РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

М1. $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$. Т.е. уравнение примет вид $\cos 2x(1 - 8\sin 2x) = 0$. Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \arcsin\frac{1}{8} + \frac{\pi n}{2}$.

М2. Перейдем к основанию 6. $\log_6\left(6 \cdot \frac{x+3}{x+7}\right) = \log_6|x-1|$. При $x \ge 1$, то $6 \cdot \frac{x+3}{x+7} = x - 1$, $x = \pm 5$. Корень $x = -5$ – посторонний. При $x < 1$, то $6 \cdot \frac{x+3}{x+7} = -x + 1$, $x = -11$ $x = -1$.

М3. По условию задачи $BD < AC$, т.е. радиус окружности r меньше половины основания, поэтому точка O находится на продолжении BD (выше точки B). Пусть $AD = DC = a$, $OB = y$, тогда $OM = ON = 2ka$, $AM = CN = a$, $OD = y + 2r$. Из подобия треугольников DOC и NOO_1 получим: $y = 2kr$. Из треугольника O_1ON по теореме Пифагора получаем: $(y + r)^2 = r^2 + 4k^2a^2$.

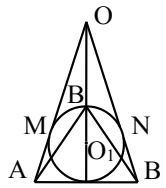

Рис.М3.

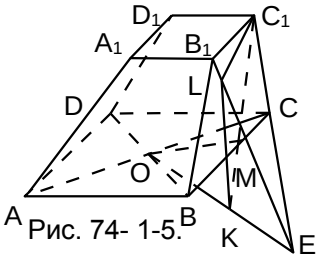

Рис. 74- 1-5.

Рис. М5.

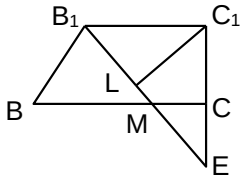

Рис М5.1.

Из треугольника ADB по теореме Пифагора получаем: $AB^2 = a^2 \cdot \frac{5k+1}{k+1}$.

Ответ: $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5k+1}{k+1}}$.

М4. Пусть t_0 и t_1 время прохождения пути AB соответственно автобусом и катером, а через t_2 – время, за которое катер проходит путь от B до A. Пусть S – расстояние от A до B. До первой встречи автобус прошел $\frac{5S}{9}$ и затратил на это время $\frac{5t_0}{9}$. За такое же время катер прошел расстояние S от A до B (за время t_1) и $\frac{4S}{9}$ по направлению от B до места встречи (за $\frac{4t_2}{9}$). Т.о. $\frac{5}{9} \cdot t_0 = t_1 + \frac{4}{9} \cdot t_2$. Аналогично, до второй встречи автобус затратил время $t_0 + \frac{1}{8} \cdot t_0$, а катер t_1 (на путь от A до B), затем t_2 (на путь от B до A) и, наконец, $\frac{7}{8} \cdot t_1$ (на путь от A до места встречи), поэтому $\frac{9}{8} \cdot t_0 = t_1 + t_2 + \frac{7}{8} \cdot t_1$. Первый раз

автобус прибыл в пункт B на 16 минут позже катера, т.е. $t_0 = t_1 + \frac{4}{15}$. Решая систему, находим $t_0 = \frac{2}{5}$ часа, $t_1 = \frac{2}{15}$ часа, $t_2 = \frac{1}{5}$ часа.

Автобус прибывает в пункт A, сделав четное число рейсов: m рейсов от A до B и такое же количество рейсов от B до A. На это он затрачивает время $2mt_0$. Возвращаясь в пункт A, катер также делает четное число рейсов: n рейсов от A до B и такое же количество рейсов от B до A. На это он затрачивает время $n(t_1 + t_2)$. Одновременное возвращение в пункт A задается уравнением $2mt_0 = n(t_1 + t_2)$, $m, n \in N$, т.е. $\frac{4}{5} \cdot m = \frac{1}{3} \cdot n$, $n = \frac{12}{5} \cdot m$. Наименьшее возможное число $n = 12$, при этом $m = 5$. Ответ 4 часа.

