 18-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 40°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ» ПО МАТЕМАТИКЕ 2013

БИЛЕТ 2 ШИФР ________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{\left(5^x\right)}\left(x^2+9x+15\right)+\log_{\left(125^x\right)}\left(x^3\right)=\frac{2}{x}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{|x-3|-1}}\leq\frac{1}{6-x}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{1+7\sin^2 x}=2\cos x-\sqrt{3}\sin x.$$

4. Число 84605 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 84605846058460584605846058460584605. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

5. В параллелограмме $ABCD$ угол BCD равен $\operatorname{arctg}\sqrt{15}$. Окружность Ω, проходящая через точки B, C и D, пересекает стороны AB и AD в точках T и E соответственно, причём $BT=10$, $AE=7$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases}\left(x^2-xy+3y^2\right)\left(y^2-25\right)\geq 0,\\ |x+2+y|+|y+2-x|\leq a?\end{cases}$$

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC=4$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω – сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что угол между гранями SAB и ABC равен $\operatorname{arctg}2$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

8. Дан правильный 24-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 45°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ» ПО МАТЕМАТИКЕ 2013

БИЛЕТ 3 ШИФР ________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{\left(2^x\right)}\left(x^2-6x-15\right)+\log_{\left(8^x\right)}\left(x^3\right)=\frac{3}{x}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{|x+2|-1}}\le\frac{1}{5+x}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{6+\frac{22}{3}\sin^2 x}=3\cos x+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x.$$

4. Число 94850 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 94850948509485094850948509485094850. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

5. В параллелограмме $ABCD$ угол ABC равен $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}$. Окружность Ω, проходящая через точки A, B и C, пересекает стороны AD и CD в точках P и M соответственно, причём $AP=3$, $CM=6$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases}\left(2x^2+3xy+2y^2\right)\left(49-x^2\right)\le 0,\\ |x+3+y|+|x+3-y|\le a?\end{cases}$$

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC=2$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω – сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что $\angle SAB=\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

8. Дан правильный 30-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 30°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ» ПО МАТЕМАТИКЕ 2013

БИЛЕТ 4 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{\left(5^{x-1}\right)}\left(x^2-7x+11\right)+\log_{\left(125^{x-1}\right)}\left(x^3\right)=\frac{1}{x-1}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{|x+3|-2}}\le\frac{1}{7+x}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{3+\frac{25}{2}\sin^2 x}=\sqrt{6}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x.$$

4. Число 83105 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 83105831058310583105831058310583105. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

5. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен $\operatorname{arctg}\sqrt{15}$. Окружность Ω, проходящая через точки A, B и D, пересекает стороны BC и CD в точках F и N соответственно, причём $BF=7$, $DN=1$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases}\left(2x^2+4xy+3y^2\right)\left(64-y^2\right)\le 0,\\ |x-3+y|+|y-3-x|\le a\,?\end{cases}$$

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC=2\sqrt{3}$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω – сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что угол между гранями SAB и ABC равен $\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{3}\right)$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

8. Дан правильный 36-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 45°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ» ПО МАТЕМАТИКЕ 2013

БИЛЕТ 5 ШИФР ______________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{\left(6^{x-2}\right)}\left(x^2\right)+\log_{\left(36^{x-2}\right)}\left((x-5)^4\right)=\frac{2}{x-2}.$$

2. Решите уравнение

$$2\sqrt{7}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{27+\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{6|x-2|}{x^2+21}\right)^{x+\sqrt{x^2-6}}>1.$$

4. Число 58964 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 5896458964589645896458964589645896458964. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

5. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC<AD$, $\angle BCD=90^\circ$. Точка M – середина отрезка CD. Известно, что окружность радиуса 5 проходит через точки A и B и касается стороны CD в точке M, а $\cos\angle BMC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите длины отрезков AB и BC, а также площадь трапеции.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases}\left(x^2-xy+y^2\right)\left(|x-y|-6\right)\geq 0,\\ x(x+2)+y(y-2)=a?\end{cases}$$

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $AK:KA_1$ и $CP:PC_1$, если $BN:NB_1=3:4$.

8. Дан правильный 16-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ» ПО МАТЕМАТИКЕ 2013

БИЛЕТ 6 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{\left(4^{x+4}\right)}\left(x^4\right)+\log_{\left(2^{x+4}\right)}\left((x+5)^2\right)=\frac{4}{x+4}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{38}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{37-\sin 3x}.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{6|2x+1|}{4x^2+15}\right)^{-x+\sqrt{x^2-1}}>1.$$

4. Число 52168 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 5216852168521685216852168521685216852168. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC<AD$, $\angle ABC=90^\circ$. Точка M – середина отрезка AB. Известно, что окружность радиуса 4 проходит через точки C и D и касается стороны AB в точке M, а $\cos\angle MDC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите длины отрезков CD и AB, а также площадь трапеции.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases}\left(3x^2+3xy+2y^2\right)\left(|x+y|-8\right)\geq 0,\\ x(x-4)+y(y-2)=a?\end{cases}$$

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $AK:KA_1$ и $BN:NB_1$, если $CP:PC_1=3:25$.

8. Дан правильный 18-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ» ПО МАТЕМАТИКЕ 2013

<u>БИЛЕТ 7</u> ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{\left(3^{x-3}\right)}\left((x-4)^2\right)+\log_{\left(9^{x-3}\right)}\left(x^4\right)=\frac{2}{x-3}.$$

2. Решите уравнение

$$2\sqrt{6}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{23+\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{2|2x-3|}{x^2+10}\right)^{x+\sqrt{x^2-3}}>1.$$

4. Число 51746 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 5174651746517465174651746517465174651746. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC<AD$, $\angle ADC=90^\circ$. Точка K – середина отрезка CD. Известно, что окружность радиуса 3 проходит через точки A и B и касается стороны CD в точке K, а $\sin\angle KAD=\frac{1}{3}$. Найдите длины отрезков AB и CD, а также площадь трапеции.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases}\left(x^2-4xy+7y^2\right)\left(10-|x-y|\right)\le 0,\\ x(x-2)+y(y+6)=a\,?\end{cases}$$

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $CP:PC_1$ и $BN:NB_1$, если $AK:KA_1=1:12$.

8. Дан правильный 20-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА «ФИЗТЕХ» ПО МАТЕМАТИКЕ 2013

БИЛЕТ 8 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\log_{\left(2^{x+1}\right)}\left(x^2\right)+\log_{\left(4^{x+1}\right)}\left((x+3)^4\right)=\frac{2}{x+1}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{29+\sin 3x}=\sqrt{30}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{4|x+1|}{x^2+8}\right)^{-x+\sqrt{x^2-2}}>1.$$

4. Число 96182 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 9618296182961829618296182961829618296182. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC<AD$, $\angle BAD=90^\circ$. Точка K – середина отрезка AB. Известно, что окружность радиуса 6 проходит через точки C и D и касается стороны AB в точке K, а $\cos\angle KCB=\frac{1}{3}$. Найдите длины отрезков CD и AB, а также площадь трапеции.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases}\left(2x^2-5xy+4y^2\right)\left(7-|x+y|\right)\le 0,\\ x(x-6)+y(y+4)=a\,?\end{cases}$$

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $AK:KA_1$ и $BN:NB_1$, если $CP:PC_1=1:27$.

8. Дан правильный 14-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Олимпиада «Физтех» 2013 г.

БИЛЕТ 1

1. Решите уравнение $\log_{\left(3^{x-1}\right)}\left(x^2-11x+19\right)+\log_{\left(27^{x-1}\right)}\left(x^3\right)=\dfrac{2}{x-1}$.

Ответ: $x=9$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{1}{x-1}\log_3\left(x^2-11x+19\right)+\frac{3}{3(x-1)}\log_3 x=\frac{2}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_3\left(x^2-11x+19\right)+\log_3 x=2,\\ x-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\log_3\left(x^3-11x^2+19x\right)=\log_3 9,\\ x\neq 1,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^3-11x^2+19x-9=0,\\ x\neq 1,\\ x>0.\end{cases}$$

Одним из корней кубического уравнения является $x=1$. Разделив уголком на $x-1$, получаем уравнение $(x-1)\left(x^2-10x+9\right)=0$, откуда $x=1$ или $x=9$. В ОДЗ входит только корень $x=9$.

2. Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{|x+1|-2}}\leq\dfrac{1}{9+x}$.

Ответ: $x\in(-9;-7]$.

Решение.

1-й способ. Переносим в одну часть и приводим дроби к общему знаменателю: $\dfrac{\sqrt{|x+1|-2}-9-x}{(9+x)\sqrt{|x+1|-2}}\geq 0$.

Находим нули знаменателя: $9+x=0\Leftrightarrow x=-9$; $\sqrt{|x+1|-2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x=1.\end{array}\right.$

Находим нули числителя: $\sqrt{|x+1|-2}-9-x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+9\geq 0,\\ |x+1|-2=(x+9)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -9,\\ \left[\begin{array}{l}x+1=2+(x+9)^2,\\ x+1=-2-(x+9)^2.\end{array}\right.\end{cases}$

Первое уравнение совокупности не имеет решений, а из второго находим, что $x=-7$ или $x=-12$. Неравенству $x\geq -9$ удовлетворяет только $x=-7$, т.е. числитель обращается в ноль только при $x=-7$.

Находим ОДЗ: $|x+1|-2>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

Далее решаем методом интервалов: из каждого промежутка, принадлежащего ОДЗ, подставляем какое-либо значение x и определяем знак левой части в этой точке. В итоге промежутки $(-\infty;-9)$, $(-7;-3)$ и $(1;+\infty)$ не подходят, а промежуток $(-9;-7)$ – подходит. Также не забываем включить в ответ точку $x=-7$ – ноль числителя.

2-й способ. При отрицательной правой части решений нет, поэтому $x+9>0$. Умножаем обе части неравенства на *положительное* выражение $(x+9)\sqrt{|x+1|-2}$ и получаем неравенство $\sqrt{|x+1|-2}\geq x+9$, равносильное исходному. Поскольку правая часть больше нуля, возведение в квадрат является равносильным преобразованием. Получаем

$$|x+1|-2\geq x^2+18x+81\Leftrightarrow|x+1|\geq x^2+18x+83\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1\geq x^2+18x+83,\\ x+1\leq -x^2-18x-83\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+17x+82\leq 0,\\ x^2+19x+84\leq 0.\end{array}\right.$$

Первое неравенство совокупности не имеет решений, а из второго получаем, что $x\in[-12;-7]$. Учитывая ограничение $x+9>0$, окончательно находим $x\in(-9;-7]$.

3. Решите уравнение $\sqrt{3+4\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\sqrt{3}} + 3\cos x$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ x = -\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$3 + 4\cos^2 x = \frac{\sin^2 x}{3} + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 9\cos^2 x \qquad (*)$$

при условии $\dfrac{\sin x}{\sqrt{3}} + 3\cos x \geq 0$. Используя основное тригонометрическое тождество ($3 \to 3\cos^2 x + 3\sin^2 x$) и приводя подобные слагаемые, получаем: $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - \dfrac{8}{3}\sin^2 x = 0$. Подстановкой убеждаемся, что при $\sin x = 0$ решений нет. Если разделить обе части на $2\sin^2 x$, то выходит квадратное уравнение относительно $\operatorname{ctg} x$: $\operatorname{ctg}^2 x + \sqrt{3}\operatorname{ctg} x - \dfrac{4}{3} = 0$, решая которое, находим, что $\operatorname{ctg} x = -\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ или $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $x = -\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \pi k$ или $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$.

Условию $\dfrac{\sin x}{\sqrt{3}} + 3\cos x \geq 0$ удовлетворяют только значения $x = -\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{4} + 2\pi k$ и $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$.

<u>*Примечание.*</u> Уравнение (*) с помощью формул понижения степени и двойного угла можно также преобразовать к виду $3\sqrt{3}\sin 2x + 7\cos 2x = 1$. Если далее решать это уравнение, вводя вспомогательный угол, то ответ может быть получен, например, в таком виде:

(а) $x = \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{7}{2\sqrt{19}} \pm \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{19}} + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}$ или

(б) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{19}} - \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}} + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}} - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{19}} + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}. \end{array}\right.$

4. Число 72350 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 72350723507235072350723507235072350. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 216.

Решение. Для того, чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 5. Для делимости на 5 нужно, чтобы последней цифрой числа была 0 или 5. Значит, полученное число будет делиться на 5, если мы вычеркнем любые две цифры, кроме двух последних. Перейдём к делимости на 3.

Если в числе заменить все цифры 7 на 1, цифры 3 на 0, а цифры 5 на 2, то остаток от деления числа на 3 не изменится (остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3). Таким образом, нужно узнать, сколькими способами можно вычеркнуть две цифры из числа $X = 12020120201202012020120201202012020$ так, чтобы полученное число делилось на 3. Сумма цифр числа X равна 35. Чтобы после вычёркивания сумма цифр делилась на 3, мы можем вычеркнуть либо а) две единицы, либо б) двойку и ноль. Количество способов вычеркнуть две единицы равно $C_7^2 = 21$; количество способов вычеркнуть один ноль и одну двойку равно $C_{14}^1 \cdot C_{14}^1 = 14 \cdot 14 = 196$.

Две последние цифры вычёркивать нельзя, поэтому получаем $196 + 21 - 1 = 216$ способов.

5. В параллелограмме $ABCD$ угол ADC равен $\arcsin\dfrac{\sqrt{24}}{5}$. Окружность Ω, проходящая через точки A, C и D, пересекает стороны AB и BC в точках N и L соответственно, причём $AN = 11$, $BL = 6$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

Ответ: $S = 60\sqrt{6}$, $R = \dfrac{5\sqrt{265}}{4\sqrt{6}}$.

Решение. Трапеция $ADCN$ вписана в окружность, поэтому она равнобокая, $CN = AD$. Противоположные стороны параллелограмма равны: $BC = AD$. Следовательно, $CN = BC$, поэтому треугольник BNC равнобедренный. $\angle CBN = \angle ADC = \arcsin\dfrac{\sqrt{24}}{5} = \arccos\dfrac{1}{5}$. Пусть CH – высота треугольника BNC. Тогда $\dfrac{1}{5} = \cos\angle HBC = \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BN}{2BC}$. Если обозначить $BC = 5x$, то $BN = 2x$.

