Решения, выезд, вариант **Ш**

1. Решите неравенство $\log_{1/2}\left(\frac{x-5}{x+3}\right)-\log_{1/2}\left(\frac{x^2}{2}+4x+9\right)\le 2\log_4\left(x^2+5x+6\right)$.

Ответ: $x\in(-\infty;-3)\cup[7+\sqrt{87};+\infty)$

Решение. Находим ОДЗ: $x\in(-\infty;-3)\cup(5;+\infty)$.

Перепишем неравенство в виде $\log_{1/2}\left(\frac{x-5}{x+3}\right)+\log_{1/2}\left((x+2)(x+3)\right)\le\log_{1/2}\left(\frac{x^2}{2}+4x+9\right)$. На ОДЗ оно равносильно каждому из следующих неравенств:

$\log_{1/2}\left((x+2)(x-5)\right)\le\log_{1/2}\left(\frac{x^2}{2}+4x+9\right)$; $x^2-3x-10\ge\frac{x^2}{2}+4x+9$; $\frac{x^2}{2}-7x-19\ge 0$.

Последнее неравенство имеет решения $x\in(-\infty;7-\sqrt{87}]\cup[7+\sqrt{87};+\infty)$. Пересекая это множество с ОДЗ, получаем ответ.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases}\frac{5x}{y}-\frac{9y}{x}+10=\frac{6}{xy},\\ \frac{2x}{y}+\frac{3y}{x}+4=\frac{9}{xy}.\end{cases}$

Ответ: $(1;1),(-1;-1),(3;-1),(-3;1)$.

Решение. Из первого уравнения системы, умноженного на три, вычтем второе уравнение, умноженное на два: $\frac{11x}{y}+\frac{-33y}{x}+22=0$. Обозначим $\frac{x}{y}=t$ и получим уравнение $11t-\frac{33}{t}+22=0$, решая которое, находим, что $t=1$ или $t=-3$.

Если $t=1$, то $x=y$ и получаем две пары чисел $(1;1),(-1;-1)$.

Если $t=-3$, то $x=-3y$ и получаем две пары чисел $(3;-1),(-3;1)$.

3. Рассматриваются всевозможные правильные четырёхугольные пирамиды, у которых медианы боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

Ответ: $V=\frac{8a^3}{9\sqrt{3}}$, $\gamma=\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Решение. Пусть PO – высота правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$; K – середина ребра AD. Тогда $PK=a$. Пусть $\angle OKP=\beta$. Тогда $PO=a\sin\beta$, $KO=a\cos\beta$, площадь основания $S_{ABCD}=4a^2\cos^2\beta$, объём пирамиды $V_{PABCD}=\frac{1}{3}\cdot 4a^2\cos^2\beta\cdot a\sin\beta=\frac{4a^3}{3}\left(\sin\beta-\sin^3\beta\right)$.

Обозначим $\sin\beta=t$ и рассмотрим $f(t)=t-t^3$, где $t\in[0;1]$. $f'(t)=1-3t^2=3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+t\right)$. Поскольку $f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$, $f'(t)>0$ при $t<\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $f'(t)<0$ при $t>\frac{1}{\sqrt{3}}$, получаем, что функция $f(t)$ достигает своего наибольшего значения при $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Подставляя найденное значение $\sin\beta$ в формулу для объёма пирамиды, получаем $V_{\max}=\frac{8a^3}{9\sqrt{3}}$.

Для нахождения угла между соседними боковыми гранями пирамиды опустим перпендикуляры AH и CH из точек A и C на ребро PD. Тогда $\angle AHC=\gamma$ – искомый угол. Из прямоугольного треугольника POD находим, что его высота $OH = \dfrac{OP \cdot OD}{HP} = \dfrac{a\sin\beta \cdot a\sqrt{2}\cos\beta}{\sqrt{a^2\sin^2\beta + 2a^2\cos^2\beta}} = \dfrac{2a}{\sqrt{15}}$.

Следовательно, $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{AO}{OH} = \sqrt{5}$, $\cos\gamma = -\dfrac{2}{3}$.

4. Найдите наименьший корень уравнения $\operatorname{ctg}6x - \operatorname{tg}5x = \dfrac{1}{\cos 5x}$, принадлежащий отрезку $\left[\dfrac{8\pi}{17}; \dfrac{40\pi}{17}\right]$.

Ответ: $x = \dfrac{21\pi}{34}$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{\cos 6x}{\sin 6x} - \frac{\sin 5x}{\cos 5x} = \frac{1}{\cos 5x}, \qquad \frac{\cos 6x\cos 5x - \sin 6x\sin 5x}{\sin 6x\cos 5x} = \frac{1}{\cos 5x}, \qquad \frac{\cos 11x}{\sin 6x\cos 5x} = \frac{1}{\cos 5x}.$$

Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases}\cos 11x = \sin 6x,\\ \sin 6x\cos 5x \neq 0.\end{cases}$

Решаем первое уравнение системы:

$$\cos 11x = \cos\left(6x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 11x = 6x - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 11x = -6x + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}. \end{array}\right.$$

Решения первого уравнения совокупности не удовлетворяют условию $\cos 5x \neq 0$, следовательно, они не подходят. Второе уравнение даёт $x = \dfrac{\pi(1+4k)}{34}$. На данный в условии отрезок попадают числа $\dfrac{17\pi}{34}, \dfrac{21\pi}{34}, \dfrac{25\pi}{34}, \ldots$ Первое из них не удовлетворяет условию $\cos 5x \neq 0$ и, следовательно, не является решением уравнения. Число $\dfrac{21\pi}{34}$ удовлетворяет условию $\sin 6x\cos 5x \neq 0$ и является минимальным корнем на данном отрезке.