М5. Продолжив отрезки CC_1 и B_1M до пересечения, получим точку E (см. рис. М5). Соединим точку E с центром основания – точкой O. Отрезок OE принадлежит плоскости сечения AA_1C_1C, т.к. точка O лежит на AC, а точка E на прямой C_1C. Отрезок OE принадлежит плоскости сечения B_1MO, т.к. $E \in (B_1M)$. Т.о. $[OE] \subset AA_1C_1C \cap B_1MO$. Опустим из C_1 перпендикуляр C_1K на OE. Из точки K восстановим KL перпендикуляр (в плоскости B_1OE) до пересечения с отрезком B_1E. $\angle C_1KL$ – искомый. Найдем стороны $\triangle C_1KL$. $B_1C_1 = 2$, $MC = 1$, $B_1C_1 \parallel MC \Rightarrow MC$ – средняя линия $\triangle B_1C_1E \Rightarrow CE = CC_1 = 2$. Далее $ME = B_1M = \sqrt{5}$, т.к. $B_1E = \sqrt{C_1E^2 + C_1B_1^2} = 2\sqrt{5}$.

В $\triangle C_1OE$ отрезок $OC \perp C_1E$, при этом $C_1C = CE$, т.е. $\triangle OC_1E$ – равнобедренный, но $OC_1 = \sqrt{OC^2 + C_1C^2} = 4$, а $C_1E = 4$, т.е. $\triangle OC_1E$ – равносторонний. Т.к. $C_1K \perp OE \Rightarrow OK = KE = 2$, $C_1K = 2\sqrt{3}$.

В $\triangle C_1OE$ $ME = \sqrt{5}$, $OE = 4$, $OM = \sqrt{7}$. Пусть $\angle OME = \varphi$, тогда из теоремы косинусов получим $\cos\varphi = \frac{OE^2 + EM^2 - OM^2}{2 \cdot OE \cdot ME} = \frac{7}{4\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{31}}{7}$, т.к. $KL \perp OE$, то $KL = KE \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{31}}{7}$. $LE = \sqrt{KL^2 + KE^2} = \frac{8\sqrt{5}}{7}$.

Обозначим $\angle B_1EC_1 = \beta$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{MC}{DE} = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

$LC_1 = \sqrt{C_1E^2 + LE^2 - 2C_1E \cdot LE \cdot \cos\beta} = \frac{4\sqrt{13}}{7}$. Для нахождения искомого угла $\gamma = \angle C_1KL$ воспользуемся теоремой косинусов $\cos\gamma = \frac{KL^2 + C_1K^2 - C_1L^2}{2 \cdot KL \cdot C_1K} = \frac{9}{\sqrt{93}}$..

Ответ: $\cos\gamma = \frac{9}{\sqrt{93}}$ либо $\operatorname{tg}\gamma = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

М6. $B = x + x^2 + \cdots + x^{2013} = \frac{1 - x^{2014}}{1 - x} - 1 = \frac{1 - A}{1 - x} - 1$, $x = \frac{A - 1}{B + 1} + 1$.

М7. $n+k \le p \Leftrightarrow (n+k)^{n+k} \le p^{k+n}$ => $5(n+k)^{k+n} \le 12n^k + 8k^n$. Если n=k, то $5(2n)^{2n} \le 20n^n$ =>n=1

1) Пусть n≠k и n>1, k>1, тогда n+k>2 и $5(n^{n+k}+(k+n)n^{n+k-1}k+\cdots+k^{n+k})\leq 12n^k+8k^n$ => $\begin{cases}5n^{n+k}<12n^k\\5n^{n+k}<8k^n\end{cases}$ =>n=k=1, для $\forall n,k: n\geq 2, k\geq 2,$ этинеравенстваневыполняются.
Ответ: n=k=1, p=2.

M8.

(1) $\begin{cases}\sqrt{b!}=\frac{\sqrt{a!}+3}{\sqrt{a!}-1}\\\sqrt{c!}=\frac{\sqrt{b!}+3}{\sqrt{b!}-1}\\\sqrt{a!}=\frac{\sqrt{c!}+3}{\sqrt{c!}-1}\end{cases}$ <=>$f(f(f(\sqrt{a!})))=\sqrt{a!}$=> $f(\sqrt{a!})=\sqrt{a!}$

Имеем из (1): $\begin{cases}\sqrt{a!}\geq 1;\\\frac{\sqrt{a!}+3}{\sqrt{a!}-1}=\sqrt{a!}\end{cases}$ =>

=>$\left(\sqrt{a!}\right)^2-2\left(\sqrt{a!}\right)-3=0;$

Д/2=1+3=4;

$\sqrt{a!}$ = 1+2;

a!=9; a∈ ∅.

Ответ: нет решений в целых числах.

M9.