Из точки B к окружности проведены секущие BLC и BNA. По теореме о двух секущих получаем, что $BN \cdot BA = BL \cdot BC$, т.е. $2x(2x+11) = 6 \cdot 5x$, откуда $x = 2$. Значит, $BC = 10$, $AB = 15$. Поэтому площадь S параллелограмма $ABCD$ равна $AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = 15 \cdot 10 \cdot \dfrac{2\sqrt{6}}{5} = 60\sqrt{6}$.

Окружность Ω является описанной около треугольника ADC. Её радиус R равен $\dfrac{AC}{2\sin\angle ADC}$. Сторону AC находим по теореме косинусов из треугольника ADC: $AC^2 = 100 + 225 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \dfrac{1}{5} = 265$. Поэтому $AC = \sqrt{265}$, а $R = \sqrt{265} : \dfrac{4\sqrt{6}}{5} = \dfrac{5\sqrt{265}}{4\sqrt{6}}$.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases}\left(x^2 - xy + y^2\right)\left(x^2 - 36\right) \geq 0,\\ |x - 2 + y| + |x - 2 - y| \leq a\,?\end{cases}$$

Ответ: $4 \leq a < 8$.

Решение. Рассмотрим выражение $A(x; y) = x^2 - xy + y^2$ как квадратный трёхчлен относительно x. Его дискриминант равен $D = y^2 - 4y^2 = -3y^2$. При $y \neq 0$ дискриминант отрицателен, поэтому $A > 0$. Если $y = 0$, то $A = x^2$, т.е. $A > 0$ при $x \neq 0$ и $A = 0$ при $x = 0$. В итоге получаем, что выражение $A(x; y)$ обращается в ноль в точке $(0; 0)$ и положительно во всех остальных точках.

Следовательно, первое неравенство системы равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 = 0,\\ x^2 - 36 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0,\\ x \in (-\infty; -6] \cup [6; +\infty). \end{array}\right.$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих этой совокупности, на координатной плоскости. Получаем все точки, лежащие на прямой $x = -6$ и левее неё, точки на прямой $x = 6$ и правее неё, а также точку $(0; 0)$.

Перейдём ко второму неравенству. Проведём на координатной плоскости прямые $x - 2 + y = 0$ и $x - 2 - y = 0$. Они разбивают плоскость на 4 области, в каждой из которых знаки выражений под модулями постоянны. Рассматриваем 4 случая.

Если $x - 2 + y \geq 0$ и $x - 2 - y \geq 0$, то неравенство принимает вид $x - 2 + y + x - 2 - y \leq a \Leftrightarrow x \leq 2 + \dfrac{a}{2}$.

Аналогично, если $x - 2 + y < 0$ и $x - 2 - y \geq 0$, то $-x + 2 - y + x - 2 - y \leq a \Leftrightarrow y \geq -\dfrac{a}{2}$.

Если $x - 2 + y < 0$ и $x - 2 - y < 0$, то $-x + 2 - y - x + 2 + y \leq a \Leftrightarrow x \geq 2 - \dfrac{a}{2}$.

Если $x - 2 + y \geq 0$ и $x - 2 - y < 0$, то $x - 2 + y - x + 2 + y \leq a \Leftrightarrow y \leq \dfrac{a}{2}$.

Окончательно получаем, что при $a = 0$ неравенство задаёт точку $(2; 0)$, при $a > 0$ – квадрат с центром в точке $(2; 0)$ и стороной a, а при $a < 0$ – пустое множество.

Очевидно, при $a \le 0$ система не имеет решений. При $a > 0$ для того, чтобы было единственное решение, нужно, чтобы точка $(0;0)$ попадала в квадрат, но чтобы квадрат не пересекал прямую $x = 6$, откуда следует, что $2 \le \frac{a}{2} < 4$, т.е. $4 \le a < 8$.

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC = 2\sqrt{3}$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω – сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что $\angle SAB = \arccos\frac{1}{4}$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

Ответ: а) 0; б) 1:2; в) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Пусть O – центр сферы ω; K, L, M – основания перпендикуляров, опущенных из точки O на рёбра AS, BS, CS соответственно; SH – высота пирамиды $SABC$; r и R – радиусы сфер ω и Ω соответственно.

а) Поскольку точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AS, она равноудалена от концов этого отрезка, т.е. $OA = OS$. Аналогично $OB = OS$ и $OC = OS$. Значит, $OA = OB = OC = OS$, поэтому точка O является центром сферы Ω. Следовательно, расстояние между центрами сфер равно нулю.

б) Из равенства прямоугольных треугольников SOK, SOL и SOM ($OK = OL = OM = r$, OS – общая сторона) следует, что $SK = SL = SM$. Поскольку точки K, L, M – это середины боковых рёбер пирамиды, отсюда получаем, что боковые рёбра равны между собой. Тогда высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания (действительно, $\Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$ по катету и гипотенузе, откуда $AH = BH = CH$). Но в пирамиде $OABC$ боковые рёбра OA, OB, OC также равны между собой как радиусы сферы Ω; значит, и её высота, проведённая из вершины O проходит через центр окружности, описанной около основания. Таким образом, высота пирамиды SH проходит через точку O. Кроме того, точка H является центром окружности, описанной около основания. Поскольку треугольник ABC прямоугольный, H – это середина гипотенузы BC. Так как отрезок OH перпендикулярен плоскости основания, он равен радиусу r сферы ω.

Для нахождения соотношения между радиусами рассмотрим прямоугольный треугольник SHC. Точка M – середина гипотенузы SC, на катете SH находится точка O, причём $SO = CO = R$, $OH = OM = r$. Треугольники CHO, CMO и SMO равны по катету и гипотенузе, следовательно, $CH = CM = SM$. Значит, $CH = \frac{1}{2}SM$, $\angle HSC = 30^\circ$. Тогда из треугольника SOM находим, что $r : R = 1 : 2$.

в) $SC = 2CH = BC = 2\sqrt{3}$, поэтому треугольник SBC – равносторонний, $SH = SB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$. В равнобедренном треугольнике SAB известны боковые стороны $SB = SA = 2\sqrt{3}$ и угол при основании $\angle SAB = \arccos\frac{1}{4}$. Отсюда находим, что $AB = 2SA \cdot \cos\angle SAB = \sqrt{3}$. По теореме Пифагора для треугольника ABC находим, что $AC = 3$, поэтому $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}$; объём пирамиды V равен $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

8. Дан правильный 18-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 40°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответ: 216.

Решение. Опишем вокруг 18-угольника окружность. Будем считать, что длина окружности равна 18 (тогда длина дуги между соседними вершинами равна 1). Вписанный угол в 40 градусов стягивет дугу длиной 4. Значит, для данной вершины A найдутся $18 - 4 - 1 = 13$ (неупорядоченных) пар вершин (B, C), для которых $\angle BAC = 40^\circ$. Суммируя по всем вершинам, получаем $13 \cdot 18 = 234$ тройки вершин. При таком подсчёте дважды учтены 18 равнобедренных треугольников с углами 40°, 40°, 100° (положение равнобедренного треугольника однозначно определяется положением его вершины), поэтому в итоге получаем $234-18=216$ способов расположения точек.

БИЛЕТ 2

1. Решите уравнение $\log_{\left(5^x\right)}\left(x^2+9x+15\right)+\log_{\left(125^x\right)}\left(x^3\right)=\frac{2}{x}$.

Ответ: $x=1$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{1}{x}\log_5\left(x^2+9x+15\right)+\frac{3}{3x}\log_5 x=\frac{2}{x} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_5\left(x^2+9x+15\right)+\log_5 x=2,\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\log_5\left(x^3+9x^2+15x\right)=\log_5 25,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^3+9x^2+15x-25=0,\\ x>0\end{cases}$$

Одним из корней кубического уравнения является $x=1$. Разделив уголком на $x-1$, получаем уравнение $(x-1)\left(x^2+10x+25\right)=0$, откуда $x=1$ или $x=-5$. В ОДЗ входит только корень $x=1$.

2. Решите неравенство $\frac{1}{\sqrt{|x-3|-1}}\le\frac{1}{6-x}$.

Ответ: $x\in[5;6)$.

Решение.

1-й способ. Переносим в одну часть и приводим дроби к общему знаменателю: $\frac{\sqrt{|x-3|-1}-6+x}{(6-x)\sqrt{|x-3|-1}}\ge 0$.

Находим нули знаменателя: $6-x=0\Leftrightarrow x=6$; $\sqrt{|x-3|-1}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4,\\ x=2.\end{array}\right.$

Находим нули числителя: $\sqrt{|x-3|-1}-6+x=0\Leftrightarrow\begin{cases}6-x\ge 0,\\ |x-3|-1=(6-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 6,\\ \left[\begin{array}{l}x-3=1+(6-x)^2,\\ x-3=-1-(6-x)^2.\end{array}\right.\end{cases}$

Второе уравнение совокупности не имеет решений, а из первого находим, что $x=5$ или $x=8$. Неравенству $x\le 6$ удовлетворяет только $x=5$, т.е. числитель обращается в ноль только при $x=5$.

Находим ОДЗ: $|x-3|-1>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$.

Далее решаем методом интервалов: из каждого промежутка, принадлежащего ОДЗ, подставляем какое-либо значение x и определяем знак левой части в этой точке. В итоге промежутки $(-\infty;2)$, $(4;5)$ и $(6;+\infty)$ не подходят, а промежуток $(5;6)$ – подходит. Также не забываем включить в ответ точку $x=5$ – ноль числителя.

2-й способ. При отрицательной правой части решений нет, поэтому $6-x>0$. Умножаем обе части неравенства на *положительное* выражение $(6-x)\sqrt{|x-3|-1}$ и получаем неравенство $\sqrt{|x-3|-1}\ge 6-x$, равносильное исходному. Поскольку правая часть больше нуля, возведение в квадрат является равносильным преобразованием. Отсюда

$$|x-3|-1\ge x^2-12x+36\Leftrightarrow|x-3|\ge x^2-12x+37\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-3\ge x^2-12x+37,\\ x-3\le -x^2+12x-37\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-13x+40\le 0,\\ x^2-11x+34\le 0.\end{array}\right.$$

Второе неравенство совокупности не имеет решений, а из первого получаем, что $x\in[5;8]$. Учитывая ограничение $6-x>0$, окончательно находим $x\in[5;6)$.

3. Решите уравнение $\sqrt{1+7\sin^2 x}=2\cos x-\sqrt{3}\sin x$.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}+2\pi k,\ k\in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$1+7\sin^2 x=4\cos^2 x-4\sqrt{3}\sin x\cos x+3\sin^2 x \qquad (*)$$

при условии $2\cos x-\sqrt{3}\sin x\geq 0$. Используя основное тригонометрическое тождество ($1\to\cos^2 x+\sin^2 x$) и приводя подобные слагаемые, получаем: $3\cos^2 x-4\sqrt{3}\sin x\cos x-5\sin^2 x=0$. Подстановкой убеждаемся, что при $\sin x=0$ решений нет. Если разделить обе части на $\sin^2 x$, то выходит квадратное уравнение относительно $\operatorname{ctg} x$: $3\operatorname{ctg}^2 x-4\sqrt{3}\operatorname{ctg} x-5=0$, решая которое, находим, что $\operatorname{ctg} x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ или $\operatorname{ctg} x=\frac{5}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k$ или $x=\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{5}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Условию $2\cos x-\sqrt{3}\sin x\geq 0$ удовлетворяют только значения $x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}+2\pi k$ и $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$.

Примечание. Уравнение (*) с помощью формул понижения степени и двойного угла можно также преобразовать к виду $4\cos 2x-2\sqrt{3}\sin 2x=1$. Если далее решать это уравнение, вводя вспомогательный угол, то ответ может быть получен, например, в таком виде:

(а) $x=-\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ или

(б) $\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{7}}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}, \\ x=-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{7}}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$

4. Число 84605 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 84605846058460584605846058460584605. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 216.

Решение. Для того, чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 5. Для делимости на 5 нужно, чтобы последней цифрой числа была 0 или 5. Значит, полученное число будет делиться на 5, если мы вычеркнем любые две цифры, кроме двух последних. Перейдём к делимости на 3.

Если в числе заменить все цифры 8 и 5 на 2, цифры 4 на 1, а цифры 6 на 0, то остаток от деления числа на 3 не изменится (остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3). Таким образом, нужно узнать, сколькими способами можно вычеркнуть две цифры из числа $X=21002210022100221002210022100221002$ так, чтобы полученное число делилось на 3. Сумма цифр числа X равна 35. Чтобы после вычёркивания сумма цифр делилась на 3, мы можем вычеркнуть либо а) две единицы, либо б) двойку и ноль. Количество способов вычеркнуть две единицы равно $C_7^2=21$; количество способов вычеркнуть один ноль и одну двойку равно $C_{14}^1\cdot C_{14}^1=14\cdot 14=196$.

Две последние цифры вычёркивать нельзя, поэтому получаем $196+21-1=216$ способов.

5. В параллелограмме $ABCD$ угол BCD равен $\operatorname{arctg}\sqrt{15}$. Окружность Ω, проходящая через точки B, C и D, пересекает стороны AB и AD в точках T и E соответственно, причём $BT=10$, $AE=7$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

Ответ: $S=28\sqrt{15}$, $R=\frac{4\sqrt{17}}{\sqrt{5}}$.

Решение. Трапеция $CBTD$ вписана в окружность, поэтому она равнобокая, $CB=TD$. Противоположные стороны параллелограмма равны: $BC=AD$. Следовательно, $TD=AD$, поэтому треугольник ADT равнобедренный. $\angle DAT=\angle BCD=\operatorname{arctg}\sqrt{15}=\arccos\frac{1}{4}=\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}$. Пусть DH – высота треугольника ADT. Тогда $\frac{1}{4}=\cos\angle TAD=\frac{AH}{AD}=\frac{AT}{2AD}$. Если обозначить $AT=x$, то $AD=2x$.

