Собственные интегралы, зависящие от параметра.

В параграфе рассматриваются вопросы непрерывности, интегрирования и дифференцирования функций вида

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x;\alpha)dx,$$

где функция $f(x;\alpha)$ определена на прямоугольнике $[a;b] \times [\alpha_1;\alpha_2]$ и при любом $\alpha \in [\alpha_1;\alpha_2]$ интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$.

Теорема 1.1. (О непрерывности интеграла по параметру.)
Пусть функция $f(x;\alpha)$ непрерывна на прямоугольнике $[a;b] \times [\alpha_1;\alpha_2]$, тогда функция $F(\alpha) = \int_a^b f(x;\alpha)dx$ непрерывна на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$.

Следствие (теоремы 1.1). (О предельном переходе под знаком интеграла.)
Пусть функция $f(x;\alpha)$ непрерывна на прямоугольнике $[a;b] \times [\alpha_1;\alpha_2]$,
$\alpha_0 \in [\alpha_1;\alpha_2]$, и

$$\forall x \in [a;b] \quad \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x;\alpha) = f_0(x),$$

тогда

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} F(\alpha) = \lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_a^b f(x;\alpha)dx = \int_a^b \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x;\alpha)dx = \int_a^b f_0(x)dx.$$

Другими словами, в условиях теоремы, операции предельного перехода и интегрирования можно выполнить в любом порядке.

Замечание. Если α_0 - граничная точка отрезка $[\alpha_1;\alpha_2]$, то рассматривается соответствующий односторонний предел.

Теорема 1.2. (Об интегрировании интеграла по параметру.)
Пусть функция $f(x;\alpha)$ непрерывна на прямоугольнике $[a;b] \times [\alpha_1;\alpha_2]$, тогда функция $F(\alpha) = \int_a^b f(x;\alpha)dx$ интегрируема на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$ и справедливо равенство:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha 1} \left(\int_a^b f(x;\alpha)dx\right) d\alpha = \int_a^b \left(\int_{\alpha_0}^{\alpha 1} f(x;\alpha)d\alpha\right) dx.$$

Таким образом, исследуемая функция $F(\alpha)$ интегрируема на отрезке $[\alpha_0; \alpha_1]$ и интегралы можно расставить в любом порядке.

Теорема 1.3. (Дифференцирование интеграла по параметру.)
Пусть функция $f(x;\alpha)$ и ее частная производная $f'_\alpha(x;\alpha)$ непрерывны на прямоугольнике $[a;b] \times [\alpha_1;\alpha_2]$, тогда функция $F(\alpha) = \int_a^b f(x;\alpha)dx$ дифференцируема на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$ и

$$F'(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x;\alpha)dx.$$

Следствие (теоремы 1.3).
Пусть на отрезке $[\alpha_0;\alpha_1]$ заданы непрерывно дифференцируемые функции $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$, такие что $\forall \alpha \in [\alpha_0;\alpha_1] \hookrightarrow \varphi(\alpha) \leqslant \psi(\alpha)$.
Пусть в некотором открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^2$, содержащем множество $E = \{(x;\alpha), \alpha \in [\alpha_0;\alpha_1], x \in [\varphi(\alpha);\psi(\alpha)]\}$, задана функция $f(x;\alpha)$ непрерывная вместе с частной производной $f'_\alpha(x;\alpha)$.
Тогда функция $J(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x;\alpha)dx$ дифференцируема на отрезке $[\alpha_0;\alpha_1]$ и $\forall \alpha \in [\alpha_0;\alpha_1]$ справедливо равенство

$$J'(\alpha) = f(\psi(\alpha),\alpha)\psi'(\alpha) - f(\varphi(\alpha),\alpha)\varphi'(\alpha) + \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f'_\alpha(x;\alpha)dx. \qquad (1)$$

$\triangleright$ Доказательство следствия полезно при решении задач, так как позволяет применять следствие без запоминания формулы (1).