$\frac{1}{f(1)f(2)}=\frac{f(1)}{f(2)}$ $=> f^2(1)=1$ $=>$ $f(1)=1.$

$\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(2)f(3)}=\frac{f(2)}{f(3)}$, т.е. $f(3)+1=f^2(2).$

$\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(2)f(3)}+\frac{1}{f(3)f(4)}=\frac{f(3)}{f(4)};$ $\frac{f(2)}{f(3)}+\frac{1}{4f(3)}=\frac{f(3)}{4}$

$=> f(2)=2,\ f(3)=3.$

Докажем, что для $\forall n\in N\ f(n)=n.$ Предположим, что $f(n)=n$ верно и для $n\geq 4.$ Пусть предположение верно при k, тогда для $k+1$

$$\frac{1}{f(1)f(2)}+\frac{1}{f(2)f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(k-1)f(k)}=\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\cdots+\frac{1}{(k-1)*k}=1-\frac{1}{k}$$

$$=> 1-\frac{1}{k}+\frac{1}{f(k)f(k+1)}=\frac{f(k)}{f(k+1)};$$

$$1-\frac{1}{k}+\frac{1}{kf(k+1)}=\frac{k}{f(k+1)} \quad => \quad f(k+1)=k+1.$$

Ответ: $f(n)=n$.

М10.

1) $P(x)\equiv(x-x_1)Q_1(x)+P(x_1)\equiv(x-x_2)Q_2(x)+P(x_2)\equiv\cdots\equiv(x-x_n)Q_n(x)+P(x_n)$, где $Q_i(x)$ – многочлен степени $(n-1)$.
2) Пусть $a\in Z$ и $P(a)=0$ $(a=2)$ =>
$$\begin{cases}P(x_1)=-(2-x_1)Q_1(2)\\ \dots\\ P(x_n)=-(2-x_n)Q_n(2)\end{cases}$$
Перемножим их и получим $P(x_1)\dots P(x_n)=(-1)^nQ_1(2)\dots Q_n(2)$.(1)
Заметим, что $P(x_n)=q^{n-1}P(x_1)$ и$P(x_1)\dots P(x_n)=P^n(x_1)q^{\alpha}=(2^{5n})(1*2*3*4*5)^{\alpha}$ (4 различных делителя), у нас же $x_1=1, x_2=6, x_3=36,\dots$, но $|2-36|=17*2$, 17 – не входит в левую часть(1)
=> $n_{наиб}=2$
3) Ясно, что случаи: n=0,1 – не выполняются.
$P_2(x)=x^2+a_1x+a_2$
$P(2)=0$ => $0=4+2a_1+a_2$, $a_1=-131$
$P(1)=128$ => $128=1+a_1+a_2$, $a_2=127-a_1=258$
D= $a_1{}^2-4a_2>0$ =>не для всех $x\in R$ $P(x)\geq 0$
Ответ: таких n нет.

Ф1. $F_{сопр}=Av^2=mg$, $\frac{m_1}{m_2}=\frac{v_1{}^2}{v_2{}^2}$, $v_2=v_1\cdot\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}=\frac{5}{\sqrt{2}}\approx 3,5\,\frac{м}{сек}$.

Ф72-1-2. Из равенства парциальных давлений следует, что числа молей O_2 и H_2 в смеси одинаковы. В реакцию вступит весь водород и половина кислорода. Давление оставшегося водорода при температуре T_2 есть $(p_2)_{O_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p_1}{2}\cdot\frac{T_2}{T_1}\approx 0,31\ атм.$ Давление паров воды при температуре T_2 можно определить, если учесть, что число молей воды равно числу молей водорода и в два раза больше молей кислорода, вступившего в реакцию. Таким образом: $(p_2)_{H_2O}=\frac{p_1}{2}\cdot\frac{T_2}{T_1}\approx 0,62\ атм.$ Т.к. $(p_2)_{H_2O}<1\ атм$, то конденсации пара нет. При температуре давление насыщенных паров равно $1\ атм$.
$p_2=(p_2)_{O_2}+(p_2)_{H_2O}\approx 0,93\ атм$.

Ф3. Т.к. процесс перезарядки происходит медленно, потерями энергии на электромагнитное излучение можно пренебречь. Потерь на джоулево тепло тоже нет. Следовательно, электрическая энергия запасенная в конденсаторе

C_1, должна сохраняться: $\frac{C_1U_0^2}{2} = \frac{C_1U_1^2}{2} + \frac{C_2U_2^2}{2}$, кроме того сохраняется заряд: $C_1U_0 = C_1U_1 + C_2U_2$. Решая эту систему, находим $U_2 = \frac{2 \cdot C_1 \cdot U_0}{C_1 + C_2} = 200\ в$.