Из точки A к окружности проведены секущие AED и ATB. По теореме о двух секущих получаем, что $AT \cdot AB = AE \cdot AD$, т.е. $x(x+10) = 7 \cdot 2x$, откуда $x = 4$. Значит, $AB = 14$, $AD = 8$. Поэтому площадь S параллелограмма $ABCD$ равна $AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD = 14 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 28\sqrt{15}$.

Окружность Ω является описанной около треугольника BDC. Её радиус R равен $\frac{BD}{2\sin \angle BCD}$. Сторону BD находим по теореме косинусов из треугольника BDC: $BD^2 = 64 + 196 - 2 \cdot 14 \cdot 8 \cdot \frac{1}{4} = 204$. Поэтому $BD = 2\sqrt{51}$, а $R = 2\sqrt{51} : \frac{2\sqrt{15}}{4} = \frac{4\sqrt{17}}{\sqrt{5}}$.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases} \left(x^2 - xy + 3y^2\right)\left(y^2 - 25\right) \geq 0, \\ |x + 2 + y| + |y + 2 - x| \leq a\,? \end{cases}$$

Ответ: $4 \leq a < 6$.

Решение. Рассмотрим выражение $A(x; y) = x^2 - xy + 3y^2$ как квадратный трёхчлен относительно x. Его дискриминант равен $D = y^2 - 12y^2 = -11y^2$. При $y \neq 0$ дискриминант отрицателен, поэтому $A > 0$. Если $y = 0$, то $A = x^2$, т.е. $A > 0$ при $x \neq 0$ и $A = 0$ при $x = 0$. В итоге получаем, что выражение $A(x; y)$ обращается в ноль в точке $(0; 0)$ и положительно во всех остальных точках.

Следовательно, первое неравенство системы равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - xy + 3y^2 = 0, \\ y^2 - 25 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0, \\ y \in (-\infty; -5] \cup [5; +\infty). \end{array}\right.$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих этой совокупности, на координатной плоскости. Получаем все точки, лежащие на прямой $y = -5$ и ниже неё, точки на прямой $y = 5$ и выше неё, а также точку $(0; 0)$.

Перейдём ко второму неравенству. Проведём на координатной плоскости прямые $x + 2 + y = 0$ и $y + 2 - x = 0$. Они разбивают плоскость на 4 области, в каждой из которых знаки выражений под модулями постоянны. Рассматриваем 4 случая.

Если $x + 2 + y \geq 0$ и $y + 2 - x \geq 0$, то неравенство принимает вид $x + 2 + y + y + 2 - x \leq a \Leftrightarrow y \leq -2 + \frac{a}{2}$.

Аналогично, если $x + 2 + y < 0$ и $y + 2 - x \geq 0$, то $-x - 2 - y + y + 2 - x \leq a \Leftrightarrow x \geq -\frac{a}{2}$.

Если $x + 2 + y < 0$ и $y + 2 - x < 0$, то $-x - 2 - y - y - 2 + x \leq a \Leftrightarrow y \geq -2 - \frac{a}{2}$.

Если $x + 2 + y \geq 0$ и $y + 2 - x < 0$, то $x + 2 + y - y - 2 + x \leq a \Leftrightarrow x \leq \frac{a}{2}$.

Окончательно получаем, что при $a = 0$ неравенство задаёт точку $(0; -2)$, при $a > 0$ – квадрат с центром в точке $(0; -2)$ и стороной a, а при $a < 0$ – пустое множество.

Очевидно, при $a \leq 0$ система не имеет решений. При $a > 0$ для того, чтобы было единственное решение, нужно, чтобы точка $(0; 0)$ попадала в квадрат, но чтобы квадрат не пересекал прямую $y = -5$, откуда следует, что $2 \leq \frac{a}{2} < 3$, т.е. $4 \leq a < 6$.

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC = 4$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω – сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что угол между гранями SAB и ABC равен $\operatorname{arctg} 2$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

Ответ: а) 0; б) 1:2; в) 4.

Решение. Пусть O – центр сферы ω; K, L, M – основания перпендикуляров, опущенных из точки O на рёбра AS, BS, CS соответственно; SH – высота пирамиды $SABC$; r и R – радиусы сфер ω и Ω соответственно.

а) Поскольку точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AS, она равноудалена от концов этого отрезка, т.е. $OA = OS$. Аналогично $OB = OS$ и $OC = OS$. Значит, $OA = OB = OC = OS$, поэтому точка O является центром сферы Ω. Следовательно, расстояние между центрами сфер равно нулю.

б) Из равенства прямоугольных треугольников SOK, SOL и SOM ($OK = OL = OM = r$, OS – общая сторона) следует, что $SK = SL = SM$. Поскольку точки K, L, M – это середины боковых рёбер пирамиды, отсюда получаем, что боковые рёбра равны между собой. Тогда высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания (действительно, $\Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$ по катету и гипотенузе, откуда $AH = BH = CH$). Но в пирамиде $OABC$ боковые рёбра OA, OB, OC также равны между собой как радиусы сферы Ω; значит, и её высота, проведённая из вершины O проходит через центр окружности, описанной около основания. Таким образом, высота пирамиды SH проходит через точку O. Кроме того, точка H является центром окружности, описанной около основания. Поскольку треугольник ABC прямоугольный, H – это середина гипотенузы BC. Так как отрезок OH перпендикулярен плоскости основания, он равен радиусу r сферы ω.

Для нахождения соотношения между радиусами рассмотрим прямоугольный треугольник SHC. Точка M – середина гипотенузы SC, на катете SH находится точка O, причём $SO = CO = R$, $OH = OM = r$. Треугольники CHO, CMO и SMO равны по катету и гипотенузе, следовательно, $CH = CM = SM$. Значит, $CH = \frac{1}{2} SM$, $\angle HSC = 30^\circ$. Тогда из треугольника SOM находим, что $r : R = 1 : 2$.

в) $SC = 2CH = BC = 4$, поэтому треугольник SBC – равносторонний, $SH = SB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Пусть F – середина ребра AB. Тогда $\angle SFH = \operatorname{arctg} 2$ (угол SFH является углом между гранями SAB и ABC, т.к. $HF \perp AB$, $SF \perp AB$). Тогда $HF = SH \cdot \operatorname{ctg} \angle SFH = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$, $AC = 2 \cdot FH = 2\sqrt{3}$. По теореме Пифагора для треугольника ABC находим, что $AB = 2$, поэтому $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3}$; объём пирамиды V равен $\frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 4$.

8. Дан правильный 24-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 45°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответ: 384.

Решение. Опишем вокруг 24-угольника окружность. Будем считать, что длина окружности равна 24 (тогда длина дуги между соседними вершинами равна 1). Вписанный угол в 45 градусов опирается на дугу длиной 6. Значит, для данной вершины A найдутся $24 - 6 - 1 = 17$ (неупорядоченных) пар вершин (B, C), для которых $\angle BAC = 45^\circ$. Суммируя по всем вершинам, получаем $17 \cdot 24 = 408$ троек вершин. При таком подсчёте дважды учтены 24 равнобедренных треугольников с углами 45°, 45°, 90° (положение равнобедренного треугольника однозначно определяется положением его вершины), поэтому в итоге получаем $408 - 24 = 384$ способа расположения точек.

БИЛЕТ 3

1. Решите уравнение $\log_{\left(2^x\right)}\left(x^2-6x-15\right)+\log_{\left(8^x\right)}\left(x^3\right)=\frac{3}{x}$.

Ответ: $x=8$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{1}{x}\log_2\left(x^2-6x-15\right)+\frac{3}{3x}\log_2 x=\frac{3}{x} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2\left(x^2-6x-15\right)+\log_2 x=3,\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2\left(x^3-6x^2-15x\right)=\log_2 8,\\ x>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^3-6x^2-15x-8=0,\\ x>0\end{cases}$$

Одним из корней кубического уравнения является $x=-1$. Разделив уголком на $x+1$, получаем уравнение $(x+1)\left(x^2-7x-8\right)=0$, откуда $x=-1$ или $x=8$. В ОДЗ входит только корень $x=8$.

2. Решите неравенство $\frac{1}{\sqrt{|x+2|-1}}\leq\frac{1}{5+x}$.

Ответ: $x\in(-5;-4]$.

Решение.

1-й способ. Переносим в одну часть и приводим дроби к общему знаменателю: $\frac{\sqrt{|x+2|-1}-5-x}{(5+x)\sqrt{|x+2|-1}}\geq 0$.

Находим нули знаменателя: $5+x=0\Leftrightarrow x=-5$; $\sqrt{|x+2|-1}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x=-1.\end{array}\right.$

Находим нули числителя: $\sqrt{|x+2|-1}-5-x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+5\geq 0,\\ |x+2|-1=(x+5)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -5,\\ \left[\begin{array}{l}x+2=1+(x+5)^2,\\ x+2=-1-(x+5)^2.\end{array}\right.\end{cases}$

Первое уравнение совокупности не имеет решений, а из второго находим, что $x=-7$ или $x=-4$. Неравенству $x\geq -5$ удовлетворяет только $x=-4$, т.е. числитель обращается в ноль только при $x=-4$.

Находим ОДЗ: $|x+2|-1>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)$.

Далее решаем методом интервалов: из каждого промежутка, принадлежащего ОДЗ, подставляем какое-либо значение x и определяем знак левой части в этой точке. В итоге промежутки $(-\infty;-5)$, $(-4;-3)$ и $(-1;+\infty)$ не подходят, а промежуток $(-5;-4)$ – подходит. Также не забываем включить в ответ точку $x=-4$ – ноль числителя.

2-й способ. При отрицательной правой части решений нет, поэтому $x+5>0$. Умножаем обе части неравенства на *положительное* выражение $(x+5)\sqrt{|x+2|-1}$ и получаем неравенство $\sqrt{|x+2|-1}\geq x+5$, равносильное исходному. Поскольку правая часть больше нуля, возведение в квадрат является равносильным преобразованием. Получаем

$$|x+2|-1\geq x^2+10x+25\Leftrightarrow|x+2|\geq x^2+10x+26\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2\geq x^2+10x+26,\\ x+2\leq -x^2-10x-26\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+9x+24\leq 0,\\ x^2+11x+28\leq 0.\end{array}\right.$$

Первое неравенство совокупности не имеет решений, а из второго получаем, что $x\in[-7;-4]$. Учитывая ограничение $x+5>0$, окончательно находим $x\in(-5;-4]$.

3. Решите уравнение $\sqrt{6+\frac{22}{3}\sin^2 x}=3\cos x+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x$.

Ответ: $x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi k,\ x=-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{6}+2\pi k,\ k\in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$6+\frac{22}{3}\sin^2 x=\frac{4\sin^2 x}{3}+4\sqrt{3}\sin x\cos x+9\cos^2 x \qquad (*)$$

при условии $\frac{2\sin x}{\sqrt{3}}+3\cos x\ge 0$. Используя основное тригонометрическое тождество ($6\to 6\cos^2 x+6\sin^2 x$) и приводя подобные слагаемые, получаем: $3\cos^2 x+4\sqrt{3}\sin x\cos x-12\sin^2 x=0$. Подстановкой убеждаемся, что при $\sin x=0$ решений нет. Если разделить обе части на $\sqrt{3}\sin^2 x$, то выходит квадратное уравнение относительно $\operatorname{ctg} x$: $\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2 x+4\operatorname{ctg} x-4\sqrt{3}=0$, решая которое, находим, что $\operatorname{ctg} x=-2\sqrt{3}$ или $\operatorname{ctg} x=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $x=-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{6}+\pi k$ или $x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

Условию $\frac{2\sin x}{\sqrt{3}}+3\cos x\ge 0$ удовлетворяют только значения $x=-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{6}+2\pi k$ и $x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi k$.

Примечание. Уравнение (*) с помощью формул понижения степени и двойного угла можно также преобразовать к виду $5\sqrt{3}\cos 2x+4\sin 2x=3\sqrt{3}$. Если далее решать это уравнение, вводя вспомогательный угол, то ответ может быть получен, например, в таком виде:

(а) $x=\frac{1}{2}\arccos\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{91}}\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}+2\pi k, k\in Z$ или

(б) $$\left[\begin{aligned} &x=\frac{1}{2}\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}-\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{\sqrt{91}}+2\pi k, k\in Z,\\ &x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}-\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{\sqrt{91}}+2\pi k, k\in Z.\end{aligned}\right.$$

4. Число 94850 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 94850948509485094850948509485094850. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 216.

Решение. Для того, чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 5. Для делимости на 5 нужно, чтобы последней цифрой числа была 0 или 5. Значит, полученное число будет делиться на 5, если мы вычеркнем любые цифры, кроме двух последних. Перейдём к делимости на 3.

Если в числе заменить все цифры 4 на 1, цифры 9 на 0, а цифры 8 и 5 на 2, то остаток от деления числа на 3 не изменится (остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3). Таким образом, нужно узнать, сколькими способами можно вычеркнуть две цифры из числа $X=01220012200122001220012200122001220$ так, чтобы полученное число делилось на 3. Сумма цифр числа X равна 35. Чтобы после вычёркивания сумма цифр делилась на 3, мы можем вычеркнуть либо а) две единицы, либо б) двойку и ноль. Количество способов вычеркнуть две единицы равно $C_7^2=21$; количество способов вычеркнуть один ноль и одну двойку равно $C_{14}^1\cdot C_{14}^1=14\cdot 14=196$.

Две последние цифры вычёркивать нельзя, поэтому получаем $196+21-1=216$ способов.

5. В параллелограмме $ABCD$ угол ABC равен $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}$. Окружность Ω, проходящая через точки A, B и C, пересекает стороны AD и CD в точках P и M соответственно, причём $AP=3$, $CM=6$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

Ответ: $S=20\sqrt{15}$, $R=\frac{4\sqrt{31}}{\sqrt{15}}$.

