Преобразование Фурье.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$ и абсолютно интегрируема на любом отрезке $[a;b] \subset \mathbb{R}$ [1].

Интегралом в смысле главного значения v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется предел интегралов $\int_{-T}^{+T} f(x)dx$ при $T \to +\infty$.

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{+T} f(x)dx.$$

Замечание. Если сходится несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, то v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ существует и интегралы равны.

Обратное неверно, например, v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} xdx = 0$, но интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} xdx$ расходится.

Определение 2. Пусть комплекснозначная функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$ и абсолютно интегрируема на любом отрезке $[a;b] \subset \mathbb{R}$.

Преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется функция $F[f](y)$, определяемая формулой:

$$F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx. \tag{1}$$

Определение 3. Обратным преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется функция $F^{-1}[f](y)$, определяемая формулой:

$$F^{-1}[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy}dx. \tag{2}$$

Если в точке $y \in \mathbb{R}$ не существует интеграл в смысле главного значения, записанный в формуле (1) или (2), то в этой точке $F\left[f\right](y)$ или $F^{-1}\left[f\right](y)$ соответственно не существует.

[1] см. Комментарий 1.

Замечание. Если $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то, так как $|f(x)e^{\pm ixy}| = |f(x)|$, то несобственные интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{\pm ixy}dx$ сходятся по признаку Вейерштрасса. При этом интегралы в смысле главного значения совпадают с соответствующими несобственными интегралами.

Теорема 1. (О непрерывности.)
Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции на $\mathbb{R}$ есть непрерывная функция.

Теорема 2. (О взаимно обратных преобразованиях Фурье.)
1) Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и в точке x_0 существуют односторонние пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ и односторонние производные[2] $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$, то

$$F^{-1}\left[F(f)\right](x_0) = F\left[F^{-1}(f)\right](x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0+0) + f(x_0-0)\right).$$

2) Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и непрерывна на $\mathbb{R}$ и в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ существуют односторонние производные $f'_\pm(x)$, то

$$F^{-1}\left[F(f)\right](x) = F\left[F^{-1}(f)\right](x) = f(x).$$

Лемма 1. (Преобразование Фурье четной и нечетной функций.)
Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на любом отрезке $[a;b] \subset \mathbb{R}$.

1) Если $f(x)$ четная, то

$$F[f](x) = F^{-1}[f](x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)\cos xy dx. \tag{3}$$

2)Если $f(x)$ нечетная, то

$$F[f](x) = -F^{-1}[f](x) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)\sin xy dx.$$

[2]см. Комментарий 2.

Теорема 3. (Преобразование Фурье производной.)
Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и непрерывна на $\mathbb{R}$, а ее производная $f'(x)$ абсолютно интегрируема и кусочно-непрерывна на $\mathbb{R}$. Тогда

$$F[f'](y) = iyF[f](y).$$

$\triangleright$ Покажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Так как выполнены условия теоремы Ньютона-Лейбница, то $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$.

Из абсолютной интегрируемости функции $f'(x)$ на $\mathbb{R}$ следует существование конечного предела $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)dt$.

Если $A \neq 0$, то функция $f(x)$ отделена от нуля при достаточно больших x: $\exists x_0 \forall x > x_0 \hookrightarrow |f(x)| > \frac{|A|}{2}$. Но это противоречит сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$.

Следовательно, $A = 0$.

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Рекомендуется доказать самостоятельно.

Так как функция $f'(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то

$$F[f'](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}dx.$$

Так как мы хотим выразить преобразование Фурье производной функции f через преобразование Фурье функции f, то проинтегрируем по частям. Учитывая что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, имеем:

$$F[f'](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f(x)e^{-ixy}\Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-iy)e^{-ixy} \right) = iyF[f](y).$$

$\triangleleft$

Замечание. Для припоминания формулы удобно заметить, что она связывает преобразование Фурье производной f' и преобразование Фурье функции f. Для чего применяется интегрирование по частям (вместе с обоснованием равенства нулю внеинтегральной части).

