БИЛЕТ 13

1. Даны 2117 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 2117 (на каждой карточке написано ровно одно число, притом числа не повторяются). Требуется выбрать две карточки, для которых сумма написанных на них чисел делится на 100. Сколькими способами это можно сделать?

   Ответ: 22386.

   Решение. Будем брать карточки по очереди. Возможны несколько случаев в зависимости от того, какое число написано на первой карточке.

   1) Номер на карточке оканчивается на 00 (таких карточек 21 штука). Для делимости суммы на 100 вторую карточку надо выбрать так, чтобы номер на ней также оканчивался на 00. Всего получаем $C_21^2 = \frac{21 \cdot 20}{2} = 210$ вариантов.

   2) Аналогично, если номер на карточке оканчивается на 50 (таких карточек также 21 штука), то для делимости суммы на 100 вторую карточку надо выбрать так, чтобы номер на ней оканчивался на 50, т.е. и здесь 210 вариантов.

   3) Номер на карточке оканчивается на число от 1 до 17 (таких карточек $17 \cdot 22 = 374$). Для каждой из них пару можно выбрать 21 способом (если число оканчивается на 1, то подойдёт любая карточка с числом, оканчивающимся на 99; если число оканчивается на 2 – любая карточка с числом, оканчивающимся на 98 и т.д.). Таким образом, получаем $374 \cdot 21 = 7854$ вариантов.

   4) Номер на карточке оканчивается на число от 18 до 49 (таких карточек $32 \cdot 21 = 672$). Для каждой из них пару можно выбрать 21 способом (аналогично предыдущему случаю). Таким образом, получаем $672 \cdot 21 = 14112$ вариантов.

   5) Номер на карточке оканчивается на число от 51 до 99. Все такие варианты были учтены при рассмотрении третьего и четвёртого случаев (эти карточки составляли пару карточкам, выбранным первоначально).

   Итого выходит $210 + 210 + 7854 + 14112 = 22386$ способов.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = 11g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.

   Ответ: $A = -11$, $A = 0$.

   Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Касание графиков $y = (f(x))^2$ и $y = 11g(x)$ эквивалентно тому, что уравнение $(f(x))^2 = 11g(x)$ имеет ровно одно решение. Получаем $(ax+b)^2 = 11(ax+c)$, $a^2x^2 + a(2b-11)x + b^2 - 11c = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $a^2(2b-11)^2 - 4a^2\left(b^2 - 11c\right) = 11a^2(11 - 4b + 4c)$, откуда $4b - 4c = 11$.

   Аналогично, касание графиков $y = (g(x))^2$ и $y = Af(x)$ означает, что уравнение $(g(x))^2 = Af(x)$ имеет единственное решение. Это уравнение равносильно следующим: $(ax + c)^2 = A(ax + b)$, $a^2x^2 + a(2c - A)x + c^2 - Ab = 0$. Дискриминант равен $D = a^2(2c - A)^2 - 4a^2\left(c^2 - Ab\right) = a^2A(A - 4c + 4b)$. Он обращается в ноль при $A = 0$ и $A = 4c - 4b = -11$.

3. Уравнение $x^2 + ax + 2 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

   $$x_1^3 + \frac{14}{x_2^2} = x_2^3 + \frac{14}{x_1^2}.$$

   Найдите все возможные значения a.

   Ответ: $a = 4$.

Решение. Для существования корней уравнения его дискриминант должен быть положителен, откуда $a^2-8>0$. При этом условии по теореме Виета $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=2$. Тогда $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2=a^2-2$.

Преобразуем данное равенство:

$$x_1^3-x_2^3+14\cdot\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2x_2^2}=0\Leftrightarrow(x_1-x_2)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)+\frac{14(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{(x_1x_2)^2}=0.$$

Поскольку корни различны, $x_1-x_2\neq 0$. Разделив обе части на x_1-x_2 и подставляя указанные выше значения, получаем $a^2-2-\frac{14a}{4}=0\Leftrightarrow 2a^2-7a-4=0$, откуда $a=-0{,}5$ или $a=4$. Неравенству $a^2-8>0$ удовлетворяет только $a=4$.

4. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют два *различных* корня, являющиеся степенями числа 7 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 343^{36}.

Ответ: 2969.

Решение. Такие квадратные трёхчлены можно представить в виде $(x-7^a)\left(x-7^b\right)$, где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ – целые числа. Чтобы исключить повторения, считаем, что $a>b$. Раскрывая скобки, получаем $x^2-\left(7^a+7^b\right)x+7^{a+b}$. По условию

$$\begin{cases}7^a+7^b\leqslant 343^{36},\\ 7^{a+b}\leqslant 343^{36}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7^a+7^b\leqslant 7^{108},\\ a+b\leqslant 108.\end{cases}$$

Заметим, что если выполняется второе неравенство, то первое неравенство верно за исключением одного случая $a=108$, $b=0$. Для каждого значения a выпишем количество подходящих значений b:

$$a=108\Rightarrow 0\text{ значений }b;$$
$$a=107\Rightarrow 2\text{ значения }b\ (b\in\{0;1\});$$
$$a=106\Rightarrow 3\text{ значения }b\ (b\in\{0;1;2\});$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a=55\Rightarrow 54\text{ значения }b\ (b\in\{0;1;\ldots;53\});$$
$$a=54\Rightarrow 54\text{ значения }b\ (b\in\{0;1;\ldots;53\});$$
$$a=53\Rightarrow 53\text{ значения }b\ (b\in\{0;1;\ldots;52\});$$
$$a=52\Rightarrow 52\text{ значения }b\ (b\in\{0;1;\ldots;51\});$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a=1\Rightarrow 1\text{ значение }b\ (b=0);$$
$$a=0\Rightarrow 0\text{ значений }b.$$

Суммируя, получаем $(2+3+4+\ldots 54)+(54+53+52+\ldots+1)=2969$ вариантов.

5. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P. Известно, что расстояния от точки P до сторон AB, BC, CD, DA равны 4, $\sqrt{3}$, $\frac{8}{\sqrt{19}}$ и $8\sqrt{\frac{3}{19}}$ соответственно (основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны, лежат на этих сторонах).

а) Найдите отношение $AP : PC$.

б) Найдите длину диагонали BD, если дополнительно известно, что $AC = 10$.

Ответ: $AP : PC = 4$, $BD = \frac{35}{\sqrt{19}}$.

Решение. В силу того, что вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны, $\angle PBC = \angle PAD$, $\angle PCB = \angle PDA$. Следовательно, треугольники PBC и PDA подобны. Аналогично доказывается, что $\triangle ABP \sim \triangle DCP$. Соответствующие элементы подобных фигур относятся как коэффициент подобия. В данном случае в качестве соответствующих элементов выступают высоты, проведённые из вершины P. Отсюда находим, что коэффициент подобия равен $k_1 = \frac{\sqrt{19}}{8}$ для первой пары и $k_2 = \frac{\sqrt{19}}{2}$ для второй пары.

Пусть $AP = 8x$. Тогда $BP = AP \cdot k_1 = x\sqrt{19}$; $CP = \frac{BP}{k_2} = 2x$, $DP = \frac{AP}{k_2} = \frac{16x}{\sqrt{19}}$.

Значит, $AP : PC = 8x : 2x = 4 : 1$.

Если $AC = 10$, то $8x + 2x = 10$, $x = 1$. Следовательно, $BD = x\sqrt{19} + \frac{16x}{\sqrt{19}} = \frac{35x}{\sqrt{19}} = \frac{35}{\sqrt{19}}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 4460, а сумма расстояний от этих же двадцати чисел до числа a^2 равна 2755. Найдите все возможные значения a.