Решение. Трапеция $BCMA$ вписана в окружность, поэтому она равнобокая, $CB=MA$. Противоположные стороны параллелограмма равны: $BC=AD$. Следовательно, $MA=AD$, поэтому треугольник ADM

равнобедренный. $\angle ADM = \angle ABC = \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4} = \arccos\frac{1}{4}$. Пусть AH – высота треугольника ADM. Тогда $\frac{1}{4} = \cos\angle ADH = \frac{DH}{AD} = \frac{DM}{2AD}$. Если обозначить $DM = x$, то $AD = 2x$.

Из точки D к окружности проведены секущие DMC и DPA. По теореме о двух секущих получаем, что $DM \cdot DC = DP \cdot DA$, т.е. $x(x+6) = (2x-3)\cdot 2x$, откуда $x = 4$. Значит, $CD = 10$, $AD = 8$. Поэтому площадь S параллелограмма $ABCD$ равна $AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = 10 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 20\sqrt{15}$.

Окружность Ω является описанной около треугольника ABC. Её радиус R равен $\frac{AC}{2\sin\angle ABC}$. Сторону AC находим по теореме косинусов из треугольника ABC: $AC^2 = 64 + 100 - 2\cdot 10\cdot 8\cdot\frac{1}{4} = 124$. Поэтому $BD = 2\sqrt{31}$, а $R = 2\sqrt{31} : \frac{2\sqrt{15}}{4} = \frac{4\sqrt{31}}{\sqrt{15}}$.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases}\left(2x^2 + 3xy + 2y^2\right)\left(49 - x^2\right) \le 0,\\ |x+3+y| + |x+3-y| \le a?\end{cases}$$

Ответ: $6 \le a < 8$.

Решение. Рассмотрим выражение $A(x; y) = 2x^2 + 3xy + 2y^2$ как квадратный трёхчлен относительно x. Его дискриминант равен $D = 9y^2 - 16y^2 = -7y^2$. При $y \ne 0$ дискриминант отрицателен, поэтому $A > 0$. Если $y = 0$, то $A = 2x^2$, т.е. $A > 0$ при $x \ne 0$ и $A = 0$ при $x = 0$. В итоге получаем, что выражение $A(x; y)$ обращается в ноль в точке $(0; 0)$ и положительно во всех остальных точках.

Следовательно, первое неравенство системы равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}2x^2 + 3xy + 2y^2 = 0,\\ 49 - x^2 \le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = y = 0,\\ x \in (-\infty; -7] \cup [7; +\infty).\end{array}\right.$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих этой совокупности, на координатной плоскости. Получаем все точки, лежащие на прямой $x = -7$ и левее неё, точки на прямой $x = 7$ и правее неё, а также точку $(0; 0)$.

Перейдём ко второму неравенству. Проведём на координатной плоскости прямые $x + 3 + y = 0$ и $x + 3 - y = 0$. Они разбивают плоскость на 4 области, в каждой из которых знаки выражений под модулями постоянны. Рассматриваем 4 случая.

Если $x + 3 + y \ge 0$ и $x + 3 - y \ge 0$, то неравенство принимает вид $x + 3 + y + x + 3 - y \le a \Leftrightarrow x \le -3 + \frac{a}{2}$.

Аналогично, если $x + 3 + y < 0$ и $x + 3 - y \ge 0$, то $-x - 3 - y + x + 3 - y \le a \Leftrightarrow y \ge -\frac{a}{2}$.

Если $x + 3 + y < 0$ и $x + 3 - y < 0$, то $-x - 3 - y - x - 3 + y \le a \Leftrightarrow x \ge -3 - \frac{a}{2}$.

Если $x + 3 + y \ge 0$ и $x + 3 - y < 0$, то $x + 3 + y - x - 3 + y \le a \Leftrightarrow y \le \frac{a}{2}$.

Окончательно получаем, что при $a = 0$ неравенство задаёт точку $(-3; 0)$, при $a > 0$ – квадрат с центром в точке $(-3; 0)$ и стороной a, а при $a < 0$ – пустое множество.

Очевидно, при $a \le 0$ система не имеет решений. При $a > 0$ для того, чтобы было единственное решение, нужно, чтобы точка $(0; 0)$ попадала в квадрат, но чтобы квадрат не пересекал прямую $x = -7$, откуда следует, что $3 \le \frac{a}{2} < 4$, т.е. $6 \le a < 8$.

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC=2$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω – сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что $\angle SAB = \arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

Ответ: а) 0; б) 1:2; в) $\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть O – центр сферы ω; K, L, M – основания перпендикуляров, опущенных из точки O на рёбра AS, BS, CS соответственно; SH – высота пирамиды $SABC$; r и R – радиусы сфер ω и Ω соответственно.

а) Поскольку точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AS, она равноудалена от концов этого отрезка, т.е. $OA=OS$. Аналогично $OB=OS$ и $OC=OS$. Значит, $OA=OB=OC=OS$, поэтому точка O является центром сферы Ω. Следовательно, расстояние между центрами сфер равно нулю.

б) Из равенства прямоугольных треугольников SOK, SOL и SOM ($OK=OL=OM=r$, OS – общая сторона) следует, что $SK=SL=SM$. Поскольку точки K, L, M – это середины боковых рёбер пирамиды, отсюда получаем, что боковые рёбра равны между собой. Тогда высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания (действительно, $\Delta SHA=\Delta SHB=\Delta SHC$ по катету и гипотенузе, откуда $AH=BH=CH$). Но в пирамиде $OABC$ боковые рёбра OA, OB, OC также равны между собой как радиусы сферы Ω; значит, и её высота, проведённая из вершины O проходит через центр окружности, описанной около основания. Таким образом, высота пирамиды SH проходит через точку O. Кроме того, точка H является центром окружности, описанной около основания. Поскольку треугольник ABC прямоугольный, H – это середина гипотенузы BC. Так как отрезок OH перпендикулярен плоскости основания, он равен радиусу r сферы ω.

Для нахождения соотношения между радиусами рассмотрим прямоугольный треугольник SHC. Точка M – середина гипотенузы SC, на катете SH находится точка O, причём $SO=CO=R$, $OH=OM=r$. Треугольники CHO, CMO и SMO равны по катету и гипотенузе, следовательно, $CH=CM=SM$. Значит, $CH=\frac{1}{2}SM$, $\angle HSC=30^\circ$. Тогда из треугольника SOM находим, что $r:R=1:2$.

в) $SC=2CH=BC=2$, поэтому треугольник SBC – равносторонний, $SH=SB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. В равнобедренном треугольнике SAB известны боковые стороны $SB=SA=2$ и угол при основании $\angle SAB=\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$. Отсюда находим, что $AB=2SA\cdot\cos\angle SAB=\sqrt{3}$. По теореме Пифагора для треугольника ABC находим, что $AC=1$, поэтому $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}$; объём пирамиды V равен $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$.

8. Дан правильный 30-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 30°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответ: 690.

Решение. Опишем вокруг 30-угольника окружность. Будем считать, что длина окружности равна 30 (тогда длина дуги между соседними вершинами равна 1). Вписанный угол в 30 градусов опирается на дугу длиной 5. Значит, для данной вершины A найдутся $30-5-1=24$ (неупорядоченных) пары вершин (B,C), для которых $\angle BAC=30^\circ$. Суммируя по всем вершинам, получаем $30\cdot 24=720$ троек вершин. При таком подсчёте дважды учтены 30 равнобедренных треугольников с углами 30°, 30°, 120° (положение равнобедренного треугольника однозначно определяется положением его вершины), поэтому в итоге получаем $720-30=690$ способов расположения точек.

БИЛЕТ 4

1. Решите уравнение $\log_{\left(5^{x-1}\right)}\left(x^2-7x+11\right)+\log_{\left(125^{x-1}\right)}\left(x^3\right)=\dfrac{1}{x-1}$.

Ответ: $x=5$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{1}{x-1}\log_5\left(x^2-7x+11\right)+\frac{3}{3(x-1)}\log_5 x=\frac{1}{x-1}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\log_5\left(x^2-7x+11\right)+\log_5(x)=1,\\ x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\log_3\left(x^3-7x^2+11x\right)=\log_5 5,\\ x\neq 1,\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-7x^2+11x-5=0,\\ x\neq 1,\\ x>0.\end{cases}$$

Одним из корней кубического уравнения является $x=1$. Разделив уголком на $x-1$, получаем уравнение $(x-1)\left(x^2-6x+5\right)=0$, откуда $x=1$ или $x=5$. В ОДЗ входит только корень $x=5$.

2. Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{|x+3|-2}}\leq\dfrac{1}{7+x}$.

Ответ: $x\in(-7;-6]$.

Решение.

1-й способ. Переносим в одну часть и приводим дроби к общему знаменателю: $\dfrac{\sqrt{|x+3|-2}-7-x}{(7+x)\sqrt{|x+3|-2}}\geq 0$.

Находим нули знаменателя: $7+x=0\Leftrightarrow x=-7$; $\sqrt{|x+3|-2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5,\\ x=-1.\end{array}\right.$

Находим нули числителя: $\sqrt{|x+3|-2}-7-x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+7\geq 0,\\ |x+3|-2=(x+7)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -7,\\ \left[\begin{array}{l}x+3=2+(x+7)^2,\\ x+3=-2-(x+7)^2.\end{array}\right.\end{cases}$

Первое уравнение совокупности не имеет решений, а из второго находим, что $x=-6$ или $x=-9$. Неравенству $x\geq -7$ удовлетворяет только $x=-6$, т.е. числитель обращается в ноль только при $x=-6$.

Находим ОДЗ: $|x+3|-2>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-5)\cup(-1;+\infty)$.

Далее решаем методом интервалов: из каждого промежутка, принадлежащего ОДЗ, подставляем какое-либо значение x и определяем знак левой части в этой точке. В итоге промежутки $(-\infty;-7)$, $(-6;-5)$ и $(-1;+\infty)$ не подходят, а промежуток $(-7;-6)$ – подходит. Также не забываем включить в ответ точку $x=-6$ – ноль числителя.

2-й способ. При отрицательной правой части решений нет, поэтому $x+7>0$. Умножаем обе части неравенства на *положительное* выражение $(x+7)\sqrt{|x+3|-2}$ и получаем неравенство $\sqrt{|x+3|-2}\geq x+7$, равносильное исходному. Поскольку правая часть больше нуля, возведение в квадрат является равносильным преобразованием. Получаем

$$|x+3|-2\geq x^2+14x+49\Leftrightarrow|x+3|\geq x^2+14x+51\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+3\geq x^2+14x+51,\\ x+3\leq -x^2-14x-51\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+13x+48\leq 0,\\ x^2+15x+54\leq 0.\end{array}\right.$$

Первое неравенство совокупности не имеет решений, а из второго получаем, что $x\in[-9;-6]$. Учитывая ограничение $x+7>0$, окончательно находим $x\in(-7;-6]$.

3. Решите уравнение $\sqrt{3+\dfrac{25}{2}\sin^2 x}=\sqrt{6}\cos x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x$.

Ответ: $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ x = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$3 + \frac{25}{2}\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{2} - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 6\cos^2 x \qquad (*)$$

при условии $\sqrt{6}\cos x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x \ge 0$. Используя основное тригонометрическое тождество ($3 \to 3\cos^2 x + 3\sin^2 x$) и приводя подобные слагаемые, получаем: $3\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 15\sin^2 x = 0$. Подстановкой убеждаемся, что при $\sin x = 0$ решений нет. Если разделить обе части на $\sqrt{3}\sin^2 x$, то выходит квадратное уравнение относительно $\operatorname{ctg} x$: $\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2 x - 2\operatorname{ctg} x - 5\sqrt{3} = 0$, решая которое, находим, что $\operatorname{ctg} x = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$ или $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$. Следовательно, $x = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{5} + \pi k$ или $x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

Условию $\sqrt{6}\cos x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x \ge 0$ удовлетворяют только значения $x = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi k$ и $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$.

<u>*Примечание.*</u> Уравнение (*) с помощью формул понижения степени и двойного угла можно также преобразовать к виду $3\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = 2\sqrt{3}$. Если далее решать это уравнение, вводя вспомогательный угол, то ответ может быть получен, например, в таком виде:

(а) $x = -\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \pm \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + 2\pi k,\ k \in Z$ или

(б) $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{7}} - \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{7}} + \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + 2\pi k,\ k \in Z. \end{array}\right.$

4. Число 83105 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 83105831058310583105831058310583105. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 216.

Решение. Для того, чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 5. Для делимости на 5 нужно, чтобы последней цифрой числа была 0 или 5. Значит, полученное число будет делиться на 5, если мы вычеркнем любые цифры, кроме двух последних. Перейдём к делимости на 3.

Если в числе заменить все цифры 3 на 0, а цифры 8 и 5 на 2, то остаток от деления числа на 3 не изменится (остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3). Таким образом, нужно узнать, сколькими способами можно вычеркнуть две цифры из числа $X = 20102201022010220102201022010220102$ так, чтобы полученное число делилось на 3. Сумма цифр числа X равна 35. Чтобы после вычёркивания сумма цифр делилась на 3, мы можем вычеркнуть либо а) две единицы, либо б) двойку и ноль. Количество способов вычеркнуть две единицы равно $C_7^2 = 21$; количество способов вычеркнуть один ноль и одну двойку равно $C_{14}^1 \cdot C_{14}^1 = 14 \cdot 14 = 196$.

Две последние цифры вычёркивать нельзя, поэтому получаем $196 + 21 - 1 = 216$ способов.

5. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен $\operatorname{arctg}\sqrt{15}$. Окружность Ω, проходящая через точки A, B и D, пересекает стороны BC и CD в точках F и N соответственно, причём $BF = 7$, $DN = 1$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

Ответ: $S = 15\sqrt{15}$, $R = \dfrac{2\sqrt{106}}{\sqrt{15}}$.

Решение. Трапеция $ABFD$ вписана в окружность, поэтому она равнобокая, $AB = FD$. Противоположные стороны параллелограмма равны: $AB = CD$. Следовательно, $FD = CD$, поэтому треугольник FCD

равнобедренный. $\angle DCF = \angle BAD = \operatorname{arctg}\sqrt{15} = \arccos\frac{1}{4} = \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}$. Пусть DH – высота треугольника DFC. Тогда $\frac{1}{4} = \cos\angle DCH = \frac{CH}{CD} = \frac{CF}{2CD}$. Если обозначить $FC = x$, то $CD = 2x$.