Теорема 4. (Производная преобразования Фурье.)
Пусть функции $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда преобразование Фурье функции $f(x)$ является непрерывно-дифференцируемой функцией на $\mathbb{R}$ и

$$\frac{d}{dy}F[f](y) = F[-ixf](y).$$

$\triangleright$ Преобразование Фурье функции $f(x)$ представляет собой несобственный интеграл зависящий от параметра y. Применим теорему дифференцирования по параметру. Заметим, что исходный интеграл сходится, так как функция $f(x)$ абсолютно интегрируем на $\mathbb{R}$. Интеграл от производной сходится равномерно на любом отрезке, так как функция $xf(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Итак,

$$\frac{d}{dy}F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(-ix)f(x)e^{-ixy}dx. \qquad (4)$$

Непрерывность производной преобразования Фурье следует из теоремы 1 (о непрерывности преобразования Фурье) примененной к функции $xf(x)$ и формулы (4).

$\triangleleft$

Замечание. Аналогично теореме 3, идея доказательства (в данном случае — дифференцирование несобственного интеграла по параметру) помогает осуществить припоминание формулы.

Замечание. Доказательство теоремы о производной преобразования Фурье можно осуществить с использованием теоремы интегрирования несобственного интеграла по параметру (см. [2]).

Основные приемы вычисления преобразований Фурье:

- по определению (интегрирование);
- использование свойств четных и нечетных функций (интегрирование);
- применение теоремы о преобразовании Фурье производной;
- применение теоремы о производной преобразования Фурье;
- применение теоремы о взаимно обратных преобразованиях Фурье.

Пример 1. Найти преобразование Фурье функций $f(x) = e^{-|x|}$ и $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

$\triangleright$ Преобразование Фурье функции $f(x)$ легко вычислить непосредственным интегрированием.

Функция $F(x)$ является четной, по лемме 1 имеем:

$$F[f](x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x)\cos xy dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} f(x) e^{ixy} dx =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} e^{(-1+iy)x} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathrm{Re}\, \frac{e^{(-1+iy)x}}{-1+iy}\Bigg|_{x=0}^{x\to+\infty} =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathrm{Re} \frac{-1}{-1+iy} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathrm{Re} \frac{1+iy}{1+y^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+y^2}.$$

Заметим, что получили функцию, отличающуюся на постоянный множитель от функции $g(x)$: $F\left[f\right](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} g(y)$, поэтому имеет смысл рассмотреть возможность применения обратного преобразования Фурье.

Так как f четная функция, то ее прямое и обратное преобразования Фурье совпадают $F^{-1}\left[f\right](y) = F\left[f\right](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} g(y)$.

Функция $f(x) = e^{-|x|}$ непрерывна и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, а $f'(x)$ кусочно-непрерывна на $\mathbb{R}$, то, по теореме 2, имеем $F\left[F^{-1}\left[f\right]\right](x) = f(x)$.

Тогда,

$$F\left[g\right](x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} F\left[F^{-1}\left[f\right]\right](x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} f(x).$$

$\triangleleft$

Пример 2. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(xe^{-|x|}\right)$.

$\triangleright$ Функция $g(x) = xe^{-|x|}$ и ее первая производная непрерывны и абсолютно интегрируемы, вторая производная — абсолютно интегрируема и кусочно непрерывна. Можем дважды применить теорему о преобразовании Фурье производной:

$$F\left[f\right](y) = (iy)^2 F\left[g(x)\right](y).$$

Функции $g(x),\ xg(x))$ абсолютно интегрируемы, следовательно можно применить теорему о производной преобразования Фурье:

$$F\left[xe^{-|x|}\right](y) = \frac{1}{-i}\frac{d}{dy}F\left[e^{-|x|}\right](y).$$

Из предыдущих рассуждений и примера 1, имеем:

$$F\left[f\right](y) = \frac{(iy)^2}{-i}\frac{d}{dy}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+y^2}\right) = -iy^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{-2y}{\left(1+y^2\right)^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2iy^3}{\left(1+y^2\right)^2}.$$

$\triangleleft$

Пример 3. Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{1}{1+x^{12}}$ имеет непрерывную производную десятого порядка.

$\triangleright$ По теореме о непрерывности преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции непрерывно.

По теореме о производной преобразования Фурье для непрерывности десятой производной достаточны непрерывность функций вида $x^k f(x)$ при $k = 0, \ldots 9$ и абсолютная интегрируемость функций $x^k f(x)$ при $k = 0, \ldots 10$.