Результат не зависит от L. Индуктивность нужна в цепи для обеспечения медленной перезарядки.

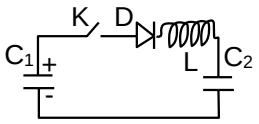

Рис Ф3.

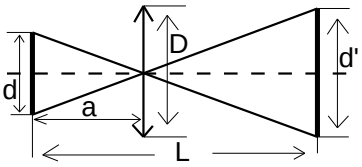

Рис. Ф4.

Ф4.На изображение падает тот же световой поток, что и на линзу. Равенство освещенностей , означает, что площади линзы и изображения одинаковы. Т.е. диаметр линзы и изображения диска одинаковы. Следовательно, диаметр линзы D равен диаметру изображения d'.

Можно записать пропорцию (см. рис Ф4) $\frac{a}{l-a} = \frac{d}{d'}$, а т.к. $d' = D$, $\frac{a}{l-a} = \frac{d}{D}$.

Из формулы линзы получим $\frac{1}{a} + \frac{1}{l-a} = \frac{1}{F}$. Из последних двух соотношений получим $F = \frac{ldD}{(D+d)^2} = \frac{10}{9}\ м$.

Ф5.Второй закон Ньютона для бруска:

$Mg - F_1 - F_2 = Ma$

В установившемся режиме $a = 0 \rightarrow F_1 + F_2 = F_{тр} = Mg$

Из $\frac{F_1}{F_2} = n$ следует $F_2 = \frac{Mg}{n+1}$

Обозначим длину бруска S. Тогда закон сохранения энергии: $F_{тр}S = N_1\frac{m_1V^2}{2} + N_2\frac{m_2V^2}{2}$, где N1 и N2 число цилиндров радиуса R и r.

$S = 2RN_1; S = 2rN_2$. Следовательно, $\frac{N_1}{N_2} = \frac{r}{R}$. Подставим в ЗСЭ и получим:

$V_{уст} = 2\sqrt{\frac{rMg}{\frac{r}{R}m_1 + m_2}}$

Ф6.В положении равновесия $mg = k_1\Delta x_0 + k_2\Delta x_0^2 + k_3\Delta x_0^3$.

Обозначим $\Delta x = \Delta x_0 + \Delta$.

Тогда равнодействующая все сил $F = mg - k_1\Delta x - k_2\Delta x^2 - k_3\Delta x^3$.

Подставим Δx и с учетом того, что Δ бесконечно малое отклонение от положения равновесия, $\Delta^2 \approx 0, \Delta^3 \approx 0$, получим: $F = -(k_1 + 2k_2\Delta x_0 + 3k_3\Delta x_0^2)\Delta = ma$.

Следовательно, мы получили уравнение колебаний. Можно найти период:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + 2k_2\Delta x_0 + 3k_3\Delta x_0^2}}$

Отчёт о Выездной физико-математической олимпиаде МФТИ

Дата проведения ☐☐.0☐.20☐☐ г. Номер региона ☐☐☐

Город ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

1. Проводившие студенты:

Служ. ☐☐

Фамилия И.О. Номер группы МФТИ

☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐ ☐☐. ☐☐☐

☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐ ☐☐. ☐☐☐

☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐ ☐☐. ☐☐☐

☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐ ☐☐. ☐☐☐

☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐ ☐☐. ☐☐☐

3. Итоги олимпиады:

Приняло участие ☐☐☐ школьников из ☐☐ школ.

Учащихся ЗФТШ: ☐☐☐ Впервые зарег. в Abitu.Net ☐☐☐

2. Адрес места проведения:

Номер учебного заведения ☐☐☐☐

Тип учебного заведения Школа ☐ Лицей ☐ Гимназия ☐ Центр образования ☐ Другое ☐

Улица ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Индекс ☐☐☐☐☐☐ Дом ☐☐☐☐ Корпус ☐☐☐☐

4. ФИО Директора школы:

Фамилия ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Имя ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Отчество ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

5. Замечания и пожелания:

_____

_____

_____

_____

М.П.

Директор школы _____

* Номер региона – для РФ код автомобильных номеров, Москва - 77, Московская область – 50, Белоруссия – 101, Украина – 102, Казахстан – 103, Молдавия -106.