Из точки C к окружности проведены секущие CND и CFB. По теореме о двух секущих получаем $CF \cdot CB = CN \cdot CD$, т.е. $x(x+7) = (2x-1)\cdot 2x$, откуда $x = 3$. Отсюда следует, что $BC = 10$, $CD = 6$. Значит, площадь S параллелограмма $ABCD$ равна $CB \cdot CD \cdot \sin\angle BCD = 10 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 15\sqrt{15}$.

Окружность Ω является описанной около треугольника BDA. Её радиус R равен $\frac{BD}{2\sin\angle BAD}$. Сторону BD находим по теореме косинусов из треугольника BDA: $BD^2 = 36 + 100 - 2\cdot 10\cdot 6\cdot\frac{1}{4} = 106$. Поэтому $BD = \sqrt{106}$, а $R = \sqrt{106} : \frac{2\sqrt{15}}{4} = \frac{2\sqrt{106}}{\sqrt{15}}$.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases}\left(2x^2 + 4xy + 3y^2\right)\left(64 - y^2\right) \le 0,\\ |x - 3 + y| + |y - 3 - x| \le a\,?\end{cases}$$

Ответ: $6 \le a < 10$.

Решение. Рассмотрим выражение $A(x; y) = 2x^2 + 4xy + 3y^2$ как квадратный трёхчлен относительно x. Его дискриминант равен $D = 16y^2 - 24y^2 = -8y^2$. При $y \ne 0$ дискриминант отрицателен, поэтому $A > 0$. Если $y = 0$, то $A = 2x^2$, т.е. $A > 0$ при $x \ne 0$ и $A = 0$ при $x = 0$. В итоге получаем, что выражение $A(x; y)$ обращается в ноль в точке $(0; 0)$ и положительно во всех остальных точках.

Следовательно, первое неравенство системы равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}2x^2 + 4xy + 3y^2 = 0,\\ 64 - y^2 \le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = y = 0,\\ y \in (-\infty; -8] \cup [8; +\infty).\end{array}\right.$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих этой совокупности, на координатной плоскости. Получаем все точки, лежащие на прямой $y = -8$ и ниже неё, точки на прямой $y = 8$ и выше неё, а также точку $(0; 0)$.

Перейдём ко второму неравенству. Проведём на координатной плоскости прямые $x - 3 + y = 0$ и $y - 3 - x = 0$. Они разбивают плоскость на 4 области, в каждой из которых знаки выражений под модулями постоянны. Рассматриваем 4 случая.

Если $x - 3 + y \ge 0$ и $y - 3 - x \ge 0$, то неравенство принимает вид $x - 3 + y + y - 3 - x \le a \Leftrightarrow y \le 3 + \frac{a}{2}$.

Аналогично, если $x - 3 + y < 0$ и $y - 3 - x \ge 0$, то $-x + 3 - y + y - 3 - x \le a \Leftrightarrow x \ge -\frac{a}{2}$.

Если $x - 3 + y < 0$ и $y - 3 - x < 0$, то $-x + 3 - y - y + 3 + x \le a \Leftrightarrow y \ge 3 - \frac{a}{2}$.

Если $x - 3 + y \ge 0$ и $y - 3 - x < 0$, то $x - 3 + y - y + 3 + x \le a \Leftrightarrow x \le \frac{a}{2}$.

Окончательно получаем, что при $a = 0$ неравенство задаёт точку $(0; 3)$, при $a > 0$ – квадрат с центром в точке $(0; 3)$ и стороной a, а при $a < 0$ – пустое множество.

Очевидно, при $a \le 0$ система не имеет решений. При $a > 0$ для того, чтобы было единственное решение, нужно, чтобы точка $(0; 0)$ попадала в квадрат, но чтобы квадрат не пересекал прямую $y = 8$, откуда следует, что $3 \le \frac{a}{2} < 5$, т.е. $6 \le a < 10$.

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC = 2\sqrt{3}$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω – сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что угол между гранями SAB и ABC равен $\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{3}\right)$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

Ответ: а) 0; б) 1:2; в) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Пусть O – центр сферы ω; K, L, M – основания перпендикуляров, опущенных из точки O на рёбра AS, BS, CS соответственно; SH – высота пирамиды $SABC$; r и R – радиусы сфер ω и Ω соответственно.

а) Поскольку точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AS, она равноудалена от концов этого отрезка, т.е. $OA = OS$. Аналогично $OB = OS$ и $OC = OS$. Значит, $OA = OB = OC = OS$, поэтому точка O является центром сферы Ω. Следовательно, расстояние между центрами сфер равно нулю.

б) Из равенства прямоугольных треугольников SOK, SOL и SOM ($OK = OL = OM = r$, OS – общая сторона) следует, что $SK = SL = SM$. Поскольку точки K, L, M – это середины боковых рёбер пирамиды, отсюда получаем, что боковые рёбра равны между собой. Тогда высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания (действительно, $\Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$ по катету и гипотенузе, откуда $AH = BH = CH$). Но в пирамиде $OABC$ боковые рёбра OA, OB, OC также равны между собой как радиусы сферы Ω; значит, и её высота, проведённая из вершины O проходит через центр окружности, описанной около основания. Таким образом, высота пирамиды SH проходит через точку O. Кроме того, точка H является центром окружности, описанной около основания. Поскольку треугольник ABC прямоугольный, H – это середина гипотенузы BC. Так как отрезок OH перпендикулярен плоскости основания, он равен радиусу r сферы ω.

Для нахождения соотношения между радиусами рассмотрим прямоугольный треугольник SHC. Точка M – середина гипотенузы SC, на катете SH находится точка O, причём $SO = CO = R$, $OH = OM = r$. Треугольники CHO, CMO и SMO равны по катету и гипотенузе, следовательно, $CH = CM = SM$. Значит, $CH = \frac{1}{2}SM$, $\angle HSC = 30^\circ$. Тогда из треугольника SOM находим, что $r : R = 1:2$.

в) $SC = 2CH = BC = 2\sqrt{3}$, поэтому треугольник SBC – равносторонний, $SH = SB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$. Пусть F – середина ребра AB. Тогда $\angle SFH = \operatorname{arctg}\left(2\sqrt{3}\right)$ (угол SFH является углом между гранями SAB и ABC, т.к. $HF \perp AB$, $SF \perp AB$). Тогда $HF = SH \cdot \operatorname{ctg}\angle SFH = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AC = 2 \cdot FH = \sqrt{3}$. По теореме Пифагора для треугольника ABC находим, что $AB = 3$, поэтому $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}$; объём пирамиды V равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

8. Дан правильный 36-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 45°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответ: 900.

Решение. Опишем вокруг 36-угольника окружность. Будем считать, что длина окружности равна 36 (тогда длина дуги между соседними вершинами равна 1). Вписанный угол в 45 градусов опирается на дугу длиной 9. Значит, для данной вершины A найдутся $36 - 9 - 1 = 26$ (неупорядоченных) пар вершин (B, C), для которых $\angle BAC = 30^\circ$. Суммируя по всем вершинам, получаем $36 \cdot 26 = 936$ троек вершин. При таком подсчёте дважды учтены 36 равнобедренных треугольников с углами 45°, 45°, 90° (положение равнобедренного треугольника однозначно определяется положением его вершины), поэтому в итоге получаем $936 - 36 = 900$ способов расположения точек.

БИЛЕТ 5

1. Решите уравнение $\log_{\left(6^{x-2}\right)}\left(x^2\right)+\log_{\left(36^{x-2}\right)}\left((x-5)^4\right)=\dfrac{2}{x-2}$.

Ответ: $x=3$, $x=-1$, $x=6$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2}{x-2}\log_6|x|+\frac{4}{2(x-2)}\log_6|x-5|=\frac{2}{x-2} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\log_6|x|+\log_6|x-5|=1,\\ x-2\neq 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\log_6\left|x^2-5x\right|=\log_6 6,\\ x\neq 2.\end{cases}$$

Уравнение $\left|x^2-5x\right|=6$ эквивалентно совокупности двух уравнений $x^2-5x=-6$ и $x^2-5x=6$, решая которые, находим, что $x=2$, $x=3$, $x=-1$, $x=6$. Значение $x=2$ не входит в ОДЗ.

2. Решите уравнение $2\sqrt{7}\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{27+\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

Ответ: $x=2\pi+4\pi k,\ k\in \mathrm{Z}$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $27+\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)=28\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)$ при условии $\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)\geq 0$. С помощью формул приведения, формул понижения степени и формулы косинуса тройного угла получаем:

$27+\cos 3x=14-14\cos(x-\pi)$, $13+4\cos^3 x-3\cos x=14\cos x$, $4\cos^3 x-17\cos x+13=0$.

Обозначая $\cos x=y$ ($|y|\leq 1$), получаем уравнение $4y^3-17y+13=0$, одним из корней которого является $y=1$. После деления на $(y-1)$ остаётся уравнение $4y^2+4y-13=0$. Его корни $\left(y=\dfrac{-1\pm\sqrt{14}}{2}\right)$ по модулю больше единицы, следовательно, они не подходят.

Если $y=1$, то $\cos x=1$, $x=2\pi m,\ m\in \mathrm{Z}$.

Подставляя найденные x в неравенство $\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)\geq 0$, получаем $\sin\left(\pi m-\dfrac{\pi}{2}\right)\geq 0$. Несложно видеть, что подходят только нечётные значения m, т.е. $m=2k+1,\ k\in \mathrm{Z}$, откуда $x=2\pi+4\pi k,\ k\in \mathrm{Z}$.

3. Решите неравенство $\left(\dfrac{6|x-2|}{x^2+21}\right)^{x+\sqrt{x^2-6}}>1$.

Ответ: $x\in(-\infty;-3)\cup\left(-3;-\sqrt{6}\right]$.

Решение. Запишем неравенство в виде $\left(\dfrac{6|x-2|}{x^2+21}\right)^{x+\sqrt{x^2-6}}>\left(\dfrac{6|x-2|}{x^2+21}\right)^0$. Обозначим $f(x)=\dfrac{6|x-2|}{x^2+21}$. Несложно видеть, что $f(x)$ положительна при всех x из ОДЗ (значение $x=2$ не входит в ОДЗ). Рассмотрим разность $f(x)-1=\dfrac{6|x-2|-x^2-21}{x^2+21}$.

При $x\geq 2$ она принимает вид $\dfrac{6x-12-x^2-21}{x^2+21}=\dfrac{-x^2+6x-33}{x^2+21}=\dfrac{-(x-3)^2-24}{x^2+21}$. Если $x<2$, то получаем $\dfrac{12-6x-x^2-21}{x^2+21}=\dfrac{-x^2-6x-9}{x^2+21}=-\dfrac{(x+3)^2}{x^2+21}$. Таким образом, рассматриваемая разность отрицательна при всех x, отличных от -3. Отсюда следует, что $f(x)<1$ при всех x, кроме $x=-3$.

Подстановкой убеждаемся, что $x=-3$ решением не является.

При всех остальных x неравенство равносильно каждому из следующих:

$x+\sqrt{x^2-6}<0$, $\sqrt{x^2-6}<-x$, $\begin{cases}-x>0,\\ x^2-6\geq 0,\\ x^2-6<x^2,\end{cases}$ $\quad x\leq-\sqrt{6}$.

Исключая значение $x=-3$, получаем $x\in(-\infty;-3)\cup\left(-3;-\sqrt{6}\right]$.

4. Число 58964 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 5896458964589645896458964589645896458964. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 247.

Решение. Для того, чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Для делимости на 2 нужно, чтобы последней цифрой числа была 0, 2, 4, 6 или 8. Значит, полученное число будет делиться на 2, если мы вычеркнем любые цифры, кроме двух последних. Перейдём к делимости на 3.

Если в числе заменить все цифры 4 на 1, цифры 9 и 6 на 0, а цифры 5 и 8 на 2, то остаток от деления числа на 3 не изменится (остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3). Таким образом, нужно узнать, сколькими способами можно вычеркнуть две цифры из числа $X=2200122001220012200122001220012200122001$ так, чтобы полученное число делилось на 3. Сумма цифр числа X равна 40. Чтобы после вычёркивания сумма цифр делилась на 3, мы можем вычеркнуть либо а) две двойки, либо б) единицу и ноль. Количество способов вычеркнуть две двойки равно $C_{16}^2=120$; количество способов вычеркнуть один ноль и одну единицу равно $C_{16}^1\cdot C_8^1=16\cdot 8=128$.

Две последние цифры вычёркивать нельзя, поэтому получаем $128+120-1=247$ способов.

5. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC<AD$, $\angle BCD=90^\circ$. Точка M – середина отрезка CD. Известно, что окружность радиуса 5 проходит через точки A и B и касается стороны CD в точке M, а $\cos\angle BMC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите длины отрезков AB и BC, а также площадь трапеции.

Ответ: $AB=10;\ BC=\frac{10}{9};\ S=\frac{200\sqrt{2}}{9}$.

Решение. Поскольку окружность касается *CD*, её центр *O* лежит на перпендикуляре к *CD* в точке *M*. С другой стороны, *O* лежит на серединном перпендикуляре к *AB*. Эти две прямые пересекаются в середине *AB*. Значит, *O* — середина *AB*, и *AB* — диаметр окружности, откуда $AB=2R=10$.

Обозначим $\angle BMC=\varphi$. Тогда дуга BM равна 2φ (теорема об угле между касательной и хордой), а $\angle BAM=\varphi$ (теорема о вписанном угле). Далее находим, что $\angle BMA=90^\circ$ (опирается на диаметр), $\angle DAM=90^\circ-\angle DMA=90^\circ-\left(180^\circ-\angle BMA-\angle BMC\right)=\varphi$. Значит, прямоугольные треугольники AMB, ADM и MCB подобны.