5. В трапеции $ABCD$ основание BC равно 5, боковая сторона AB равна 10. Биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке E, а прямую BC – в точке F, причём $AE \perp CD$, $EF = 4$. Найдите длины отрезков AE и AD, а также площадь трапеции.

Ответ: $DE = 9$, $AD = 15$, $S = 96$.

Решение. Так как $\angle BFA = \angle FAD = \angle FAB$, то ΔABF равнобедренный, $BF = AB = 10$; $CF = AB - BC = 5$, $CE = \sqrt{CF^2 - EF^2} = 3$. Пусть BT – высота треугольника ABF. Тогда из подобия прямоугольных треугольников BTF и CEF следует, что $FT = 2 \cdot FE = 8$.

Далее находим: $AT = TF = 8$, $TE = EF = 4$, $AE = 12$.

Из подобия треугольников AED и CEF ($k = AE : EF = 3$) следует, что $AD = 15$.

Высота трапеции равна сумме высот треугольников CEF и EAD, проведённых из вершины E. Высота EL треугольника CEF равна $EL = \dfrac{CE \cdot EF}{CF} = \dfrac{3 \cdot 4}{5} = \dfrac{12}{5}$. Высота трапеции $h = 4 \cdot EL = \dfrac{48}{5}$.

Площадь трапеции $S = \dfrac{1}{2}(5 + 15)\dfrac{48}{5} = 96$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (2a-2)x + a^2 - 2a - 3 = 0, \\ \sqrt{x^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (y-a)^2} = 4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a \in [-1; 3) \cup (3; 7]$.

Решение. Левая часть второго уравнения есть расстояние между точками $A(0;a)$ и $B(-4;a)$. Поскольку расстояние между точками A и B равно 4, второе уравнение системы задаёт отрезок AB, то есть множество точек вида $(t;a)$, где $-4 \le t \le 0$.

Решая первое уравнение как квадратное уравнение относительно x, находим, что $x_1 = -a-1$, $x_2 = -a+3$. Таким образом, первое уравнение задаёт две вертикальных прямых на плоскости. Для того чтобы система имела ровно одно решение, необходимо и достаточно, чтобы ровно одна из этих двух вертикальных прямых пересекала отрезок AB.

Первая прямая пересекает AB при $-4 \le x_1 \le 0$, т.е. при $-1 \le a \le 3$; вторая прямая – при $-4 \le x_2 \le 0$, т.е. при $3 \le a \le 7$. Следовательно, система имеет ровно одно решение при $a \in [-1;3) \cup (3;7]$.

7. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 456789 $\to$ 945678), и полученное шестизначное число прибавили к исходному числу. Какие числа из промежутка $[891870; 891899]$ могли получиться в результате сложения?

Ответ: 891880, 891891.

Решение. Пусть $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}$ – данное шестизначное число. Обозначим пятизначное число $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}$ через x. Тогда $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F} + \overline{F}\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E} = (10x+F)+(100000F+x) = 11x+100001F = 11(x+9091F)$. Таким образом, полученная сумма делится на 11. Из промежутка $[891870; 891899]$ на 11 делятся числа 891880, 891891.

Докажем, что эти числа могут быть получены в результате сложения. Для этого надо доказать, что каждое из уравнений

$$11(x+9091F) = 891880,$$
$$11(x+9091F) = 891891$$

имеет целочисленное решение, где x – пятизначное число, а F – однозначное число, не равное нулю. Для этого достаточно в каждом из уравнений подставить $F=1$ и убедиться, что получающееся значение x является пятизначным целым числом. Действительно, первому уравнению удовлетворяет пара $x = 71989$, $F=1$; второму – пара $x=71990$, $F=1$. Значит, если в качестве исходных чисел взять 719891, 719901, то в результате перестановки и сложения мы получим числа 891880, 891891.

8. На клетчатой доске размера 22×25 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 7 и 4 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 2592.

Решение. Пусть сторона длины 25 – горизонтальная, сторона длины 22 – вертикальная. Дополним каждую нужную тройку клеток четвёртой клеткой так, чтобы центры этих четырёх клеток образовывали прямоугольник 4×7. Достаточно посчитать количество k таких четвёрок и результат умножить на 4.

Пусть катет длины 7 направлен по вертикали. Тогда положение прямоугольника однозначно определяется его левой нижней вершиной, которая может быть расположена в любой из $22-7=15$ нижних строк доски и в любом из $25-4=21$ левых столбцов доски. Итого $15 \cdot 21 = 315$ вариантов.

Если катет длины 7 направлен по горизонтали, то аналогично находим количество способов: $(25-7)(22-4) = 324$.

Итак, $k = 324+315 = 639$; в ответе получаем $4k = 2556$.