Рассмотрим функцию $F(\psi,\varphi,\alpha) = \int_\varphi^\psi f(x;\alpha)dx$.

По формуле Ньютона-Лейбница

$$F'_\psi(\psi,\varphi,\alpha) = f(\psi,\alpha),$$

$$F'_\varphi(\psi,\varphi,\alpha) = -f(\varphi,\alpha).$$

Из теоремы 1.3 следует, что

$$F'_\alpha(\psi,\varphi,\alpha) = \int_\varphi^\psi f'_\alpha(x,\alpha).$$

Дифференцируя сложную функцию $J(\alpha)=F(\psi(\alpha),\varphi(\alpha),\alpha)$ получим:

$$J'(\alpha)=F'_\psi(\psi(\alpha),\varphi(\alpha),\alpha)\psi'(\alpha)+ \\ +F'_\varphi(\psi(\alpha),\varphi(\alpha),\alpha)\varphi'(\alpha)+ \\ +F'_\alpha(\psi(\alpha),\varphi(\alpha),\alpha).$$

Откуда следует требуемое утверждение.◁

Для запоминания приведенных теорем полезно запомнить, что в каждой из трех основных теорем (о непрерывности, об интегрировании и о дифференцировании собственного интеграла по параметру) рассматриваются функции двух переменных, непрерывные по совокупности переменных на некотором ограниченном прямоугольнике. В теореме дифференцирования дополнительно требуется непрерывность по совокупности переменных на прямоугольнике производной по параметру.

При решении задач может потребоваться построение вспомогательного отрезка множества значений параметра, например, если непрерывность или дифференцируемость функции $F(\alpha)$ рассматривается на неограниченном множестве. Соответствующие примеры будут рассмотрены ниже.

Для собственых интегралов, зависящих от параметра, могут быть рассмотрены более общие формулировки, которые приведены в дополнении к конспекту (необязательные для освоения).

Пример 1.1. Исследовать на дифференцируемость и найти производную, если она существует, функции $J(\alpha)=\int_\alpha^{2\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$ на множестве $\alpha>0$.

Приведем два решения.

▷ Решение 1. Покажем применение следствия теоремы 1.3.

Необходимо исследовать при всех положительных значениях аргумента, но следствие сформулировано для функции $F(\alpha)$, определенной на отрезке. Дифференцируемость на множестве $\alpha>0$ означает дифференцируемость в каждой точке множества.

Зафиксируем произвольное $\alpha_0 > 0$ и построим вспомогательный отрезок множества значений параметра α.

На отрезке $\left[\frac{\alpha_0}{2}; \alpha_0 + 1\right]$ функции $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\psi(\alpha) = 2\alpha$ непрерывны. Функция $\frac{\sin \alpha x}{x}$ и ее частная производная по α, равная $\cos \alpha x$, также непрерывны. Следовательно, функция $J(\alpha)$ дифференцируема на выбранном отрезке и применима формула (1):

$$J'(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha^2)}{2\alpha} \cdot 2 - \frac{\sin(\alpha^2)}{\alpha} + \int_{\alpha}^{2\alpha} \cos \alpha x dx.$$

В силу произвольности выбора точки $\alpha_0 > 0$ задача решена полностью.$\triangleleft$

В примере 1.1 рассмотрен прием построения вспомогательного множества, содержащего произвольное и фиксированное α_0 *и содержащегося в рассматриваемом множестве* $(0; \infty)$, *для которого применимы условия теоремы.* В данном случае построен отрезок $\left[\frac{\alpha_0}{2}; \alpha_0 + 1\right]$, но можно взять любой отрезок, удовлетворяющий указанным выше условиям. Этот прием будет использоваться далее в задачах исследования несобственных интегралов на равномерную сходимость, исследования и вычисления несобственных интегралов, зависящих от параметра.

$\triangleright$ Решение 2.