Непрерывность следует из теорем о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций. Абсолютная интегрируемость последней функции следует из оценки $\left|\frac{x^{10}}{1+x^{12}}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$ при достаточно больших x и сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.$\triangleleft$

Пример 4. Зная преобразование Фурье функции $g(y) = \frac{1}{1+y^2}$, вычислить интеграл Лапласа

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+y^2} dy.$$

$\triangleright$ Функция $g(y) = \frac{1}{1+y^2}$ - четная. Преобразование Фурье четной функции по лемме 1 имеет вид

$$F[f](x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos xy dx.$$

То есть, искомый интеграл отличается от преобразование Фурье функции $g(x)$ на постоянный множитель. А именно,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}.$$

$\triangleleft$

Заметим, что вычисление интегралов Лапласа $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+y^2} dy$ и $\int_0^{+\infty} \frac{y \sin xy}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{2} e^{-|x|} \operatorname{sign} x$ может быть осуществлено методом дифференцирования по параметру, что является существенно более трудоемкой процедурой.

Рекомендуем вычислить второй интеграл Лапласа $\int_0^{+\infty} \frac{y \sin xy}{1+y^2} dy$ используя свойства преобразования Фурье нечетной функции (аналогично примерам 1 и 4).

Пример 5. Вычислить преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-x^2/2}$.

$\triangleright$ Заметим, что легко вычислить интеграл вида $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2/2}e^{-ixy}dx$, связанный с производной преобразования Фурье исследуемой функции.

Функции $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы. Поэтому

$$\frac{d}{dy}F\left[f\right](y) = F\left[-ixf\right](y) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2/2}e^{-ixy}dx =$$
$$= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+iy)e^{-x^2/2}e^{-ixy}dx - \frac{y}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}-ixy}dx =$$
$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-\frac{x^2}{2}-ixy}\right)'_x dx - yF\left[f\right](y) =$$
$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}-ixy}\Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} - yF\left[f\right](y) = -yF\left[f\right](y).$$

То есть, $\frac{d}{dy}F\left[f\right](y) = -yF\left[f\right](y)$.

Решая полученное дифференциальное уравнение, получим

$$F\left[f\right](y) = Ce^{-\frac{y^2}{2}}, \tag{5}$$

где

$$C = F\left[f\right](0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx. \tag{6}$$

Так как $e^{-\frac{y^2}{2}} = f(y)$, то равенство (4) можно записать в виде $F\left[f\right](y) = Cf(y)$.

Аналогично, справдливо равенство $F^{-1}\left[f\right](y) = Cf(y)$.

Следовательно, $F^{-1}\left[F\left[f\right]\right](x) = C^2 f(x)$.

Функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема и абслолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, по теореме 2(2) $F^{-1}\left[F\left[f\right]\right](x) = f(x)$. Тогда, $C^2 = 1$. Из формулы (5) следует, что $C > 0$. Значит, $C = 1$ и

$$F\left[f\right](y) = e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

$\triangleleft$

Замечание. При решении примера 5 был вычислен интеграл Эйлера-Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

Это равенство следует из формулы (5) и равенства $C = 1$.

Комментарии.

Комментарий 1. Функция $f(x)$ называется абсолютно интегрируемой на отрезке $[a;b]$, если она имеет не более конечного числа особенностей на отрезке $[a;b]$ и несобственный интеграл сходится абсолютно.

Функция называется абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$, если интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ имеет не более конечного числа особенностей и сходится абсолютно.

Комментарий 2. В данном случае односторонние производные функции f, вообще говоря, разрывной в точке x_0, понимаем в следующем смысле:

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t},$$

если существует конечный предел.

$f'_-(x_0)$ определяется аналогично.

Рекомендуемая литература.

1. Бесов. О.В. Лекции по математическому анализу. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 480с. — ISBN 978-5-9221-1506-3.

2. Иванов Г.Е. Лекции по математическому анализу: в 2 ч.: учебное пособие/ Г.Е. Иванов. — 3-е изд., испр. и доп. — М.:МФТИ, 2011. — ISBN 978-5-7417-0382-3.

3. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.