Решения, выезд, вариант **И**

1. Решите неравенство $\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{x^2}{2}+8x+33\right)\le -\log_{1/4}\left(x^2+13x+42\right)+\log_4\left(\frac{x-1}{x+7}\right)$.

Ответ: $x\in(-\infty;-7)\cup[3+\sqrt{87};+\infty)$

Решение. Находим ОДЗ: $x\in(-\infty;-7)\cup(1;+\infty)$.

Перепишем неравенство в виде $\log_4\left(\frac{x^2}{2}+8x+33\right)\le\log_4\left((x+6)(x+7)\right)+\log_4\left(\frac{x-1}{x+7}\right)$. На ОДЗ оно равносильно каждому из следующих неравенств:

$\log_4\left(\frac{x^2}{2}+8x+33\right)\le\log_4\left((x+6)(x-1)\right)$; $\frac{x^2}{2}+8x+33\le x^2+5x-6$; $\frac{x^2}{2}-3x-39\ge 0$.

Последнее неравенство имеет решения $x\in(-\infty;3-\sqrt{87}]\cup[3+\sqrt{87};+\infty)$. Пересекая это множество с ОДЗ, получаем ответ.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases}\frac{5x}{y}+\frac{2y}{x}+1=8xy,\\ \frac{7x}{y}-\frac{y}{x}+6=12xy.\end{cases}$

Ответ: $(1;1),(-1;-1),\left(\frac{\sqrt{165}}{2};\frac{\sqrt{165}}{16}\right),\left(-\frac{\sqrt{165}}{2};-\frac{\sqrt{165}}{16}\right)$.

Решение. Из первого уравнения системы, умноженного на три, вычтем второе уравнение, умноженное на два: $\frac{x}{y}+\frac{8y}{x}-9=0$. Обозначим $\frac{x}{y}=t$ и получим уравнение $t+\frac{8}{t}-9=0$, решая которое, находим, что $t=1$ или $t=8$.

Если $t=1$, то $x=y$ и получаем две пары чисел $(1;1),(-1;-1)$.

Если $t=8$, то $x=8y$ и получаем две пары чисел $\left(\frac{\sqrt{165}}{2};\frac{\sqrt{165}}{16}\right),\left(-\frac{\sqrt{165}}{2};-\frac{\sqrt{165}}{16}\right)$.

3. Рассматриваются всевозможные правильные треугольные пирамиды, у которых медианы боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

Ответ: $V=\frac{2a^3}{3}$, $\gamma=120^\circ$.

Решение. Пусть PO – высота правильной треугольной пирамиды $PABC$; K – середина ребра AC. Тогда $PK=a$. Пусть $\angle OKP=\beta$. Тогда $PO=a\sin\beta$, $KO=a\cos\beta$, площадь основания $S_{ABC}=3\sqrt{3}a^2\cos^2\beta$, объём пирамиды $V_{PABC}=\frac{1}{3}\cdot3\sqrt{3}a^2\cos^2\beta\cdot a\sin\beta=a^3\sqrt{3}\left(\sin\beta-\sin^3\beta\right)$.

Обозначим $\sin\beta=t$ и рассмотрим $f(t)=t-t^3$, где $t\in[0;1]$. $f'(t)=1-3t^2=3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+t\right)$.

Поскольку $f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$, $f'(t)>0$ при $t<\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $f'(t)<0$ при $t>\frac{1}{\sqrt{3}}$, получаем, что функция $f(t)$ достигает своего наибольшего значения при $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Подставляя найденное значение $\sin\beta$ в формулу для объёма пирамиды, получаем $V_{\max}=\frac{2a^3}{3}$.

Для нахождения угла между соседними боковыми гранями пирамиды опустим перпендикуляры AH и CH из точек A и C на ребро PB. Тогда $\angle AHC = \gamma$ – искомый угол. Из треугольника PBK находим, что его высота $KH = \dfrac{OP \cdot KB}{BP} = \dfrac{a \sin \beta \cdot 3a \cos \beta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + 4a^2 \cos^2 \beta}} = \dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $\operatorname{tg} \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{AK}{HK} = \dfrac{a\sqrt{3} \cos \beta}{KH} = \sqrt{3}$, $\gamma = 120^\circ$.

4. Найдите наименьший корень уравнения $\operatorname{tg} 12x + \operatorname{tg} 7x = \dfrac{1}{\cos 7x}$, принадлежащий отрезку $\left[\dfrac{46\pi}{31}; \dfrac{92\pi}{31} \right]$.

Ответ: $x = \dfrac{97\pi}{62}$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{\sin 12x}{\cos 12x} + \frac{\sin 7x}{\cos 7x} = \frac{1}{\cos 7x}, \qquad \frac{\sin 12x \cos 7x + \cos 12x \sin 7x}{\cos 12x \cos 7x} = \frac{1}{\cos 7x}, \qquad \frac{\sin 19x}{\cos 12x \cos 7x} = \frac{1}{\cos 7x}.$$

Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases} \cos 12x = \sin 19x, \\ \cos 12x \cos 7x \neq 0. \end{cases}$

Решаем первое уравнение системы:

$$\cos 12x = \cos\left(19x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 12x = 19x - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 12x = -19x + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathrm{Z}. \end{array} \right.$$

Решения первого уравнения совокупности не удовлетворяют условию $\cos 7x \neq 0$, следовательно, они не подходят. Второе уравнение даёт $x = \dfrac{\pi(4k+1)}{62}$. На данный в условии отрезок попадают числа $\dfrac{93\pi}{62}, \dfrac{97\pi}{62}, \dfrac{101\pi}{62}, \ldots$ Первое из них не удовлетворяет условию $\cos 7x \neq 0$ и, следовательно, не является решением уравнения. Число $\dfrac{97\pi}{62}$ удовлетворяет условию $\cos 12x \cos 7x \neq 0$ и является минимальным корнем на данном отрезке.