Вычисляем основания и высоту трапеции: $BM=AB\sin\varphi=\frac{10}{3}$, $BC=BM\sin\varphi=\frac{10}{9}$, $DM=CM=BM\cos\varphi=\frac{20\sqrt{2}}{9}$, $AD=MD\operatorname{ctg}\varphi=\frac{80}{9}$. Тогда площадь трапеции S равна $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{10}{9}+\frac{80}{9}\right)\cdot\frac{40\sqrt{2}}{9}=\frac{200\sqrt{2}}{9}$.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases}\left(x^2-xy+y^2\right)\left(|x-y|-6\right)\geq 0,\\ x(x+2)+y(y-2)=a\,?\end{cases}$$

Ответ: $a=0;\ a=6$.

Решение. Рассмотрим выражение $A(x;y)=x^2-xy+y^2$ как квадратный трёхчлен относительно x. Его дискриминант равен $D=y^2-4y^2=-3y^2$. При $y\neq 0$ дискриминант отрицателен, поэтому $A>0$. Если $y=0$, то $A=x^2$, т.е. $A>0$ при $x\neq 0$ и $A=0$ при $x=0$. В итоге получаем, что выражение $A(x;y)$ обращается в ноль в точке $(0;0)$ и положительно во всех остальных точках.

Следовательно, неравенство системы равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2-xy+y^2=0, \\ |x-y|\geq 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0, \\ x-y\geq 6, \\ x-y\leq -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0, \\ y\leq x-6, \\ y\geq x+6. \end{array}\right.$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих этой совокупности, на координатной плоскости. Получаем все точки, лежащие на прямой $y=x+6$ и выше неё, точки на прямой $y=x-6$ и ниже неё, а также точку $(0;0)$.

Перейдём к уравнению $x(x+2)+y(y-2)=a$. Преобразуем левую часть, выделяя полные квадраты, и получаем $(x+1)^2+(y-1)^2=a+2$. При $a<-2$ это уравнение задаёт пустое множество, при $a=-2$ – точку $T(-1;1)$, а при $a>-2$ – окружность с центром в точке $T(-1;1)$ радиуса $\sqrt{a+2}$.

Очевидно, при $a\leq -2$ система не имеет решений. При $a>-2$ единственное решение возможно в двух случаях: окружность проходит через точку $K(0;0)$ или окружность касается прямой $y=x+6$. В первом случае радиус окружности должен быть равен длине отрезка TK, т.е. $\sqrt{a+2}=\sqrt{2}$, откуда $a=0$. Во втором случае радиус равен расстоянию от точки T до прямой $x-y+6=0$, т.е. $\sqrt{a+2}=\dfrac{|-1-1+6|}{\sqrt{1+1}}$, откуда $a=6$.

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $AK:KA_1$ и $CP:PC_1$, если $BN:NB_1=3:4$.

Ответ: $AK:KA_1=3:25$, $CP:PC_1=27:1$ *или* $AK:KA_1=27:1$, $CP:PC_1=3:25$.

Решение. Пусть, для определённости, ABC – нижнее основание призмы. Пусть α касается нижнего и верхнего оснований цилиндра в точках X и X_1 соответственно. Из симметрии, XX_1 пересекает ось цилиндра. Обозначив через X' проекцию точки X на нижнее основание; тогда XX' – диаметр нижнего основания.

Пусть K', N', P' – проекции точек K, N, P на осевое сечение цилиндра, содержащее XX_1 (тогда они лежат на XX_1), а A', B', C' – проекции точек A, B, C на XX'. Поскольку A, B, C – проекции точек K, N, P на нижнее основание, получаем, что A', B', C' также являются проекциями K, N, P (а также K', N', P') на XX'. Значит, $\dfrac{AK}{KA_1}=\dfrac{XK'}{K'X_1}=\dfrac{XA'}{A'X'}$ и, аналогично, $\dfrac{BN}{NB_1}=\dfrac{XB'}{B'X'}$ и $\dfrac{CP}{PC_1}=\dfrac{XC'}{C'X'}$.

Пусть теперь O – центр нижнего основания, и $\angle XOB=\varphi$. Без ограничения общности можно считать, что радиус нижнего основания равен 1. Тогда $XB'=1-\cos\varphi$. Поскольку $\angle AOB=\angle BOC=\dfrac{2\pi}{3}$, аналогично получаем, что длины отрезков XA' и XC' равны $1-\cos\left(\varphi\pm\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Из условия получаем $XB'=2\cdot\dfrac{3}{3+4}$, значит, $\cos\varphi=\dfrac{1}{7}$. Тогда $\sin\varphi=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$, откуда

$$\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\varphi\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\varphi\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{13}{14} \text{ и}$$

$$\cos\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\varphi\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\varphi\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{11}{14}.$$

Значит, один из отрезков XA' и XC' равен $\frac{27}{14}$, а другой – $\frac{3}{14}$, откуда отношения $AK:KA_1$ и $CP:PC_1$ равны $3:25$ и $27:1$ (в каком-то порядке).

8. Дан правильный 16-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответ: 364.

Решение. Опишем окружность вокруг 16-угольника. Вписанный угол, равный 90°, опирается на диаметр, поэтому одна из диагоналей является диаметром окружности, а две другие вершины находятся по разные стороны от этого диаметра. Всего есть 8 диаметров; каждую из двух других вершин можно выбрать семью способами. Тогда получается $8\cdot 7\cdot 7=392$ четвёрки точек. Но при таком подсчёте прямоугольники (т.е. четырёхугольники, у которых обе диагонали являются диаметрами) посчитаны дважды. Прямоугольников выходит $C_8^2=28$ штук, и в итоге получаем $392-28=364$ варианта.

БИЛЕТ 6

1. Решите уравнение $\log_{\left(4^{x+4}\right)}\left(x^4\right)+\log_{\left(2^{x+4}\right)}\left((x+5)^2\right)=\dfrac{4}{x+4}$.

Ответ: $x=-1$, $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{41}}{2}$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{4}{2(x+4)}\log_2|x|+\frac{2}{x+4}\log_2|x+5|=\frac{4}{x+4}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\log_2|x|+\log_2|x+5|=2,\\ x+4\neq 0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\log_2\left|x^2+5x\right|=\log_2 4,\\ x\neq -4\end{cases}$$

Уравнение $\left|x^2+5x\right|=4$ эквивалентно совокупности двух уравнений $x^2+5x=-4$ и $x^2+5x=4$, решая которые, находим, что $x=-1$, $x=-4$, $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{41}}{2}$. Значение $x=-4$ не входит в ОДЗ.

2. Решите уравнение $\sqrt{38}\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{37-\sin 3x}$.

Ответ: $x=\dfrac{5\pi}{2}+4\pi k,\ k\in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $37-\sin 3x=38\cos^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3\pi}{4}\right)$ при условии $\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3\pi}{4}\right)\geq 0$. С помощью формулы приведения, формулы понижения степени и формулы синуса тройного угла получаем:

$37-\sin 3x=19+19\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $18-3\sin x+4\sin^3 x=19\sin x$, $2\sin^3 x-11\sin x+9=0$.

Обозначая $\sin x=y$ ($|y|\leq 1$), получаем уравнение $2y^3-11y+9=0$, одним из корней которого является $y=1$. После деления на $(y-1)$ остаётся уравнение $2y^2+2y-9=0$. Его корни $\left(y=\dfrac{-1\pm\sqrt{19}}{2}\right)$ по модулю больше единицы, следовательно, они не подходят.

Если $y=1$, то $\sin x=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in Z$.

Подставляя найденные x в неравенство $\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3\pi}{4}\right)\geq 0$, получаем $\cos(\pi+\pi m)\geq 0$. Несложно видеть, что подходят только нечётные значения m, т.е. $m=2k+1,\ k\in Z$, откуда $x=\dfrac{5\pi}{2}+4\pi k,\ k\in Z$.

3. Решите неравенство $\left(\dfrac{6|2x+1|}{4x^2+15}\right)^{-x+\sqrt{x^2-1}}>1$.

Ответ: $x\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Решение. Запишем неравенство в виде $\left(\dfrac{6|2x+1|}{4x^2+15}\right)^{-x+\sqrt{x^2-1}}>\left(\dfrac{6|2x+1|}{4x^2+15}\right)^{0}$. Обозначим $f(x)=\dfrac{6|2x+1|}{4x^2+15}$. Несложно видеть, что $f(x)$ положительна при всех x из ОДЗ (значение $x=-\dfrac{1}{2}$ не входит в ОДЗ). Рассмотрим разность $f(x)-1=\dfrac{6|2x+1|-4x^2-15}{4x^2+15}$.

При $x \ge -\frac{1}{2}$ она принимает вид $\frac{12x+6-4x^2-15}{4x^2+15} = \frac{-4x^2+12x-9}{4x^2+15} = \frac{-(2x-3)^2}{4x^2+15}$. Если $x < -\frac{1}{2}$, то получаем $\frac{-12x-6-4x^2-15}{4x^2+15} = \frac{-4x^2-12x-21}{4x^2+15} = \frac{-(2x+3)^2-12}{4x^2+15}$. Таким образом, рассматриваемая разность отрицательна при всех x, отличных от $\frac{3}{2}$. Отсюда следует, что $f(x) < 1$ при всех x, кроме $x = \frac{3}{2}$.

Подстановкой убеждаемся, что $x = \frac{3}{2}$ решением не является.

При всех остальных x неравенство равносильно каждому из следующих:

$$-x+\sqrt{x^2-1}<0,\ \sqrt{x^2-1}<x,\ \begin{cases} x>0, \\ x^2-1 \ge 0, \\ x^2-1<x^2, \end{cases} \quad x \ge 1.$$

Исключая значение $x = \frac{3}{2}$, получаем $x \in \left[1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

4. Число 52168 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 5216852168521685216852168521685216852168. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 219.

Решение. Для того, чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Для делимости на 2 нужно, чтобы последней цифрой числа была 0, 2, 4, 6 или 8. Значит, полученное число будет делиться на 2, если мы вычеркнем любые цифры, кроме двух последних. Перейдём к делимости на 3.

Если в числе заменить все цифры 6 на 0, а цифры 5 и 8 на 2, то остаток от деления числа на 3 не изменится (остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3). Таким образом, нужно узнать, сколькими способами можно вычеркнуть две цифры из числа $X = 2210222102221022210222102221022210222102$ так, чтобы полученное число делилось на 3. Сумма цифр числа X равна 56. Чтобы после вычёркивания сумма цифр делилась на 3, мы можем вычеркнуть либо а) две единицы, либо б) двойку и ноль. Количество способов вычеркнуть две единицы равно $C_8^2 = 28$; количество способов вычеркнуть один ноль и одну двойку равно $C_8^1 \cdot C_{24}^1 = 8 \cdot 24 = 192$.

Две последние цифры вычёркивать нельзя, поэтому получаем $192 + 28 - 1 = 219$ способов.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC < AD$, $\angle ABC = 90^\circ$. Точка M – середина отрезка AB. Известно, что окружность радиуса 4 проходит через точки C и D и касается стороны AB в точке M, а $\cos\angle MDC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Найдите длины отрезков CD и AB, а также площадь трапеции.

Ответ: $CD = 8$; $AB = \frac{32\sqrt{2}}{9}$; $S = \frac{128\sqrt{2}}{9}$.

Решение. Поскольку окружность касается *AB*, её центр *O* лежит на перпендикуляре к *AB* в точке *M*. С другой стороны, *O* лежит на серединном перпендикуляре к *CD*. Эти две прямые пересекаются в середине *CD*. Значит, *O* — середина *CD*, и *CD* — диаметр окружности, откуда $CD = 2R = 8$.

Обозначим $\angle BMC = \varphi$. Тогда дуга CM равна 2φ (теорема об угле между касательной и хордой), а $\angle CDM = \varphi$ (теорема о вписанном угле). Далее находим, что $\angle CMD = 90^\circ$ (опирается на диаметр), $\angle ADM = 90^\circ - \angle AMD = 90^\circ - (180^\circ - \angle CMD - \angle CMB) = \varphi$. Значит, прямоугольные треугольники DMA, DCM и MCB подобны.

Вычисляем основания и высоту трапеции: $CM = CD\sin\varphi = \frac{8}{3}$, $BC = BM\sin\varphi = \frac{8}{9}$, $BM = AM = CM\cos\varphi = \frac{16\sqrt{2}}{9}$, $AB = 2AM = \frac{32\sqrt{2}}{9}$, $AD = AM\operatorname{ctg}\varphi = \frac{64}{9}$. Тогда площадь трапеции S равна $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{9}+\frac{64}{9}\right)\cdot\frac{32\sqrt{2}}{9} = \frac{128\sqrt{2}}{9}$.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases}\left(3x^2+3xy+2y^2\right)\left(|x+y|-8\right)\ge 0,\\ x(x-4)+y(y-2)=a\,?\end{cases}$$

Ответ: $a = 0; a = 7{,}5$.

Решение. Рассмотрим выражение $A(x; y) = 3x^2+3xy+2y^2$ как квадратный трёхчлен относительно x. Его дискриминант равен $D = 9y^2 - 24y^2 = -15y^2$. При $y \ne 0$ дискриминант отрицателен, поэтому $A > 0$. Если $y = 0$, то $A = 3x^2$, т.е. $A > 0$ при $x \ne 0$ и $A = 0$ при $x = 0$. В итоге получаем, что выражение $A(x; y)$ обращается в ноль в точке $(0; 0)$ и положительно во всех остальных точках.

Следовательно, неравенство системы равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}3x^2+3xy+2y^2=0,\\ |x+y|\ge 8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=0,\\ x+y\ge 8,\\ x+y\le -8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=0,\\ y\ge 8-x,\\ y\le -8-x.\end{array}\right.$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих этой совокупности, на координатной плоскости. Получаем все точки, лежащие на прямой $y = 8 - x$ и выше неё, точки на прямой $y = -x - 8$ и ниже неё, а также точку $(0; 0)$.

Перейдём к уравнению $x(x-4)+y(y-2)=a$. Преобразуем левую часть, выделяя полные квадраты, и получаем $(x-2)^2+(y-1)^2 = a+5$. При $a < -5$ это уравнение задаёт пустое множество, при $a = -5$ – точку $T(2;1)$, а при $a > -5$ – окружность с центром в точке $T(2;1)$ радиуса $\sqrt{a+5}$.