Ответ: $a = -\frac{37}{2}$, $a = \frac{39}{2}$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+19$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k;\ k+19]$, то сумма расстояний от него до данных двадцати чисел не превосходит $10 \cdot 19 = 190$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 19, сумма расстояний до $k+1$ и $k+18$ не превосходит 19, сумма расстояний до $k+2$ и $k+17$ также не превосходит 19 и т.д.). Следовательно, числа a и a^2 лежат вне отрезка $[k;\ k+19]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|20a - k - (k+1) - \ldots - (k+19)| = |20a - 20k - 190|$. Аналогично, сумма расстояний от числа a^2 до каждого из данных чисел равна $|20a^2 - 20k - 190|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |20a^2 - 20k - 190| = 2755, \\ |20a - 20k - 190| = 4460. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a^2 - k - 9{,}5| = 137{,}75, \\ |a - k - 9{,}5| = 223. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и a^2 лежат справа от отрезка $[k;\ k+19]$. Тогда

$$\begin{cases} a^2 - k - 9{,}5 = 137{,}75, \\ a - k - 9{,}5 = 223 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - k - 9{,}5 = 223, \\ a^2 - a + 85{,}25 = 0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения отрицателен, поэтому решений нет.

2) Оба числа a и a^2 лежат слева от отрезка $[k;\ k+19]$. Тогда

$$\begin{cases} k + 9{,}5 - a^2 = 137{,}75, \\ k + 9{,}5 - a = 223 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 9{,}5 - a = 223, \\ a^2 - a - 85{,}25 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = a + 213{,}5, \\ a = \frac{1 \pm 3\sqrt{38}}{2}. \end{cases}$$

Тогда из первого уравнения системы следует, что k – иррациональное число, что не удовлетворяет условию задачи.

3) Число a лежит слева, а a^2 – справа от отрезка $[k;\ k+19]$. Тогда

$$\begin{cases} a^2 - k - 9{,}5 = 137{,}75, \\ k + 9{,}5 - a = 223 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 9{,}5 - a = 223, \\ a^2 - a - 360{,}75 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = a + 213{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} a = -18{,}5, \\ a = 19{,}5 \end{array} \right. \end{cases}$$

Убеждаемся, что при обоих значениях a число k является натуральным ($a = -18{,}5 \Rightarrow k = 195$; $a = 19{,}5 \Rightarrow k = 233$), следовательно, оба значения a подходят.

4) Число a лежит справа, а a^2 – слева от отрезка $[k;\ k+19]$. Очевидно, этот случай не подходит, так как если $a > a^2$, то оба числа a и a^2 лежат на отрезке $[0;\ 1]$, но тогда между ними не может поместиться ни одно целое число.

Итак, возможны два случая: $a = -18{,}5$ и $a = 19{,}5$.

7. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 13 описана вокруг треугольника ABM, где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка EM равна 12. Найдите длины отрезков BC, BK и периметр треугольника AKM.

Ответ: $BC = 13$, $BK = \frac{120}{13}$, $P_{AKM} = \frac{340}{13}$.

Решение. Обозначим градусные меры дуг BM и AE через 2α и 4α соответственно. Тогда по теореме о вписанном угле $\angle ABE = \frac{1}{2} \cdot 4\alpha = 2\alpha$, $\angle BAM = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$. Значит, $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \alpha$.

В треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны, поэтому треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC$. Следовательно, $ABCD$ – ромб. У ромба диагонали взаимно перпендикулярны, значит, угол AMB прямой и AB – диаметр окружности. Значит, $\angle BKA = \angle BEA = 90^\circ$. Так как $BE \parallel AK$, получаем, что $AEBK$ – прямоугольник, а значит, EK – также диаметр. Наконец, из параллельности AD и BC имеем $\angle CAD = \angle ACB = \alpha$.

Диаметр окружности равен 13, значит, $EK = AB = 13$; $BC = AB = 13$ (как стороны ромба). Так как EK – диаметр, то $\angle EMK = 90^\circ$, $MK = \sqrt{EK^2 - EM^2} = 5$. Хорды MK и BM равны (т.к. равны соответствующие им дуги), $BM = 5$. Тогда $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 12$, и из треугольника ABM находим, что $\cos\alpha = \frac{AM}{AB} = \frac{12}{13}$, $\sin\alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{5}{13}$. Отсюда $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{120}{169}$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{119}{169}$.

Далее вычисляем: $BK = AB\sin 2\alpha = 13 \cdot \frac{120}{169} = \frac{120}{13}$; $BE = AB\cos 2\alpha = 13 \cdot \frac{119}{169} = \frac{119}{13}$. Следовательно, периметр треугольника EBM равен $5 + 12 + \frac{119}{13} = \frac{340}{13}$.