5. В трапеции $ABCD$ основание BC равно 5, боковая сторона CD равна 10. Биссектриса угла ADC пересекает сторону AB в точке E, а прямую BC – в точке F, причём $DE \perp AB$, $BE = 4$. Найдите длины отрезков DE и AD, а также площадь трапеции.

Ответ: $DE = 9$, $AD = 15$, $S = 96$.

Решение. Так как $\angle CFD = \angle ADF = \angle CDF$, то ΔCFD равнобедренный, $CF = CD = 10$; $BF = CD - BC = 5$, $EF = \sqrt{BF^2 - BE^2} = 3$. Пусть CT – высота треугольника CFD. Тогда из подобия прямоугольных треугольников CTF и BEF следует, что $FT = 2 \cdot FE = 6$.

Далее находим: $DT = TF = 6$, $TE = EF = 3$, $DE = 9$.

Из подобия треугольников AED и BEF $(k = DE : EF = 3)$ следует, что $AD = 15$.

Высота трапеции равна сумме высот треугольников BEF и EAD, проведённых из вершины E. Высота EL треугольника CMK равна $EL = \dfrac{BE \cdot EF}{BF} = \dfrac{3 \cdot 4}{5} = \dfrac{12}{5}$. Высота трапеции $h = 4 \cdot EL = \dfrac{48}{5}$. Площадь трапеции $S = \dfrac{1}{2}(5 + 15)\dfrac{48}{5} = 96$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - (4a+2)x + 4a^2 + 4a - 3 = 0, \\ \sqrt{x^2 + (y+2a)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (y+2a)^2} = 4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a \in \left[-\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Решение. Левая часть второго уравнения есть расстояние между точками $A(0; -2a)$ и $B(-4; -2a)$. Поскольку расстояние между точками A и B равно 4, второе уравнение системы задаёт отрезок AB, то есть множество точек вида $(t; -2a)$, где $-4 \le t \le 0$.

Решая первое уравнение как квадратное уравнение относительно x, находим, что $x_1 = 2a - 1$, $x_2 = 2a + 3$. Таким образом, первое уравнение задаёт две вертикальных прямых на плоскости. Для того чтобы система имела ровно одно решение, необходимо и достаточно, чтобы ровно одна из этих двух вертикальных прямых пересекала отрезок AB.

Первая прямая пересекает AB при $-4 \le x_1 \le 0$, т.е. при $-\frac{3}{2} \le a \le \frac{1}{2}$; вторая прямая – при $-4 \le x_2 \le 0$, т.е. при $-\frac{7}{2} \le a \le -\frac{3}{2}$. Следовательно, система имеет ровно одно решение при $a \in \left[-\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

7. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 456789 $\to$ 945678), и полученное шестизначное число прибавили к исходному числу. Какие числа из промежутка $[375355; 375380]$ могли получиться в результате сложения?

Ответ: 375364, 375375.

Решение. Пусть $\overline{ABCDEF}$ – данное шестизначное число. Обозначим пятизначное число $\overline{ABCDE}$ через x. Тогда $\overline{ABCDEF} + \overline{FABCDE} = (10x + F) + (100000F + x) = 11x + 100001F = 11(x + 9091F)$. Таким образом, полученная сумма делится на 11. Из промежутка $[375355; 375380]$ на 11 делятся числа 375364, 375375.

Докажем, что эти числа могут быть получены в результате сложения. Для этого надо доказать, что каждое из уравнений

$$11(x + 9091F) = 375364,$$

$$11(x + 9091F) = 374375$$

имеет целочисленное решение, где x – пятизначное число, а F – однозначное число, не равное нулю. Для этого достаточно в каждом из уравнений подставить $F = 1$ и убедиться, что получающееся значение x является пятизначным целым числом. Действительно, первому уравнению удовлетворяет пара $x = 25033$, $F = 1$; второму – пара $x = 25034$, $F = 1$. Значит, если в качестве исходных чисел взять 250331, 250341, то в результате перестановки и сложения мы получим числа 375364, 375375.

8. На клетчатой доске размера 31×19 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 5 и 7 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 2592.

Решение. Пусть сторона длины 31 – горизонтальная, сторона длины 19 – вертикальная. Дополним каждую нужную тройку клеток четвёртой клеткой так, чтобы центры этих четырёх клеток образовывали прямоугольник 5×7. Достаточно посчитать количество k таких четвёрок и результат умножить на 4.

Пусть катет длины 5 направлен по вертикали. Тогда положение прямоугольника однозначно определяется его левой нижней вершиной, которая может быть расположена в любой из $19 - 5 = 14$ нижних строк доски и в любом из $31 - 7 = 24$ левых столбцов доски. Итого $14 \cdot 24 = 336$ вариантов.