Интеграл можно рассмотреть, как функцию трех переменных: верхнего и нижнего пределов интегрирования и параметра: $F(\psi, \varphi, \alpha) = \int_{\varphi}^{\psi} \frac{\sin \alpha}{x} dx$. Находим частные производные функции F и дифференцируем сложную функцию $F(2\alpha, \alpha, \alpha)$ по α. Обоснования применения используемых при дифференцировании теорем провести самостоятельно. $\triangleleft$

В параграфе 3 будут рассмотрены задачи вычисления несобственных интегралов, зависящих от параметра, с помощью интегрирования и дифференцирования по параметру. Так как алгоритмы решения задач однотипны, мы опускаем аналогичные задачи в данном параграфе.

Рассмотрим задачу исследования $F(\alpha)$, в которой нельзя использовать основные теоремы параграфа.

Пример 1.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и принимает положительные значения на отрезке $[0;1]$.

Доказать, что функция $J(\alpha) = \int_0^1 \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} f(x)dx$ разрывна в точке $\alpha = 0$.

$\triangleright$ Теорема 1.1 дает достаточное условие непрерывности собственного интеграла по параметру. Использовать ее для доказательства разрывности $J(\alpha)$ нельзя.

Воспользуемся определением непрерывности числовой функции в точке: функция непрерывна в точке, если существует предел этой функции, равный значению функции в этой точке.

При $\alpha = 0$ подынтегральная функция равна 0, значит $J(0) = 0$.

Покажем, что предел $J(\alpha)$ при α, стремящемся к нулю справа, не может быть равен 0.

При любом $\alpha > 0$ функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;1]$ и положительна на нем, следовательно, по теореме отделимости от нуля[1], существует $\mu > 0$, т.ч. $\forall x \in [0;1]$ выполнена оценка $f(x) > \mu$.

Тогда для любого $\alpha > 0$ имеем

$$J(\alpha) > \int_0^1 \frac{\mu\alpha}{x^2+\alpha^2}dx = \mu \operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha}\Big|_0^1 = \mu \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} \to \frac{\pi}{2}\mu \qquad \text{при} \quad \alpha \to 0+0.$$

Значит предел не может быть равен 0. Исследуемая функция разрывна в нуле.$\triangleleft$

[1]см. Комментарий 1.

Равномерная сходимость несобственных интегралов.

В параграфе рассматривается понятие равномерной сходимости несобственных интегралов $\int_a^b f(x;\alpha)dx$ с особенностью в точке $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$[2].

Определение 2.1. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x;\alpha)dx$ с особенностью в точке $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ поточечно сходится на множестве E, если

$$\forall \alpha \in E \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists t_\alpha \in (a;b) \; \forall \xi \in [t_\alpha;b) \hookrightarrow \left| \int_\xi^b f(x;\alpha)dx \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Определение 2.2. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x;\alpha)dx$ с особенностью в точке $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется равномерно сходящимся на множестве E, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists t \in (a;b) \; \forall \xi \in [t;b) \;\; \forall \alpha \in E \hookrightarrow \left| \int_\xi^b f(x;\alpha)dx \right| < \varepsilon. \tag{3}$$

Замечание. В определении 2.1 параметр t_α, вообще говоря, зависит от α и ε. В определении 2.2 параметр t может зависить от ε, но не зависит от α.

Замечание. Обозначим $F(\alpha) = \int_a^b f(x;\alpha)dx$ и $F(\xi;\alpha) = \int_a^\xi f(x;\alpha)dx$ — функцию, заданную, как интеграл с переменным верхним пределом. Тогда определение поточечной сходимости интеграла при $\alpha \in E$ эквивалентно условию

$$\forall \alpha \in E \quad \exists \lim_{\xi \to b} F(\xi;\alpha) = F(\alpha).$$

Равномерная сходимость интеграла по параметру $\alpha \in E$ эквивалентна условию

$$F(\xi;\alpha) \rightrightarrows F(\alpha) \qquad \text{при} \quad \xi \to b.$$

[2]Используемые теоретические сведения о понятии несобственного интеграла приведены в Комментарии 2.