БИЛЕТ 14

1. Даны 2414 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 2414 (на каждой карточке написано ровно одно число, притом числа не повторяются). Требуется выбрать две карточки, для которых сумма написанных на них чисел делится на 100. Сколькими способами это можно сделать?

   Ответ: 29112.

   Решение. Будем брать карточки по очереди. Возможны несколько случаев в зависимости от того, какое число написано на первой карточке.

   1) Номер на карточке оканчивается на 00 (таких карточек 24 штуки). Для делимости суммы на 100 вторую карточку надо выбрать так, чтобы номер на ней также оканчивался на 00. Всего получаем $C_24^2 = \frac{24 \cdot 23}{2} = 276$ вариантов.

   2) Аналогично, если номер на карточке оканчивается на 50 (таких карточек также 24 штуки), то для делимости суммы на 100 вторую карточку надо выбрать так, чтобы номер на ней оканчивался на 50, т.е. и здесь 276 вариантов.

   3) Номер на карточке оканчивается на число от 1 до 14 (таких карточек $14 \cdot 25 = 350$). Для каждой из них пару можно выбрать 24 способами (если число оканчивается на 1, то подойдёт любая карточка с числом, оканчивающимся на 99; если число оканчивается на 2 – любая карточка с числом, оканчивающимся на 98 и т.д.). Таким образом, получаем $350 \cdot 24 = 8400$ вариантов.

   4) Номер на карточке оканчивается на число от 15 до 49 (таких карточек $35 \cdot 24 = 840$). Для каждой из них пару можно выбрать 24 способами (аналогично предыдущему случаю). Таким образом, получаем $840 \cdot 24 = 20160$ вариантов.

   5) Номер на карточке оканчивается на число от 51 до 99. Все такие варианты были учтены при рассмотрении третьего и четвёртого случаев (эти карточки составляли пару карточкам, выбранным первоначально).

   Итого выходит $276 + 276 + 8400 + 20160 = 29112$ способов.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = -8g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.

   Ответ: $A = 8$, $A = 0$.

   Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Касание графиков $y = (f(x))^2$ и $y = -8g(x)$ эквивалентно тому, что уравнение $(f(x))^2 = -8g(x)$ имеет ровно одно решение. Получаем $(ax + b)^2 = -8(ax + c)$, $a^2x^2 + 2a(b + 4)x + b^2 + 8c = 0$. Четверть дискриминанта этого уравнения равна $a^2(b + 4)^2 - a^2\left(b^2 + 8c\right) = 8a^2(2 + b - c)$, откуда $b - c = -2$.

   Аналогично, касание графиков $y = (g(x))^2$ и $y = Af(x)$ означает, что уравнение $(g(x))^2 = Af(x)$ имеет единственное решение. Это уравнение равносильно следующим: $(ax + c)^2 = A(ax + b)$, $a^2x^2 + a(2c - A)x + c^2 - Ab = 0$. Дискриминант равен $D = a^2(2c - A)^2 - 4a^2\left(c^2 - Ab\right) = a^2A(A - 4c + 4b)$. Он обращается в ноль при $A = 0$ и $A = 4c - 4b = 8$.

3. Уравнение $x^2 + ax + 3 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

$$x_1^3 - \frac{99}{2x_2^2} = x_2^3 - \frac{99}{2x_1^2}.$$

   Найдите все возможные значения a.

Ответ: $a = -6$.

Решение. Для существования корней уравнения его дискриминант должен быть положителен, откуда $a^2 - 12 > 0$. При этом условии по теореме Виета $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = 3$. Тогда $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = a^2 - 3$.

Преобразуем данное равенство:

$$x_1^3 - x_2^3 - \frac{99}{2} \cdot \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2x_2^2} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) - \frac{99\,(x_1 - x_2)\,(x_1 + x_2)}{2\,(x_1x_2)^2} = 0.$$

Поскольку корни различны, $x_1 - x_2 \neq 0$. Разделив обе части на $x_1 - x_2$ и подставляя указанные выше значения, получаем $a^2 - 3 + \frac{99a}{18} = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 11a - 6 = 0$, откуда $a = 0{,}5$ или $a = -6$. Неравенству $a^2 - 12 > 0$ удовлетворяет только $a = -6$.

4. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют два *различных* корня, являющиеся степенями числа 5 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 125^{50}.

Ответ: 5699.

Решение. Такие квадратные трёхчлены можно представить в виде $(x - 5^a)\left(x - 5^b\right)$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ – целые числа. Чтобы исключить повторения, считаем, что $a > b$. Раскрывая скобки, получаем $x^2 - \left(5^a + 5^b\right)x + 5^{a+b}$. По условию

$$\begin{cases} 5^a + 5^b \leqslant 125^{50}, \\ 5^{a+b} \leqslant 125^{50} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^a + 5^b \leqslant 5^{150}, \\ a + b \leqslant 150. \end{cases}$$

Заметим, что если выполняется второе неравенство, то первое неравенство верно за исключением одного случая $a = 150$, $b = 0$. Для каждого значения a выпишем количество подходящих значений b:

$$a = 150 \Rightarrow 0 \text{ значений } b;$$
$$a = 149 \Rightarrow 2 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1\});$$
$$a = 148 \Rightarrow 3 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1; 2\});$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a = 76 \Rightarrow 75 \text{ значений } b \ (b \in \{0; 1; \ldots; 74\});$$
$$a = 75 \Rightarrow 75 \text{ значений } b \ (b \in \{0; 1; \ldots; 74\});$$
$$a = 74 \Rightarrow 74 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1; \ldots; 73\});$$
$$a = 73 \Rightarrow 73 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1; \ldots; 72\});$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a = 1 \Rightarrow 1 \text{ значение } b \ (b = 0);$$
$$a = 0 \Rightarrow 0 \text{ значений } b.$$

Суммируя, получаем $(2 + 3 + 4 + \ldots 75) + (75 + 74 + 73 + \ldots + 1) = 5699$ вариантов.

5. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P. Известно, что расстояния от точки P до сторон AB, BC, CD, DA равны 5, $\sqrt{3}$, $\frac{5}{\sqrt{7}}$ и $5\sqrt{\frac{3}{7}}$ соответственно (основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны, лежат на этих сторонах).

   а) Найдите отношение $AP : PC$.

   б) Найдите длину диагонали BD, если дополнительно известно, что $AC = 12$.

   Ответ: $AP : PC = 5$, $BD = \frac{24}{\sqrt{7}}$.

   Решение. В силу того, что вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны, $\angle PBC = \angle PAD$, $\angle PCB = \angle PDA$. Следовательно, треугольники PBC и PDA подобны. Аналогично доказывается, что $\triangle ABP \sim \triangle DCP$. Соответствующие элементы подобных фигур относятся как коэффициент подобия. В данном случае в качестве соответствующих элементов выступают высоты, проведённые из вершины P. Отсюда находим, что коэффициент подобия равен $k_1 = \frac{\sqrt{7}}{5}$ для первой пары и $k_2 = \sqrt{7}$ для второй пары.

   Пусть $AP = 5x$. Тогда $BP = AP \cdot k_1 = x\sqrt{7}$; $CP = \frac{BP}{k_2} = x$, $DP = \frac{AP}{k_2} = \frac{5x}{\sqrt{7}}$.

   Значит, $AP : PC = 5x : x = 5 : 1$.

   Если $AC = 12$, то $5x + x = 12$, $x = 2$. Следовательно, $BD = x\sqrt{7} + \frac{5x}{\sqrt{7}} = \frac{12x}{\sqrt{7}} = \frac{24}{\sqrt{7}}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 360, а сумма расстояний от этих же двадцати чисел до числа a^2 равна 345. Найдите все возможные значения a.

   Ответ: $a = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{3}{2}$.

   Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+19$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k;\ k+19]$, то сумма расстояний от него до данных двадцати чисел не превосходит $10 \cdot 19 = 190$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 19, сумма расстояний до $k+1$ и $k+18$ не превосходит 19, сумма расстояний до $k+2$ и $k+17$ также не превосходит 19 и т.д.). Следовательно, числа a и a^2 лежат вне отрезка $[k;\ k+19]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|20a - k - (k+1) - \ldots - (k+19)| = |20a - 20k - 190|$. Аналогично, сумма расстояний от числа a^2 до каждого из данных чисел равна $|20a^2 - 20k - 190|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |20a^2 - 20k - 190| = 345, \\ |20a - 20k - 190| = 360. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a^2 - k - 9{,}5| = 17{,}25, \\ |a - k - 9{,}5| = 18. \end{cases}$$

   Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

   1) Оба числа a и a^2 лежат справа от отрезка $[k;\ k+19]$. Тогда

$$\begin{cases} a^2 - k - 9{,}5 = 17{,}25, \\ a - k - 9{,}5 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - k - 9{,}5 = 18, \\ a^2 - a + 0{,}75 = 0. \end{cases}$$

   Дискриминант квадратного уравнения отрицателен, поэтому решений нет.

   2) Оба числа a и a^2 лежат слева от отрезка $[k;\ k+19]$. Тогда

$$\begin{cases} k + 9{,}5 - a^2 = 17{,}25, \\ k + 9{,}5 - a = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 9{,}5 - a = 18, \\ a^2 - a - 0{,}75 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = a + 8{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} a = -0{,}5, \\ a = 1{,}5 \end{array} \right. \end{cases}$$

Убеждаемся, что при обоих значениях a число k является натуральным ($a = -0{,}5 \Rightarrow k = 8$; $a = 1{,}5 \Rightarrow k = 10$), следовательно, оба значения a подходят.

3) Число a лежит слева, а a^2 – справа от отрезка $[k;\ k+19]$. Тогда

$$\begin{cases} a^2 - k - 9{,}5 = 17{,}25, \\ k + 9{,}5 - a = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 9{,}5 - a = 18, \\ a^2 - a - 35{,}25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = a + 8{,}5, \\ a = \frac{1 \pm \sqrt{142}}{2}. \end{cases}$$

Тогда из первого уравнения системы следует, что k – иррациональное число, что не удовлетворяет условию задачи.

4) Число a лежит справа, а a^2 – слева от отрезка $[k;\ k+19]$. Очевидно, этот случай не подходит, так как если $a > a^2$, то оба числа a и a^2 лежат на отрезке $[0;\ 1]$, но тогда между ними не может поместиться ни одно целое число.

Итак, возможны два случая: $a = -0{,}5$ и $a = 1{,}5$.

7. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 5 описана вокруг треугольника ABM, где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка EM равна 4. Найдите длины отрезков BC, BK и периметр треугольника AKM.

Ответ: $BC = 5$, $BK = \frac{24}{5}$, $P_{AKM} = \frac{42}{5}$.

Решение. Обозначим градусные меры дуг BM и AE через 2α и 4α соответственно. Тогда по теореме о вписанном угле $\angle ABE = \frac{1}{2} \cdot 4\alpha = 2\alpha$, $\angle BAM = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$. Значит, $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \alpha$.

В треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны, поэтому треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC$. Следовательно, $ABCD$ – ромб. У ромба диагонали взаимно перпендикулярны, значит, угол AMB прямой и AB – диаметр окружности. Значит, $\angle BKA = \angle BEA = 90^\circ$. Так как $BE \parallel AK$, получаем, что $AEBK$ – прямоугольник, а значит, EK – также диаметр. Наконец, из параллельности AD и BC имеем $\angle CAD = \angle ACB = \alpha$.

Диаметр окружности равен 5, значит, $EK = AB = 5$; $BC = AB = 5$ (как стороны ромба). Так как EK – диаметр, то $\angle EMK = 90^\circ$, $KM = \sqrt{EK^2 - EM^2} = 3$. Хорды MK и BM равны (т.к. равны соответствующие им дуги), $BM = 3$. Тогда $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 4$, и из треугольника ABM находим, что $\cos\alpha = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{3}{5}$. Отсюда $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{7}{25}$.

Далее вычисляем: $BK = AB\sin 2\alpha = 5 \cdot \frac{24}{25} = \frac{24}{5}$; $BE = AB\cos 2\alpha = 5 \cdot \frac{7}{25} = \frac{7}{5}$. Следовательно, периметр треугольника EBM равен $3 + 4 + \frac{7}{5} = \frac{42}{5}$.