Если катет длины 5 направлен по горизонтали, то аналогично находим количество способов: $(19 - 7)(31 - 5) = 312$.

Итак, $k = 336 + 312 = 648$; в ответе получаем $4k = 2592$.

Решения, выезд, вариант **Ф**

1. Решите неравенство $\log_{1/7}\left(\frac{x-1}{x-9}\right) \le \log_{1/7}\left(\frac{x^2}{2}-10x+51\right)+2\log_{49}\left(x^2-17x+72\right)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1-\sqrt{87}] \cup (9; +\infty)$

Решение. Находим ОДЗ: $x \in (-\infty; 1) \cup (9; +\infty)$.

Перепишем неравенство в виде $\log_{1/7}\left(\frac{x-1}{x-9}\right)+\log_{1/7}\left((x-8)(x-9)\right) \le \log_{1/7}\left(\frac{x^2}{2}-10x+51\right)$. На ОДЗ оно равносильно каждому из следующих неравенств:

$\log_{1/7}\left(\frac{x^2}{2}-10x+51\right) \ge \log_{1/7}\left((x-8)(x-1)\right)$; $\frac{x^2}{2}-10x+51 \le x^2-9x+8$; $\frac{x^2}{2}+x-43 \ge 0$.

Последнее неравенство имеет решения $x \in (-\infty; -1-\sqrt{87}] \cup [-1+\sqrt{87}; +\infty)$. Пересекая это множество с ОДЗ, получаем ответ.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{3x}{y}+\frac{4y}{x}+4=\frac{8}{xy}, \\ \frac{3x}{y}+\frac{2y}{x}+6=\frac{2}{xy}. \end{cases}$

Ответ: $(2; -1), (-2; 1), \left(\frac{2}{\sqrt{33}}; -3\sqrt{\frac{3}{11}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{33}}; 3\sqrt{\frac{3}{11}}\right)$

Решение. Из первого уравнения системы вычтем второе уравнение, умноженное на четыре: $\frac{-9x}{y}+\frac{-4y}{x}-20=0$. Обозначим $\frac{x}{y}=t$ и получим уравнение $-9t-\frac{4}{t}-20=0$, решая которое, находим, что $t=-2$ или $t=-\frac{2}{9}$.

Если $t=-2$, то $x=-2y$ и получаем две пары чисел $(-2; 1), (2; -1)$.

Если $t=-\frac{2}{9}$, то $x=\frac{-2y}{9}$ и получаем две пары чисел $\left(\frac{2}{\sqrt{33}}; -3\sqrt{\frac{3}{11}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{33}}; 3\sqrt{\frac{3}{11}}\right)$.

3. Рассматриваются всевозможные правильные шестиугольные пирамиды, боковые рёбра которых равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

Ответ: $V=\frac{a^3}{3}$, $\gamma=\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$.

Решение. Пусть PO – высота правильной шестиугольной пирамиды $PABCDEF$; отрезки AE и OF пересекаются в точке K. По условию $PF=a$. Пусть $\angle OFP=\beta$. Тогда $PO=a\sin\beta$, $FO=a\cos\beta$, площадь основания $S_{ABCDEF}=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\cos^2\beta$, объём пирамиды $V_{PABCDEF}=$ $=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\cos^2\beta\cdot a\sin\beta=\frac{\sqrt{3}a^3}{2}\left(\sin\beta-\sin^3\beta\right)$.

Обозначим $\sin\beta=t$ и рассмотрим $f(t)=t-t^3$, где $t\in[0;1]$. $f'(t)=1-3t^2=3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+t\right)$.

Поскольку $f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$, $f'(t)>0$ при $t<\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $f'(t)<0$ при $t>\frac{1}{\sqrt{3}}$, получаем, что функция $f(t)$

достигает своего наибольшего значения при $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Подставляя найденное значение $\sin\beta$ в формулу для объёма пирамиды, получаем $V_{\max}=\frac{a^3}{3}$.

Для нахождения угла между соседними боковыми гранями пирамиды опустим перпендикуляры AH и EH из точек A и E на ребро PF. Тогда $\angle AHE=\gamma$ – искомый угол. Из прямоугольного треугольника POF находим, что его высота $OL=\frac{OP\cdot OF}{PF}=\frac{a\sin\beta\cdot a\cos\beta}{a}=\frac{\sqrt{2}a}{3}$. $KH=\frac{1}{2}OL=\frac{\sqrt{2}a}{6}$

Следовательно, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{AK}{KH}=3$, $\cos\gamma=-\frac{4}{5}$.

4. Найдите наибольший корень уравнения $\operatorname{tg}7x-\operatorname{tg}10x=\frac{1}{\cos 7x}$, принадлежащий отрезку $\left[\frac{2\pi}{13};\frac{46\pi}{13}\right]$.