Очевидно, при $a \le -5$ система не имеет решений. При $a > 5$ единственное решение возможно в двух случаях: окружность проходит через точку $K(0;0)$ или окружность касается прямой $y = 8 - x$. В первом случае радиус окружности должен быть равен длине отрезка TK, т.е. $\sqrt{a+5} = \sqrt{5}$, откуда $a = 0$. Во втором случае радиус равен расстоянию от точки T до прямой $x + y - 8 = 0$, т.е. $\sqrt{a+5} = \frac{|2+1-8|}{\sqrt{1+1}}$, откуда $a = 7{,}5$.

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $AK : KA_1$ и $BN : NB_1$, если $CP : PC_1 = 3 : 25$.

Ответ: $AK : KA_1 = 27 : 1$, $BN : NB_1 = 3 : 4$ *или* $AK : KA_1 = 3 : 4$, $BN : NB_1 = 27 : 1$.

Решение. Пусть, для определённости, ABC – нижнее основание призмы. Пусть α касается нижнего и верхнего оснований цилиндра в точках X и X_1 соответственно. Из симметрии, XX_1 пересекает ось цилиндра. Обозначив через X' проекцию точки X на нижнее основание; тогда XX' – диаметр нижнего основания.

Пусть K', N', P' – проекции точек K, N, P на осевое сечение цилиндра, содержащее XX_1 (тогда они лежат на XX_1), а A', B', C' – проекции точек A, B, C на XX'. Поскольку A, B, C – проекции точек K, N, P на нижнее основание, получаем, что A', B', C' также являются проекциями K, N, P (а также K', N', P') на XX'. Значит, $\frac{AK}{KA_1} = \frac{XK'}{K'X_1} = \frac{XA'}{A'X'}$ и, аналогично, $\frac{BN}{NB_1} = \frac{XB'}{B'X'}$ и $\frac{CP}{PC_1} = \frac{XC'}{C'X'}$.

Пусть теперь O – центр нижнего основания, и $\angle XOC = \varphi$. Без ограничения общности можно считать, что радиус нижнего основания равен 1. Тогда $XC' = 1 - \cos\varphi$. Поскольку $\angle AOC = \angle BOC = \frac{2\pi}{3}$, аналогично получаем, что длины отрезков XB' и XA' равны $1 - \cos\left(\varphi \pm \frac{2\pi}{3}\right)$.

Из условия получаем $XC' = 2 \cdot \frac{3}{3+25}$, значит, $\cos\varphi = \frac{11}{14}$. Тогда $\sin\varphi = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, откуда

$$\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\varphi\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\varphi\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{11}{14}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{5\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{13}{14} \text{ и}$$

$$\cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\varphi\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\varphi\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{11}{14}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{5\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{7}.$$

Значит, один из отрезков XA' и XB' равен $\frac{27}{14}$, а другой – $\frac{6}{7}$, откуда отношения $AK : KA_1$ и $BN : NB_1$ равны $3:4$ и $27:1$ (в каком-то порядке).

8. Дан правильный 18-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответ: 540.

Решение. Опишем окружность вокруг 18-угольника. Вписанный угол, равный 90°, опирается на диаметр, поэтому одна из диагоналей является диаметром окружности, а две другие вершины находятся по разные стороны от этого диаметра. Всего есть 9 диаметров; каждую из двух других вершин можно выбрать восемью способами. Тогда получается $9\cdot8\cdot8 = 576$ четвёрок точек. Но при таком подсчёте прямоугольники (т.е. четырёхугольники, у которых обе диагонали являются диаметрами) посчитаны дважды. Прямоугольников выходит $C_9^2 = 36$ штук, и в итоге получаем $576 - 36 = 540$ вариантов.

<u>БИЛЕТ 7</u>

1. Решите уравнение $\log_{\left(3^{x-3}\right)}\left((x-4)^2\right)+\log_{\left(9^{x-3}\right)}\left(x^4\right)=\dfrac{2}{x-3}$.

Ответ: $x=1$, $x=2\pm\sqrt{7}$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2}{x-3}\log_3|x-4|+\frac{4}{2(x-3)}\log_3|x|=\frac{2}{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_3|x-4|+\log_3|x|=1,\\ x-3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2\left|x^2-4x\right|=\log_3 3,\\ x\neq 3\end{cases}$$

Уравнение $\left|x^2-4x\right|=3$ эквивалентно совокупности двух уравнений $x^2-4x=-3$ и $x^2-4x=3$, решая которые, находим, что $x=1$, $x=3$, $x=2\pm\sqrt{7}$. Значение $x=3$ не входит в ОДЗ.

2. Решите уравнение $2\sqrt{6}\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{23+\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

Ответ: $x=-\pi+4\pi k, k\in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $23+\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)=24\cos^2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)$ при условии $\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)\geq 0$. С помощью формул приведения, формул понижения степени и формулы косинуса тройного угла получаем:

$$23-\cos 3x=12+12\cos(x+\pi),\ 11-4\cos^3 x+3\cos x=-12\cos x,\ 4\cos^3 x-15\cos x-11=0.$$

Обозначая $\cos x=y$ ($|y|\leq 1$), получаем уравнение $4y^3-15y-11=0$, одним из корней которого является $y=-1$. После деления на $(y+1)$ остаётся уравнение $4y^2-4y-11=0$. Его корни $\left(y=\dfrac{1\pm 2\sqrt{3}}{2}\right)$ по модулю больше единицы, следовательно, они не подходят.

Если $y=-1$, то $\cos x=-1$, $x=\pi+2\pi m, m\in Z$.

Подставляя найденные x в неравенство $\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)\geq 0$, получаем $\cos(\pi+\pi m)\geq 0$. Несложно видеть, что подходят только нечётные значения m, т.е. $m=2k-1, k\in Z$, откуда $x=-\pi+4\pi k, k\in Z$.

3. Решите неравенство $\left(\dfrac{2|2x-3|}{x^2+10}\right)^{x+\sqrt{x^2-3}}>1$.

Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup\left(-2;-\sqrt{3}\right]$.

Решение. Запишем неравенство в виде $\left(\dfrac{2|2x-3|}{x^2+10}\right)^{x+\sqrt{x^2-3}}>\left(\dfrac{2|2x-3|}{x^2+10}\right)^0$. Обозначим $f(x)=\dfrac{2|2x-3|}{x^2+10}$. Несложно видеть, что $f(x)$ положительна при всех x из ОДЗ (значение $x=\dfrac{3}{2}$ не входит в ОДЗ). Рассмотрим разность $f(x)-1=\dfrac{2|2x-3|-x^2-10}{x^2+10}$.

При $x\geq\dfrac{3}{2}$ она принимает вид $\dfrac{4x-6-x^2-10}{x^2+10}=\dfrac{-x^2+4x-16}{x^2+10}=\dfrac{-(x-2)^2-12}{x^2+10}$. Если $x<\dfrac{3}{2}$, то получаем $\dfrac{6-4x-x^2-10}{x^2+10}=\dfrac{-x^2-4x-4}{x^2+10}=-\dfrac{(x+2)^2}{x^2+10}$. Таким образом, рассматриваемая разность отрицательна при всех x, отличных от -2. Отсюда следует, что $f(x)<1$ при всех x, кроме $x=-2$.

Подстановкой убеждаемся, что $x=-2$ решением не является.

При всех остальных x неравенство равносильно каждому из следующих:

$$x+\sqrt{x^2-3}<0,\ \sqrt{x^2-3}<-x,\ \begin{cases}-x>0,\\ x^2-3\ge 0,\\ x^2-3<x^2,\end{cases}\quad x\le -\sqrt{3}.$$

Исключая значение $x=-2$, получаем $x\in(-\infty;-2)\cup\left(-2;-\sqrt{3}\right]$.

4. Число 51746 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 5174651746517465174651746517465174651746. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 219.

Решение. Для того, чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Для делимости на 2 нужно, чтобы последней цифрой числа была 0, 2, 4, 6 или 8. Значит, полученное число будет делиться на 2, если мы вычеркнем любые цифры, кроме двух последних. Перейдём к делимости на 3.

Если в числе заменить все цифры 7 и 4 на 1, цифры 6 на 0 и цифры 5 на 2, то остаток от деления числа на 3 не изменится (остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3). Таким образом, нужно узнать, сколькими способами можно вычеркнуть две цифры из числа $X=2111021110211102111021110211102111021110$ так, чтобы полученное число делилось на 3. Сумма цифр числа X равна 40. Чтобы после вычёркивания сумма цифр делилась на 3, мы можем вычеркнуть либо а) две двойки, либо б) единицу и ноль. Количество способов вычеркнуть две двойки равно $C_8^2=28$; количество способов вычеркнуть один ноль и одну единицу равно $C_8^1\cdot C_{24}^1=8\cdot 24=192$.

Две последние цифры вычёркивать нельзя, поэтому получаем $28+192-1=219$ способов.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC<AD$, $\angle ADC=90^\circ$. Точка K – середина отрезка CD. Известно, что окружность радиуса 3 проходит через точки A и B и касается стороны CD в точке K, а $\sin\angle KAD=\dfrac{1}{3}$. Найдите длины отрезков AB и CD, а также площадь трапеции.

Ответ: $AB=6$, $CD=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$; $S=8\sqrt{2}$.

Решение. Поскольку окружность касается *CD*, её центр *O* лежит на перпендикуляре к *CD* в точке *K*. С другой стороны, *O* лежит на серединном перпендикуляре к *AB*. Эти две прямые пересекаются в середине *AB*. Значит, *O* — середина *AB*, и *AB* — диаметр окружности, откуда $AB=2R=10$.

Обозначим $\angle BKC=\varphi$. Тогда дуга BK равна 2φ (теорема об угле между касательной и хордой), а $\angle BAK=\varphi$ (теорема о вписанном угле). Далее находим, что $\angle BKA=90^\circ$ (опирается на диаметр), $\angle DAK=90^\circ-\angle DKA=90^\circ-\left(180^\circ-\angle BKA-\angle BKC\right)=\varphi$. Значит, прямоугольные треугольники AKB, ADK и KCB подобны.

Вычисляем основания и высоту трапеции: $BK=AB\sin\varphi=2$, $BC=BK\sin\varphi=\dfrac{2}{3}$, $DK=CK=BK\cos\varphi=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$, $CD=2CK=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$, $AD=KD\operatorname{ctg}\varphi=\dfrac{16}{3}$. Тогда площадь трапеции S равна $\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{16}{3}+\dfrac{2}{3}\right)\cdot\dfrac{8\sqrt{2}}{3}=8\sqrt{2}$.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases}\left(x^2-4xy+7y^2\right)\left(10-|x-y|\right)\le 0,\\ x(x-2)+y(y+6)=a?\end{cases}$$

Ответ: $a=0; a=8$.

Решение. Рассмотрим выражение $A(x;\, y) = x^2 - 4xy + 7y^2$ как квадратный трёхчлен относительно x. Его дискриминант равен $D = 16y^2 - 28y^2 = -12y^2$. При $y \neq 0$ дискриминант отрицателен, поэтому $A > 0$. Если $y = 0$, то $A = x^2$, т.е. $A > 0$ при $x \neq 0$ и $A = 0$ при $x = 0$. В итоге получаем, что выражение $A(x;\, y)$ обращается в ноль в точке $(0;\, 0)$ и положительно во всех остальных точках.

Следовательно, неравенство системы равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 4xy + 7y^2 = 0, \\ |x - y| \geq 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0, \\ x - y \geq 10, \\ x - y \leq -10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0, \\ y \leq x - 10, \\ y \geq x + 10. \end{array}\right.$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих этой совокупности, на координатной плоскости. Получаем все точки, лежащие на прямой $y = x + 10$ и выше неё, точки на прямой $y = x - 10$ и ниже неё, а также точку $(0;\, 0)$.

Перейдём к уравнению $x(x-2) + y(y+6) = a$. Преобразуем левую часть, выделяя полные квадраты, и получаем $(x-1)^2 + (y+3)^2 = a + 10$. При $a < -10$ это уравнение задаёт пустое множество, при $a = -10$ – точку $T(1;\, -3)$, а при $a > -10$ – окружность с центром в точке $T(1;\, -3)$ радиуса $\sqrt{a+10}$.

Очевидно, при $a \leq -10$ система не имеет решений. При $a > -10$ единственное решение возможно в двух случаях: окружность проходит через точку $K(0;\, 0)$ или окружность касается прямой $y = x - 10$. В первом случае радиус окружности должен быть равен длине отрезка TK, т.е. $\sqrt{a+10} = \sqrt{10}$, откуда $a = 0$. Во втором случае радиус равен расстоянию от точки T до прямой $x - y - 10 = 0$, т.е. $\sqrt{a+10} = \dfrac{|1 + 3 - 10|}{\sqrt{1+1}}$, откуда $a = 8$.

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $CP : PC_1$ и $BN : NB_1$, если $AK : KA_1 = 1 : 12$.

Ответ: $CP : PC_1 = 25 : 27$, $BN : NB_1 = 49 : 3$ *или* $CP : PC_1 = 49 : 3$, $BN : NB_1 = 25 : 27$.

Решение. Пусть, для определённости, ABC – нижнее основание призмы. Пусть α касается нижнего и верхнего оснований цилиндра в точках X и X_1 соответственно. Из симметрии, XX_1 пересекает ось цилиндра. Обозначив через X' проекцию точки X на нижнее основание; тогда XX' – диаметр нижнего основания.

Пусть K', N', P' – проекции точек K, N, P на осевое сечение цилиндра, содержащее XX_1 (тогда они лежат на XX_1), а A', B', C' – проекции точек A, B, C на XX'. Поскольку A, B, C – проекции точек K, N, P на нижнее основание, получаем, что A', B', C' также являются проекциями K, N, P (а также K', N', P') на XX'. Значит, $\dfrac{AK}{KA_1} = \dfrac{XK'}{K'X_1} = \dfrac{XA'}{A'X'}$ и, аналогично, $\dfrac{BN}{NB_1} = \dfrac{XB'}{B'X'}$ и $\dfrac{CP}{PC_1} = \dfrac{XC'}{C'X'}$.