Замечание. Сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x;\alpha)dx$ при любом фиксированном $\alpha \in E$, следует из определения равномерной сходимости этого интеграла по параметру α. Для доказательства в определении поточечной сходимости при каждом α возьмем $t_\alpha = t$ из определения равномерной сходимости.

Замечание. Эквивалентное определение равномерной сходимости по $\alpha \in E$ может быть записано с помощью супремума:

$$\sup_{\alpha \in E} \left| \int_\xi^b f(x;\alpha)dx \right| \to 0 \text{ при } \xi \to b.$$

Определение 2.3. Несобственный интеграл сходится неравномерно на множестве E, если он сходится при любом $\alpha \in E$ (определение 2.1), но не сходится равномерно, то есть

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall t \in (a;b)\ \exists \xi \in [t;b)\ \ \exists \alpha \in E \hookrightarrow \left| \int_\xi^b f(x;\alpha)dx \right| \geqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Рассмотрим основные теоремы.

Теорема 2.1. (Признак Вейерштрасса.)
Пусть на множестве $[a; b) \times E$ определена функция $f(x; \alpha)$, такая что при любом $\alpha \in E$ сходится несобственный интеграл $\int_a^b f(x; \alpha)dx$ с особенностью в точке b. Пусть $\forall x \in [a; b)\, \forall \alpha \in E \hookrightarrow |f(x; \alpha)| \leqslant g(x)$ и интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится. Тогда интеграл $\int_a^b f(x; \alpha)dx$ сходится равномерно на E.

Замечание об использовании признака Вейерштрасса:

При использовании теоремы Вейерштрасса необходимо предъявить функцию $g(x)$, равномерно ограничивающую функцию $f(x; \alpha)$ на множестве E, то есть оценку *модуля* подынтегральной функции функцией, независящей от α со сходящимся интегралом.

Замечание. Часто встречающиеся ошибки при применении признака Вейерштрасса:

1. Потеря модуля: вместо доказательства равномерной ограниченности, обосновывают равномерную ограниченность сверху. Если функция $f(x; \alpha) \geqslant 0$ можно использовать оценку вида $0 \leqslant f \leqslant g$;

2. Вместо оценки подынтегральной функции, записывается без обоснований «равномерная оценка» интеграла, что не обеспечивает выполнение условий теоремы. Подчеркнем, что обоснованная оценка интеграла является более сложной задачей, чем проверка условий теоремы Вейерштрасса.

Теорема 2.2. (Признак Дирихле.)

Пусть на множестве $[a;+\infty)\times E$ заданы функции $f(x;\alpha)$ и $g(x;\alpha)$, такие что при любом фиксированном $\alpha\in E$:

$f(x;\alpha)$ непрерывна на луче $[a;+\infty)$;

$g(x;\alpha)$ непрерывно дифференцируема по x на луче $[a;+\infty)$.

Пусть

1) первообразная $F(t;\alpha)=\int_a^t f(x;\alpha)dx$ равномерно по α ограничена на луче $[a;+\infty)$:

$$\exists C\in\mathbb{R}:\ \forall t\in[a;+\infty)\ \forall\alpha\in E\hookrightarrow |F(t;\alpha)|\leqslant C;$$

2) при любом $\alpha\in E$ функция $g(x;\alpha)$ является невозрастающей относительно x, начиная с некоторого x_0, не зависящего от α:

$$\exists x_0\in[a;+\infty):\ \forall x\in[x_0;+\infty)\ \forall\alpha\in E\hookrightarrow g'_x(x;\alpha)\leqslant 0;$$

3) при $x\to+\infty$ функция $g(x;\alpha)$ стремится к нулю равномерно по $\alpha\in E$:

$$\sup_{\alpha\in E}|g(x;\alpha)|\to 0 \text{ при } x\to+\infty.$$

Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x;\alpha)g(x;\alpha)dx$ сходится равномерно на множестве E.