Ответ: $x=\frac{87\pi}{26}$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{\sin 7x}{\cos 7x}-\frac{\sin 10x}{\cos 10x}=\frac{1}{\cos 7x},\qquad \frac{\sin 7x\cos 10x-\cos 7x\sin 10x}{\cos 10x\cos 7x}=\frac{1}{\cos 7x},\qquad \frac{-\sin 3x}{\cos 10x\cos 7x}=\frac{1}{\cos 7x}.$$

Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases}\cos 10x=-\sin 3x,\\ \cos 10x\cos 7x\neq 0.\end{cases}$

Решаем первое уравнение системы:

$$\cos 10x=\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}10x=3x+\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ 10x=-3x-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z.\end{array}\right.$$

Решения первого уравнения совокупности не удовлетворяют условию $\cos 7x\neq 0$, следовательно, они не подходят. Второе уравнение даёт $x=\frac{\pi(4k-1)}{26}$. На данный в условии отрезок попадают числа $\frac{91\pi}{26},\frac{87\pi}{26},\frac{83\pi}{26},\ldots$ Первое из них не удовлетворяет условию $\cos 7x\neq 0$ и, следовательно, не является решением уравнения. Число $\frac{87\pi}{26}$ удовлетворяет условию $\cos 10x\cos 7x\neq 0$ и является максимальным корнем на данном отрезке.

5. Основание BC трапеции $ABCD$ равно 5, боковая сторона AB равна 10. Биссектриса угла BAD пересекает боковую сторону CD в точке M, а прямую BC – в точке K, причём $AK\perp CD$, $CM=3$. Найдите длины отрезков AM и AD, а также площадь трапеции.

Ответ: $AM=12$, $AD=15$, $S=96$.

Решение. Так как $\angle BKA=\angle KAD=\angle BAK$, то ΔABK равнобедренный, $BK=AB=10$; $CK=AB-BC=5$, $MK=\sqrt{CK^2-CM^2}=4$. Пусть BE – высота треугольника ABK. Тогда из подобия прямоугольных треугольников BEK и CMK следует, что $BE=2\cdot CM=6$.

Далее находим: $AE=EK$, $EM=MK=4$, $AM=3\cdot EM=12$.

Из подобия треугольников AMD и CMK ($k=AM:MK=3$) следует, что $AD=15$.

Высота трапеции равна сумме высот треугольников MCK и MAD, проведённых из вершины M. Высота MT треугольника CMK равна $MT=\frac{CM\cdot KM}{CK}=\frac{3\cdot 4}{5}=\frac{12}{5}$. Высота трапеции $h=4\cdot MT=\frac{48}{5}$.

Площадь трапеции $S=\frac{1}{2}(5+15)\frac{48}{5}=96$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+(2a+2)x+a^2+2a-3=0, \\ \sqrt{x^2+(y+a)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y+a)^2}=4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a\in[-7;-3)\cup(-3;1]$.

Решение. Левая часть второго уравнения есть расстояние между точками $A(0;-a)$ и $B(4;-a)$. Поскольку расстояние между точками A и B равно 4, второе уравнение системы задаёт отрезок AB, то есть множество точек вида $(t;-a)$, где $0\le t\le 4$.

Решая первое уравнение как квадратное уравнение относительно x, находим, что $x_1=1-a$, $x_2=-a-3$. Таким образом, первое уравнение задаёт две вертикальных прямых на плоскости. Для того чтобы система имела ровно одно решение, необходимо и достаточно, чтобы ровно одна из этих двух вертикальных прямых пересекала отрезок AB.

Первая прямая пересекает AB при $0\le x_1\le 4$, т.е. при $-3\le a\le 1$; вторая прямая – при $0\le x_2\le 4$, т.е. при $-7\le a\le -3$. Следовательно, система имеет ровно одно решение при $a\in[-7;-3)\cup(-3;1]$.

7. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 456789 $\to$ 945678), и полученное шестизначное число прибавили к исходному числу. Какие числа из промежутка $[427411;\,427434]$ могли получиться в результате сложения?

Ответ: 427416, 427427.

Решение. Пусть $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}$ – данное шестизначное число. Обозначим пятизначное число $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}$ через x. Тогда $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}+\overline{F}\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}=(10x+F)+(100000F+x)=11x+100001F=11(x+9091F)$. Таким образом, полученная сумма делится на 11. Из промежутка $[427411;\,427434]$ на 11 делятся числа 427416, 427427.

Докажем, что эти числа могут быть получены в результате сложения. Для этого надо доказать, что каждое из уравнений

$$11(x+9091F)=427416\ ,$$
$$11(x+9091F)=427427$$

имеет целочисленное решение, где x – пятизначное число, а F – однозначное число, не равное нулю. Для этого достаточно в каждом из уравнений подставить $F=1$ и убедиться, что получающееся значение x является пятизначным целым числом. Действительно, первому уравнению удовлетворяет пара $x=29765$, $F=1$; второму – пара $x=29766$, $F=1$. Значит, если в качестве исходных чисел взять 297651, 297661, то в результате перестановки и сложения мы получим числа 427416, 427427.

8. На клетчатой доске размера 28×24 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 9 и 5 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 2824.

Решение. Пусть сторона длины 28 – горизонтальная, сторона длины 24 – вертикальная. Дополним каждую нужную тройку клеток четвёртой клеткой так, чтобы центры этих четырёх клеток образовывали прямоугольник 5×9. Достаточно посчитать количество k таких четвёрок и результат умножить на 4.

Пусть катет длины 5 направлен по вертикали. Тогда положение прямоугольника однозначно определяется его левой нижней вершиной, которая может быть расположена в любой из $24-5=19$ нижних строк доски и в любом из $28-9=19$ левых столбцов доски. Итого $19\cdot 19=361$ вариант.