Пусть теперь O – центр нижнего основания, и $\angle XOA = \varphi$. Без ограничения общности можно считать, что радиус нижнего основания равен 1. Тогда $XA' = 1 - \cos\varphi$. Поскольку $\angle AOB = \angle AOC = \dfrac{2\pi}{3}$, аналогично получаем, что длины отрезков XB' и XC' равны $1 - \cos\left(\varphi \pm \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Из условия получаем $XA' = 2 \cdot \dfrac{1}{1+12}$, значит, $\cos\varphi = \dfrac{11}{13}$. Тогда $\sin\varphi = \dfrac{4\sqrt{3}}{13}$, откуда

$$\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\varphi\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\varphi\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{11}{13}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{4\sqrt{3}}{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{23}{26} \text{ и}$$

$$\cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\varphi\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\varphi\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{11}{13}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{4\sqrt{3}}{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{26}.$$

Значит, один из отрезков XA' и XC' равен $\frac{49}{26}$, а другой – $\frac{25}{26}$, откуда отношения $BN : NB_1$ и $CP : PC_1$ равны $25 : 27$ и $49 : 3$ (в каком-то порядке).

8. Дан правильный 20-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответ: 765.

Решение. Опишем окружность вокруг 20-угольника. Вписанный угол, равный 90°, опирается на диаметр, поэтому одна из диагоналей является диаметром окружности, а две другие вершины находятся по разные стороны от этого диаметра. Всего есть 10 диаметров; каждую из двух других вершин можно выбрать девятью способами. Тогда получается $10 \cdot 9 \cdot 9 = 810$ четвёрок точек. Но при таком подсчёте прямоугольники (т.е. четырёхугольники, у которых обе диагонали являются диаметрами) посчитаны дважды. Прямоугольников выходит $C_{10}^2 = 45$ штук, и в итоге получаем $810 - 45 = 765$ вариантов.

<u>БИЛЕТ 8</u>

1. Решите уравнение $\log_{\left(2^{x+1}\right)}\left(x^2\right)+\log_{\left(4^{x+1}\right)}\left((x+3)^4\right)=\dfrac{2}{x+1}$.

Ответ: $x=-2$, $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2}{x+1}\log_2|x|+\frac{4}{2(x+1)}\log_2|x+3|=\frac{2}{x+1}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\log_2|x|+\log_2|x+3|=2,\\ x+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}\log_2\left|x^2+3x\right|=\log_2 2,\\ x\neq -1\end{cases}$$

Уравнение $\left|x^2+3x\right|=2$ эквивалентно совокупности двух уравнений $x^2+3x=-2$ и $x^2+3x=2$, решая которые, находим, что $x=-1$, $x=-2$, $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$. Значение $x=-1$ не входит в ОДЗ.

2. Решите уравнение $\sqrt{29+\sin 3x}=\sqrt{30}\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: $x=\dfrac{3\pi}{2}+4\pi k,\ k\in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $29+\sin 3x=30\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$ при условии $\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\geq 0$. В левой части раскладываем синус тройного угла, а в правой части используем формулу понижения степени и формулу приведения, и получаем:

$$29+\sin 3x=15-15\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right),\ 14+3\sin x-4\sin^3 x=-15\sin x,\ 2\sin^3 x-9\sin x-7=0.$$

Обозначая $\sin x=y$ ($|y|\leq 1$), получаем уравнение $2y^3-9y-7=0$, одним из корней которого является $y=-1$. После деления на $(y+1)$ остаётся уравнение $2y^2-2y-7=0$. Его корни $\left(y=\dfrac{1\pm\sqrt{15}}{2}\right)$ по модулю больше единицы, следовательно, они не подходят.

Если $y=-1$, то $\sin x=-1$, $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in Z$.

Подставляя найденные x в неравенство $\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\geq 0$, получаем $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi m\right)\geq 0$. Несложно видеть, что подходят только нечётные значения m, т.е. $m=2k+1,\ k\in Z$, откуда $x=\dfrac{3\pi}{2}+4\pi k,\ k\in Z$.

3. Решите неравенство $\left(\dfrac{4|x+1|}{x^2+8}\right)^{-x+\sqrt{x^2-2}}>1$.

Ответ: $x\in\left[\sqrt{2};2\right)\cup(2;+\infty)$.

Решение. Запишем неравенство в виде $\left(\dfrac{4|x+1|}{x^2+8}\right)^{-x+\sqrt{x^2-2}}>\left(\dfrac{4|x+1|}{x^2+8}\right)^0$. Обозначим $f(x)=\dfrac{4|x+1|}{x^2+8}$. Несложно видеть, что $f(x)$ положительна при всех x из ОДЗ (значение $x=-1$ не входит в ОДЗ). Рассмотрим разность $f(x)-1=\dfrac{4|x+1|-x^2-8}{x^2+8}$.

При $x \ge -1$ она принимает вид $\dfrac{4x+4-x^2-8}{x^2+8} = \dfrac{-x^2+4x-4}{x^2+8} = \dfrac{-(x-2)^2}{x^2+8}$. Если $x < -1$, то получаем $\dfrac{-4x-4-x^2-8}{x^2+8} = \dfrac{-x^2-4x-12}{x^2+8} = \dfrac{-(x+2)^2-8}{x^2+8}$. Таким образом, рассматриваемая разность отрицательна при всех x, отличных от 2. Отсюда следует, что $f(x) < 1$ при всех x, кроме $x = 2$.

Подстановкой убеждаемся, что $x = 2$ решением не является.

При всех остальных x неравенство равносильно каждому из следующих:

$$-x + \sqrt{x^2-2} < 0,\quad \sqrt{x^2-2} < x,\quad \begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 2 \ge 0, \\ x^2 - 2 < x^2, \end{cases} \quad x \ge \sqrt{2}.$$

Исключая значение $x = 2$, получаем $x \in \left[\sqrt{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

4. Число 96182 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 9618296182961829618296182961829618296182. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 247.

Решение. Для того, чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Для делимости на 2 нужно, чтобы последней цифрой числа была 0, 2, 4, 6 или 8. Значит, полученное число будет делиться на 2, если мы вычеркнем любые цифры, кроме двух последних. Перейдём к делимости на 3.

Если в числе заменить все цифры 9 и 6 на 0, а цифры 8 на 2, то остаток от деления числа на 3 не изменится (остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3). Таким образом, нужно узнать, сколькими способами можно вычеркнуть две цифры из числа $X = 0012200122001220012200122001220012200122$ так, чтобы полученное число делилось на 3. Сумма цифр числа X равна 40. Чтобы после вычёркивания сумма цифр делилась на 3, мы можем вычеркнуть либо а) две двойки, либо б) единицу и ноль. Количество способов вычеркнуть две двойки равно $C_{16}^2 = 120$; количество способов вычеркнуть один ноль и одну единицу равно $C_{16}^1 \cdot C_8^1 = 16 \cdot 8 = 128$.

Две последние цифры вычёркивать нельзя, поэтому получаем $120 + 128 - 1 = 247$ способов.

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, причём $BC < AD$, $\angle BAD = 90^\circ$. Точка K – середина отрезка AB. Известно, что окружность радиуса 6 проходит через точки C и D и касается стороны AB в точке K, а $\cos\angle KCB = \dfrac{1}{3}$. Найдите длины отрезков CD и AB, а также площадь трапеции.

Ответ: $CD = 12;\ AB = \dfrac{16\sqrt{2}}{3};\ S = 32\sqrt{2}$.

Решение. Поскольку окружность касается *AB*, её центр *O* лежит на перпендикуляре к *AB* в точке *K*. С другой стороны, *O* лежит на серединном перпендикуляре к *CD*. Эти две прямые пересекаются в середине *CD*. Значит, *O* — середина *CD*, и *CD* — диаметр окружности, откуда $CD = 2R = 12$.

Обозначим $\angle AKD = \varphi$. Тогда дуга KD равна 2φ (теорема об угле между касательной и хордой), а $\angle KCD = \varphi$ (теорема о вписанном угле). Далее находим, что $\angle CKD = 90^\circ$ (опирается на диаметр), $\angle BCK = 90^\circ - \angle BKC = 90^\circ - \left(180^\circ - \angle CKD - \angle AKD\right) = \varphi$. Значит, прямоугольные треугольники DKA, DCK и KCB подобны.

Вычисляем основания и высоту трапеции: $CK = CD\cos\varphi = 4$, $BC = CK\cos\varphi = \dfrac{4}{3}$, $BK = AK = CK\sin\varphi = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$, $AB = 2BK = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$, $AD = AK\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{32}{3}$. Тогда площадь трапеции S равна $\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{4}{3}+\dfrac{32}{3}\right)\cdot\dfrac{16\sqrt{2}}{3} = 32\sqrt{2}$.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x;y)$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases}(2x^2-5xy+4y^2)(7-|x+y|)\le 0,\\ x(x-6)+y(y+4)=a\,?\end{cases}$$

Ответ: $a=0; a=5$.

Решение. Рассмотрим выражение $A(x;y)=2x^2-5xy+4y^2$ как квадратный трёхчлен относительно x. Его дискриминант равен $D=25y^2-32y^2=-7y^2$. При $y\ne 0$ дискриминант отрицателен, поэтому $A>0$. Если $y=0$, то $A=2x^2$, т.е. $A>0$ при $x\ne 0$ и $A=0$ при $x=0$. В итоге получаем, что выражение $A(x;y)$ обращается в ноль в точке $(0;0)$ и положительно во всех остальных точках.

Следовательно, неравенство системы равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}2x^2-5xy+4y^2=0,\\ |x+y|\ge 7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=0,\\ x+y\ge 7,\\ x+y\le -7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=0,\\ y\ge -x+7,\\ y\le -x-7.\end{array}\right.$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих этой совокупности, на координатной плоскости. Получаем все точки, лежащие на прямой $y=-x+7$ и выше неё, точки на прямой $y=-x-7$ и ниже неё, а также точку $(0;0)$.

Перейдём к уравнению $x(x-6)+y(y+4)=a$. Преобразуем левую часть, выделяя полные квадраты, и получаем $(x-3)^2+(y+2)^2=a+13$. При $a<-13$ это уравнение задаёт пустое множество, при $a=-13$ – точку $T(3;-2)$, а при $a>-13$ – окружность с центром в точке $T(3;-2)$ радиуса $\sqrt{a+13}$.

Очевидно, при $a\le -13$ система не имеет решений. При $a>-13$ единственное решение возможно в двух случаях: окружность проходит через точку $K(0;0)$ или окружность касается прямой $y=-x+7$. В первом случае радиус окружности должен быть равен длине отрезка TK, т.е. $\sqrt{a+13}=\sqrt{13}$, откуда $a=0$. Во втором случае радиус равен расстоянию от точки T до прямой $x+y-7=0$, т.е. $\sqrt{a+13}=\dfrac{|3-2-7|}{\sqrt{1+1}}$, откуда $a=5$.

7. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость α имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает рёбра AA_1, BB_1 и CC_1 в точках K, N, P соответственно. Найдите отношения $AK:KA_1$ и $BN:NB_1$, если $CP:PC_1=1:27$.

Ответ: $AK:KA_1=4:3$, $BN:NB_1=25:3$ *или* $AK:KA_1=25:3$, $BN:NB_1=4:3$.

Решение. Пусть, для определённости, ABC – нижнее основание призмы. Пусть α касается нижнего и верхнего оснований цилиндра в точках X и X_1 соответственно. Из симметрии, XX_1 пересекает ось цилиндра. Обозначив через X' проекцию точки X на нижнее основание; тогда XX' – диаметр нижнего основания.

Пусть K', N', P' – проекции точек K, N, P на осевое сечение цилиндра, содержащее XX_1 (тогда они лежат на XX_1), а A', B', C' – проекции точек A, B, C на XX'. Поскольку A, B, C – проекции точек K, N, P на нижнее основание, получаем, что A', B', C' также являются проекциями K, N, P (а также K', N', P') на XX'. Значит, $\dfrac{AK}{KA_1}=\dfrac{XK'}{K'X_1}=\dfrac{XA'}{A'X'}$ и, аналогично, $\dfrac{BN}{NB_1}=\dfrac{XB'}{B'X'}$ и $\dfrac{CP}{PC_1}=\dfrac{XC'}{C'X'}$.

Пусть теперь O – центр нижнего основания, и $\angle XOC=\varphi$. Без ограничения общности можно считать, что радиус нижнего основания равен 1. Тогда $XC'=1-\cos\varphi$. Поскольку $\angle AOC=\angle BOC=\dfrac{2\pi}{3}$, аналогично получаем, что длины отрезков XA' и XB' равны $1-\cos\left(\varphi\pm\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Из условия получаем $XC' = 2 \cdot \frac{1}{1+27}$, значит, $\cos\varphi = \frac{13}{14}$. Тогда $\sin\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{14}$, откуда

$$\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\varphi\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\varphi\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{13}{14}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{11}{14} \text{ и}$$

$$\cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\varphi\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\varphi\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{13}{14}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{7}.$$

Значит, один из отрезков XA' и XC' равен $\frac{25}{14}$, а другой – $\frac{8}{7}$, откуда отношения $AK:KA_1$ и $CP:PC_1$ равны $25:3$ и $4:3$ (в каком-то порядке).

8. Дан правильный 14-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответ: 231.

Решение. Опишем окружность вокруг 14-угольника. Вписанный угол, равный 90°, опирается на диаметр, поэтому одна из диагоналей является диаметром окружности, а две другие вершины находятся по разные стороны от этого диаметра. Всего есть 7 диаметров; каждую из двух других вершин можно выбрать шестью способами. Тогда получается $7 \cdot 6 \cdot 6 = 252$ четвёрки точек. Но при таком подсчёте прямоугольники (т.е. четырёхугольники, у которых обе диагонали являются диаметрами) посчитаны дважды. Прямоугольников выходит $C_7^2 = 21$ штук, и в итоге получаем $252 - 21 = 231$ вариант.