10.1. Газ

Сжимая и нагревая идеальный газ, его объём уменьшили на 20%, а давление увеличили на 50%. На сколько процентов увеличилась средняя квадратичная скорость молекул газа? Ответ округлить до целых.

Решение. У идеального газа с температурой T и молярной массой μ средняя квадратичная скорость $v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$. С учётом уравнения состояния $PV = \frac{m}{\mu}RT$ получаем зависимость скорости от давления P, объёма V и массы m газа:

$$v = \sqrt{\frac{3PV}{m}}.$$

Нужно найти

$$x = \frac{v_2 - v_1}{v_1} = \frac{v_2}{v_1} - 1 = \sqrt{\frac{P_2V_2}{P_1V_1}} - 1.$$

По условию $V_2 = 0{,}8V_1$, $P_2 = 1{,}5P_1$. Тогда $x \approx 0{,}1$, т.е. средняя квадратичная скорость увеличилась на 10%.

10.2. Вода и лёд

В калориметр (теплоизолированный сосуд) поместили 30 г льда при температуре -20 °C и 50 г воды при температуре 60 °C. Найдите установившуюся температуру. Удельные теплоёмкости льда и воды $C_л = 2{,}1\ \frac{Дж}{г\cdot К}$ и $C_в = 4{,}2\ \frac{Дж}{г\cdot К}$. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330\ \frac{Дж}{г}$. Ответ дать в градусах Цельсия, округлив до целых.

Решение. У нас $t_{-20} = -20$ °C, $t_0 = 0$ °C, $t_{60} = 60$ °C, $m_1 = 30$ г, $m_2 = 50$ г.

На нагревание льда от -20 °C до 0 °C понадобится количество теплоты

$$Q_1 = m_1C_л(t_0 - t_{-20}) = 1260\ Дж.$$

Чтобы затем расплавить весь лёд требуется

$$Q_2 = \lambda m_1 = 9900\ Дж.$$

При охлаждении воды от 60 °C до 0 °C выделится

$$Q_3 = m_2C_в(t_{60} - t_0) = 12600\ Дж.$$

Поскольку $Q_3 > Q_2 + Q_1$, то окончательная температура θ смеси будет выше 0 °C. Имеем

$$m_2C_в(t_{60} - \theta) = Q_1 + Q_2 + m_1C_в\theta.$$

Окончательно

$$\theta = \frac{Q_3 - (Q_1 + Q_2)}{(m_1 + m_2)C_в} \approx 4\ °C.$$

Примечание. В зависимости от соотношения между значениями Q_1, Q_2 и Q_3 температура θ смеси может быть выше 0 °C, равна 0 °C или ниже 0 °C.

10.3. Заряды

В двух вершинах квадрата, лежащих на диагонали квадрата, находятся точечные заряды q и $2q$. В третьей вершине находится точечный заряд $3q$. Найдите напряжённость (модуль) электрического поля в четвёртой вершине. Известно, что $q = 2$ нКл, длина стороны квадрата 10 см. Ответ выразить в килоньютонах на кулон (кН/Кл), округлив до десятых.

Решение. Направим ось x через заряд q и четвёртую вершину квадрата со стороной a, а ось y через заряд $2q$ и четвёртую вершину. Проекции напряжённости поля на эти оси

$$E_x = \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\frac{kq}{a^2}, \qquad E_y = \left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\frac{kq}{a^2}.$$

Напряжённость

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{kq}{a^2}\sqrt{\frac{29}{4} + \frac{9\sqrt{2}}{2}} \approx 6{,}6\ \frac{\text{кН}}{\text{Кл}}.$$

10.4. Удар

На гладкой горизонтальной поверхности расположены неподвижный шарик массой $2m$ и движущийся со скоростью 6 м/с шарик массой m. Происходит центральный не вполне упругий удар, так что в тепло переходит только 3/4 от энергии, которая перешла бы в тепло при абсолютно неупругом ударе. Найдите скорость (по модулю) налетающего шарика после удара. Ответ выразите в м/с.

Решение. Так как суммарный импульс системы не равен нулю, в тепло не может перейти вся кинетическая энергия налетающего шарика, это противоречило бы закону сохранения импульса. Связанных с этим обстоятельством довольно громоздких вычислений можно избежать, если перейти в инерциальную систему отсчёта, в которой суммарный импульс равен нулю, т.е. в систему центра масс. Количество выделившейся теплоты от выбора системы отсчёта не зависит.

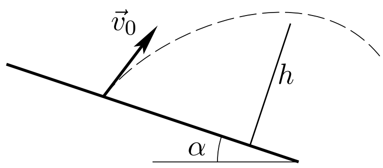
Будем считать, что налетающий шарик двигался слева направо. Скорость центра масс в лабораторной системе отсчёта (далее — ЛСО) равна

$$u = \frac{mv_0 + 0}{m + 2m} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

В системе отсчёта, связанной с центром масс (СЦМ) налетающий шарик имеет скорость $6 - 2 = 4$ м/с вправо, а второй шарик 2 м/с влево. Можно убедиться, что суммарный импульс действительно равен нулю. По условию, после удара должна остаться только четверть кинетической энергии, значит скорости после удара уменьшаться вдвое (скорости связаны условием равенства нулю суммарного импульса, поэтому они не могут меняться независимо), т.е. скорость первого шарика 2 м/с влево, а второго 1 м/с вправо. В ЛСО скорости шариков получаются $-2 + 2 = 0$ и $1 + 2 = 3$ м/с. Таким образом, ответ: 0 м/с.

Формально существует второе решение: шарики после удара движутся с вдвое меньшими скоростями в прежнем направлении. Для этого они должны либо как-то пройти сквозь друг друга, либо слипнуться-перевернуться-отвалиться. При центральном ударе такое невозможно, поэтому второе решение отпадает.

10.5. Перелёт



Плоская поверхность горы наклонена под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Перпендикулярно поверхности установлен тонкий забор, высшая точка которого находится на расстоянии $h = 7$ м от поверхности горы. Требуется перебросить через забор маленький камень, бросив его с поверхности горы. Найдите минимальную начальную скорость, при которой это можно сделать, если место броска и направление начальной скорости можно выбирать произвольно. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2, сопротивление воздуха не учитывать. Ответ выразите в м/с и округлите до целых.

Решение. Направим ось z перпендикулярно поверхности горы и рассмотрим движение проекции камня на ось z. Максимальное значение координаты z равно

$$z_{\max} = \frac{v_{0z}^2}{2|a_z|} = \frac{v_{0z}^2}{2g\cos\alpha}.$$

Если это значение меньше h, камень заведомо не сможет перелететь забор. Учитывая, что $v_{0z} \leqslant v_0$, отсюда получаем, что при $v_0^2 < 2gh\cos\alpha$ перелёт невозможен. При $v_0^2 = 2gh\cos\alpha$ перелёт возможен. Для этого достаточно направить начальную скорость перпендикулярно поверхности горы и выбрать место броска так, чтобы максимальное значение z достигалось как раз в верхней точке забора. Таким образом,

$$v_{0\,\min} = \sqrt{2gh\cos\alpha} \approx 11\ \text{м/с}.$$