РЕШЕНИЕ БИЛЕТА Ш (ВЫЕЗД)

1. Решите систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sqrt{y^2 - \frac{2x}{y}} & = & x - y, \\ x^2 + \frac{2}{y^2} & = & y^2 + 1. \end{array} \right.$$

Ответ: $(0\,, -1)$, $\quad \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $\quad \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

2. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{(x-1)}\left(\frac{5}{2} - x\right)} \leq 1.$$

Ответ: $\left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 2\right) \cup \left(2, \frac{5}{2}\right)$.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{8\operatorname{tg} x + 22\operatorname{ctg} x} = -\sqrt{15}\left(\sin x + \cos x\right).$$

Ответ: $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \quad \operatorname{arctg} 2 + \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

4. В треугольнике ABC окружность радиуса $\frac{13}{3}$ с центром на отрезке BC проходит через точку B и касается отрезка AC в точке D такой, что угол ADB равен $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$. Найдите высоту BF треугольника ABC и длину отрезка CD. Найдите площадь треугольника ABC, если длины отрезков AB и CD равны.

Ответ: $BF = 6, \quad CD = \frac{52}{5}, \quad S = \frac{6}{5}\left(36 + \sqrt{451}\right)$.

5. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \left|b - x^2\right|, \\ y & = & a(x - b) \end{array} \right.$$

имеет решение при любом значении параметра a.

Ответ: $b \in [0, 1]$.

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 1, боковое ребро равно 2. Сфера с центром O на плоскости CDS касается рёбер SA, SB и AB. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ABC и ADS, а также радиус сферы.

Ответ: $\rho(O, ABC) = \frac{1}{13}\sqrt{\frac{7}{2}}, \quad \rho(O, ADS) = \frac{2}{13}\sqrt{\frac{42}{5}}, \quad R = \frac{3\sqrt{71}}{26}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА И (ВЫЕЗД)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{4y^2+\frac{x}{y}} &= -x-2y, \\ x^2+\frac{1}{2y^2} &= 4y^2+1. \end{cases}$$

Ответ: $\left(0\,,\,-\frac{1}{2}\right)$, $\quad\left(-\sqrt{2}\,,\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\quad\left(\sqrt{2}\,,\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{\left(x-\frac{5}{8}\right)}(2-x)} \le 1.$$

Ответ: $\left(\frac{5}{8},1\right)\cup\left[\frac{1}{8}+\sqrt{\frac{13}{8}},\frac{13}{8}\right)\cup\left(\frac{13}{8},2\right)$.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{4\operatorname{tg}x-14\operatorname{ctg}x}=\sqrt{5}\,(\sin x-\cos x)\,.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $\quad\operatorname{arctg}2+2\pi k$, $\quad k\in\mathbb{Z}$.

4. В треугольнике ABC окружность радиуса $\frac{13}{2\sqrt{3}}$ с центром на отрезке AB проходит через точку A и касается отрезка BC в точке D такой, что угол ADC равен $\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$. Найдите высоту AF треугольника ABC и длину отрезка BD. Найдите площадь треугольника ABC, если длины отрезков AC и BD равны.

Ответ: $AF=3\sqrt{3}$, $\quad BD=\frac{26\sqrt{3}}{5}$, $\quad S=\frac{9}{10}\left(36+\sqrt{451}\right)$.

5. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x &= \left|b+y^2\right|, \\ y &= a\left(x-b^2\right) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра a.

Ответ: $b\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 1, боковое ребро равно 3. Сфера с центром O на плоскости ADS касается рёбер SB, SC и BC. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ABC и ABS, а также радиус сферы.

Ответ: $\rho(O,ABC)=\frac{1}{11}\sqrt{\frac{17}{2}}$, $\quad\rho(O,ABS)=\frac{1}{11}\sqrt{\frac{170}{7}}$, $\quad R=\frac{5\sqrt{19}}{22}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА Φ (ВЫЕЗД)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - \frac{32x}{y}} &= 4x - y, \\ 4x^2 + \frac{8}{y^2} &= \frac{y^2}{4} + 1. \end{cases}$$

Ответ: $(0\,,\,-2)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,2\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,-2\sqrt{2}\right)$.

2. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{\left(x+\frac{1}{4}\right)}(1-x)} \leq 1.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{4}, 0\right) \cup \left[-\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right)$.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{7\,\mathrm{tg}\,x + 33\,\mathrm{ctg}\,x} = 2\sqrt{5}\,(\sin x + \cos x)\,.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $\mathrm{arctg}\,3 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. В треугольнике ABC окружность радиуса $\frac{13}{2}$ с центром на отрезке AC проходит через точку C и касается отрезка AB в точке D такой, что угол BDC равен $\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$. Найдите высоту CF треугольника ABC и длину отрезка AD. Найдите площадь треугольника ABC, если длины отрезков AD и BC равны.

Ответ: $CF = 9$, $AD = \frac{78}{5}$, $S = \frac{27}{10}\left(36 + \sqrt{451}\right)$.

5. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y &= -\left|b + x^2\right|, \\ y &= a(x+b) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра a.

Ответ: $b \in [-1, 0]$.

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 2, боковое ребро равно 5. Сфера с центром O на плоскости ABS касается рёбер SC, SD и CD. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ABC и BCS, а также радиус сферы.

Ответ: $\rho(O, ABC) = \frac{\sqrt{23}}{11}$, $\rho(O, BCS) = \frac{5}{11}\sqrt{\frac{23}{6}}$, $R = \frac{4\sqrt{29}}{11}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА P (ВЫЕЗД)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2+\frac{x}{2y}} & = & -x-y, \\ 4x^2+\frac{1}{2y^2} & = & 4y^2+1. \end{cases}$$

Ответ: $\left(0\,,\,-\frac{1}{2}\right),\quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

2. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{\left(x+\frac{5}{8}\right)}\left(\frac{1}{2}-x\right)} \le 1.$$

Ответ: $\left(-\frac{5}{8},-\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{9}{8}+\sqrt{\frac{11}{8}},\frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right).$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{2\operatorname{tg}x - 12\operatorname{ctg}x} = \sqrt{5}\left(\cos x - \sin x\right).$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\quad \operatorname{arctg}3+\pi+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$

4. В треугольнике ABC окружность радиуса $\frac{13}{3\sqrt{3}}$ с центром на отрезке AC проходит через точку A и касается отрезка BC в точке D такой, что угол ADB равен $\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$. Найдите высоту AF треугольника ABC и длину отрезка CD. Найдите площадь треугольника ABC, если длины отрезков AB и CD равны.

Ответ: $AF=2\sqrt{3},\quad CD=\frac{52}{5\sqrt{3}},\quad S=\frac{2}{5}\left(36+\sqrt{451}\right).$

5. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x & = & -\left|b-y^2\right|, \\ y & = & a\left(x+b^2\right) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра a.

Ответ: $b\in(-\infty,-1]\cup[0,+\infty).$

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 1, боковое ребро равно 4. Сфера с центром O на плоскости BCS касается рёбер SA, SD и AD. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ABC и CDS, а также радиус сферы.

Ответ: $\rho(O,ABC)=\frac{5}{61}\sqrt{\frac{31}{2}},\quad \rho(O,CDS)=\frac{4\sqrt{434}}{183},\quad R=\frac{7\sqrt{311}}{122}.$