Если катет длины 5 направлен по горизонтали, то аналогично находим количество способов: $(28-5)(24-9)=345$.

Итак, $k=361+345=706$; в ответе получаем $4k=2824$.

Решения, выезд, вариант **<u>Р</u>**

1. Решите неравенство $\log_{1/5}\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)+2\log_{25}\left(\dfrac{x^2}{2}-6x+19\right)\le\log_5\left(x^2-9x+20\right)$.

Ответ: $x\in(-\infty;-5-\sqrt{87}]\cup(5;+\infty)$

Решение. Находим ОДЗ: $x\in(-\infty;-3)\cup(5;+\infty)$.

Перепишем неравенство в виде $\log_{1/5}\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)+\log_{1/5}\left((x-4)(x-5)\right)\le\log_{1/5}\left(\dfrac{x^2}{2}-6x+19\right)$. На ОДЗ оно равносильно каждому из следующих неравенств:

$\log_{1/5}\left(\dfrac{x^2}{2}-6x+19\right)\ge\log_{1/5}\left((x-4)(x+3)\right)$; $\dfrac{x^2}{2}-6x+19\le x^2-x-12$; $\dfrac{x^2}{2}+5x-31\ge 0$.

Последнее неравенство имеет решения $x\in(-\infty;-5-\sqrt{87}]\cup[-5+\sqrt{87};+\infty)$. Пересекая это множество с ОДЗ, получаем ответ.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{6x}{y}+\dfrac{2y}{x}-5=4xy,\\ \dfrac{7x}{y}+\dfrac{4y}{x}-10=3xy.\end{cases}$

Ответ: $(2;1),(-2;-1),\left(\tfrac{1}{2};1\right),\left(-\tfrac{1}{2};-1\right)$.

Решение. Из первого уравнения системы, умноженного на три, вычтем второе уравнение, умноженное на четыре: $\dfrac{-10x}{y}+\dfrac{-10y}{x}+25=0$. Обозначим $\dfrac{x}{y}=t$ и получим уравнение $-10t-\dfrac{10}{t}+25=0$, решая которое, находим, что $t=2$ или $t=\dfrac{1}{2}$.

Если $t=2$, то $x=2y$ и получаем две пары чисел $(2;1),(-2;-1)$.

Если $t=\dfrac{1}{2}$, то $x=\dfrac{y}{2}$ и получаем две пары чисел $\left(\tfrac{1}{2};1\right),\left(-\tfrac{1}{2};-1\right)$.

3. Рассматриваются всевозможные правильные четырёхугольные пирамиды, боковые рёбра которых равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

Ответ: $V=\dfrac{4a^3}{9\sqrt{3}}$, $\gamma=120^\circ$.

Решение. Пусть PO – высота правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$; боковое ребро $PA=a$. Пусть $\angle OAP=\beta$. Тогда $PO=a\sin\beta$, $AO=a\cos\beta$, площадь основания $S_{ABCD}=2a^2\cos^2\beta$, объём пирамиды $V_{PABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot 2a^2\cos^2\beta\cdot a\sin\beta=\dfrac{2a^3}{3}\left(\sin\beta-\sin^3\beta\right)$.

Обозначим $\sin\beta=t$ и рассмотрим $f(t)=t-t^3$, где $t\in[0;1]$. $f'(t)=1-3t^2=3\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-t\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+t\right)$.

Поскольку $f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$, $f'(t)>0$ при $t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $f'(t)<0$ при $t>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, получаем, что функция $f(t)$ достигает своего наибольшего значения при $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Подставляя найденное значение $\sin\beta$ в формулу для объёма пирамиды, получаем $V_{\max}=\dfrac{4a^3}{9\sqrt{3}}$.

Для нахождения угла между соседними боковыми гранями пирамиды опустим перпендикуляры AH и CH из точек A и C на ребро PD. Тогда $\angle AHC = \gamma$ – искомый угол. Из прямоугольного треугольника POD находим, что его высота $OH = OD \cdot \sin\beta = a\sin\beta\cos\beta = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. Следовательно, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{AO}{OH} = \sqrt{3}$, $\frac{\gamma}{2} = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$.

4. Найдите наибольший корень уравнения $\operatorname{ctg} 12x + \operatorname{tg} 5x = \frac{1}{\cos 5x}$, принадлежащий отрезку $\left[-\frac{47\pi}{19}; -\frac{9\pi}{19}\right]$.

Ответ: $x = -\frac{23\pi}{38}$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{\cos 12x}{\sin 12x} + \frac{\sin 5x}{\cos 5x} = \frac{1}{\cos 5x}, \qquad \frac{\cos 12x\cos 5x + \sin 12x \sin 5x}{\sin 12x\cos 5x} = \frac{1}{\cos 5x}, \qquad \frac{\cos 7x}{\sin 12x\cos 5x} = \frac{1}{\cos 5x}.$$

Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases}\cos 7x = \sin 12x,\\ \sin 12x\cos 5x \neq 0.\end{cases}$

Решаем первое уравнение системы:

$$\cos 7x = \cos\left(12x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x = 12x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 7x = -12x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Решения первого уравнения совокупности не удовлетворяют условию $\cos 5x \neq 0$, следовательно, они не подходят. Второе уравнение даёт $x = \frac{\pi(1+4k)}{38}$. На данный в условии отрезок попадают числа $-\frac{19\pi}{38}, -\frac{23\pi}{38}, -\frac{27\pi}{38}, \ldots$ Первое из них не удовлетворяет условию $\cos 5x \neq 0$ и, следовательно, не является решением уравнения. Число $-\frac{23\pi}{38}$ удовлетворяет условию $\sin 12x\cos 5x \neq 0$ и является максимальным корнем на данном отрезке.