Замечания об использовании признака Дирихле и признака Вейерштрасса:

1. Признак Дирихле целесообразно применять только, если нет возможности применить признак Вейерштрасса, проверка условий которого значительно проще. Например, для подынтегральной функции $h_1(x;\alpha)=\frac{\alpha\sin\alpha x}{x}$ применяем признак Дирихле ($E=\mathbb{R}$), а для подынтегральной функции $h_2(x;\alpha)=\frac{\sin\alpha x}{x^2}$ признак Вейерштрасса ($E=\mathbb{R}$).

2. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов влечет также абсолютную сходимость интеграла. Поэтому он не может быть применен, если интеграл сходится условно. В этом случае целесообразно проверить применимость признака Дирихле.

3. При проверке равномерной ограниченности первообразной целесообразно использовать запись первообразной через интеграл с переменным верхним пределом $F(t;\alpha)=\int_a^t f(x;\alpha)dx$, так как эта запись явно показывает

проверяемое условие, и явное доказательство ограниченности полученной функции[3].

4. Доказательство монотонности функции $g(x;\alpha)$ осуществляется исследованием знака производной по x при фиксированном α.

5. Доказательство равномерной сходимости, если функция $g(x;\alpha)$ явно зависит от α часто осуществляется достаточным условием равномерной сходимости.

Замечание. Часто встречающиеся ошибки при применении признака Дирихле и признака Вейерштрасса:

1. Нельзя записать первообразную через *расходящийся* несобственный интеграл. Первообразная записывается через интеграл с переменным верхним пределом[4].

2. В решении задачи проверяются не все условия теоремы. «Очевидно» выполненные условия необходимо указать, например, если $g(x;\alpha) = \frac{1}{x}$, указываем, что функция не зависит от α и равномерно стремиться к нулю (обосновывать тривиальные случаи не обязательно).

3. С помощью признаков Вейерштрасса и Дирихле *нельзя* доказать неравномерную сходимость.

[3] см. Комментарий 2.5.

[4] см. Комментарий 2.5.

Доказательство неравномерной сходимости включает:

– доказательство поточечной сходимости[5];

– проверку условия неравномерной сходимости (4) или отрицания условия Коши (5).

Теорема 2.3. (Критерий Коши.)
Пусть на множестве $[a;b)\times E$ ($a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$) определена функция $f(x;\alpha)$, такая что при любом $\alpha\in E$ сходится несобственный интеграл $\int_a^b f(x;\alpha)dx$ с особенностью в точке b.

Тогда, для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^b f(x;\alpha)dx$ сходился равномерно на множестве E, необходимо и достаточно выполнения условия Коши:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists t\in[a;b):\ \forall\xi_1,\xi_2\in[t;b)\ \forall\alpha\in E\hookrightarrow\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x;\alpha)dx\right|<\varepsilon.$$

Замечание. Критерий Коши удобно использовать для доказательства того, что интеграл не сходится равномерно. Для этого достаточно проверить отрицание условия Коши:

$$\exists\varepsilon>0\ \forall t\in[a;b):\ \exists\xi_1,\xi_2\in[t;b)\ \exists\alpha_0\in E:\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x;\alpha_0)dx\right|\geqslant\varepsilon. \tag{5}$$

[5]см. Комментарий 2.3 и Комментарий 2.4.

Рассмотрим задачи на доказательство равномерной и неравномерной сходимости несобственных интегралов. В некоторых задачах мы приводим рассуждения, показывающие поиск решения. Эти рассуждения обычно не включаются в оформление решения задачи, поэтому в конце таких решений показано оформление решений.

Пример 2.1.

Исследовать на равномерную сходимость интеграл $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ на множестве $E_\alpha = [\alpha_0; +\infty)$, где $\alpha_0 > 1$.

$\triangleright$ Решение 1.