5. В трапеции $ABCD$ основание BC равно 5, боковая сторона CD равна 10. Биссектриса угла ADC пересекает сторону AB в точке M, а прямую BC – в точке N, причём $DN \perp AM$, $MN = 3$. Найдите длины отрезков DN и AD, а также площадь трапеции.

Ответ: $DN = 12$, $AD = 15$, $S = 96$.

Решение. Так как $\angle DNC = \angle NDA = \angle NDC$, то ΔDNC равнобедренный, $CN = CD = 10$; $BN = CD - BC = 5$, $BM = \sqrt{BN^2 - NM^2} = 4$. Пусть CE – высота треугольника NCD. Тогда из подобия прямоугольных треугольников CEN и BMN следует, что $CE = 2 \cdot BM = 8$.

Далее находим: $DE = EN$, $EM = MN = 3$, $DN = 4 \cdot NM = 12$.

Из подобия треугольников AMD и BMN ($k = DM : MN = 3$) следует, что $AD = 15$.

Высота трапеции равна сумме высот треугольников BMN и MAD, проведённых из вершины M. Высота MT треугольника BMN равна $MT = \frac{BM \cdot NM}{BN} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$. Высота трапеции $h = 4 \cdot MT = \frac{48}{5}$. Площадь трапеции $S = \frac{1}{2}(5+15)\frac{48}{5} = 96$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2 + (4a+2)y + 4a^2 + 4a - 3 = 0, \\ \sqrt{(x+2a)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2a)^2 + (y-4)^2} = 4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a \in \left[-\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Решение. Левая часть второго уравнения есть расстояние между точками $A(-2a;0)$ и $B(-2a;4)$. Поскольку расстояние между точками A и B равно 4, второе уравнение системы задаёт отрезок AB, то есть множество точек вида $(-2a;t)$, где $0 \le t \le 4$.

Решая первое уравнение как квадратное уравнение относительно y, находим, что $y_1 = 1 - 2a$, $y_2 = -2a - 3$. Таким образом, первое уравнение задаёт две горизонтальных прямых на плоскости. Для того чтобы система имела ровно одно решение, необходимо и достаточно, чтобы ровно одна из этих двух горизонтальных прямых пересекала отрезок AB.

Первая прямая пересекает AB при $0 \le y_1 \le 4$, т.е. при $-\frac{3}{2} \le a \le \frac{1}{2}$; вторая прямая – при $0 \le y_2 \le 4$, т.е. при $-\frac{7}{2} \le a \le -\frac{3}{2}$. Следовательно, система имеет ровно одно решение при $a \in \left[-\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

7. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 456789 $\to$ 945678), и полученное шестизначное число прибавили к исходному числу. Какие числа из промежутка $[639619; 639647]$ могли получиться в результате сложения?

Ответ: 639628, 639639.

Решение. Пусть $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}$ – данное шестизначное число. Обозначим пятизначное число $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}$ через x. Тогда $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F} + \overline{F}\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E} = (10x + F) + (100000F + x) = 11x + 100001F = 11(x + 9091F)$. Таким образом, полученная сумма делится на 11. Из промежутка $[639619; 639647]$ на 11 делятся числа 639628, 639639.

Докажем, что эти числа могут быть получены в результате сложения. Для этого надо доказать, что каждое из уравнений

$$11(x + 9091F) = 639628,$$
$$11(x + 9091F) = 639639$$

имеет целочисленное решение, где x – пятизначное число, а F – однозначное число, не равное нулю. Для этого достаточно в каждом из уравнений подставить $F = 1$ и убедиться, что получающееся значение x является пятизначным целым числом. Действительно, первому уравнению удовлетворяет пара $x = 49057$, $F = 1$; второму – пара $x = 49058$, $F = 1$. Значит, если в качестве исходных чисел взять 490571, 490581, то в результате перестановки и сложения мы получим числа 639628, 639639.

8. На клетчатой доске размера 34×27 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 3 и 11 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 4192.

Решение. Пусть сторона длины 34 – горизонтальная, сторона длины 27 – вертикальная. Дополним каждую нужную тройку клеток четвёртой клеткой так, чтобы центры этих четырёх клеток образовывали прямоугольник 3×11. Достаточно посчитать количество k таких четвёрок и результат умножить на 4.

Пусть катет длины 3 направлен по вертикали. Тогда положение прямоугольника однозначно определяется его левой нижней вершиной, которая может быть расположена в любой из $27 - 3 = 24$ нижних строк доски и в любом из $34 - 11 = 23$ левых столбцов доски. Итого $23 \cdot 24 = 552$ варианта.

Если катет длины 3 направлен по горизонтали, то аналогично находим количество способов: $(34 - 3)(27 - 11) = 496$.

Итак, $k = 496 + 552 = 1048$; в ответе получаем $4k = 4192$.