На множестве E_α верна оценка подынтегральной функции $0 \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^{\alpha_0}}$, $\alpha_0 > 1$, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha_0}}$ сходится, как эталонный.

Следовательно, по признаку Вейерштрасса, исследуемый интеграл сходится равномерно на множестве E_α.

Решение 2.

Равномерная сходимость интеграла $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ на E_α может быть доказана проверкой определения:

$$\left| \int_\xi^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \right| = \left| \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_\xi^{+\infty} \right| = \frac{1}{(\alpha-1)\xi^{1-\alpha}} \leqslant \frac{1}{(\alpha_0-1)\xi^{1-\alpha_0}} \to 0$$

Этот способ применяется редко, так как интегрирование остатка интеграла, как правило, затруднительно.

$\triangleleft$

Пример 2.2.

Исследовать на равномерную сходимость интеграл $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ на множестве $E_1 = (1; +\infty)$.

$\triangleright$ Нередко *предположение о неравномерной сходимости* можно сделать, если на конце промежутка нарушается условие поточечной сходимости. А именно, при $\alpha = 1$ исследуемый интеграл расходится.

Рассмотрим использование отрицания условия равномерной сходимости: $\exists \varepsilon > 0\ \forall t > 1\ \exists \xi \geqslant t\ \exists \alpha_0 > 1 : \left| \int_\xi^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha_0}} \right| \geqslant \varepsilon$. Для доказательства подберем значения всех параметров под кванторами существования, обеспечивающие справедливость заключительного неравенства.

Вычислим

$$\left| \int_\xi^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha_0}} \right| = \left. \frac{x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0} \right|_\xi^{+\infty} = \frac{1}{(\alpha_0 - 1)\xi^{\alpha_0 - 1}}.$$

Пусть $\alpha_0 = 1 + \frac{1}{t}$ и $\xi = t$, тогда $\left| \int_\xi^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha_0}} \right| = \frac{t}{t^{\frac{1}{t}}} = t^{1-\frac{1}{t}} \geqslant 1$.

Решение можно оформить, например, следующим образом:

При любом $\alpha > 1$ интеграл сходится как эталон, т.е. сходится поточечно.

$$\exists \varepsilon = 1\ \forall t > 1\ \exists \xi = t \in [t; +\infty)\ \exists \alpha_0 = 1 + \frac{1}{t} > 1 :$$
$$\left| \int_\xi^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha_0}} \right| = \left. \frac{x^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0} \right|_\xi^{+\infty} = \frac{1}{(\alpha_0 - 1)\xi^{\alpha_0 - 1}} = \frac{t}{t^{\frac{1}{t}}} = t^{1-\frac{1}{t}} \geqslant 1 = \varepsilon.$$

Следовательно, интеграл сходится неравномерно. $\triangleleft$

Пример 2.3.

Исследовать на равномерную сходимость интеграл $G(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ на множестве $E_0 = (0; +\infty)$.

$\triangleright$ При $\alpha = 0$ исследуемый интеграл расходится. Вычислить остаток интеграла в определении неравномерной сходимости, как в примере 2.2, нет возможности. Доказываем неравномерную сходимость с помощью отрицания условия Коши.

Особой является только бесконечно удаленная точка. Поточечная сходимость при любом положительном α следует из оценки, верной для любого $x > 1$:

$$0 \leqslant e^{-\alpha x^2} \leqslant e^{-\alpha x}.$$

Интеграл от последней функции сходится как эталон.

Запишем отрицание условия Коши равномерной сходимости:

$$\exists \varepsilon = e^{-1}\ \forall T > 1\ \exists \xi_2 = T+1 \geqslant \xi_1 = T\ \exists \alpha = \frac{1}{(T+1)^2} :$$
$$\left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-\alpha t^2} dt \right| = \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-\alpha t^2} dt \geqslant \int_T^{T+1} e^{-\frac{(T+1)^2}{(T+1)^2}} \geqslant e^{-1} = \varepsilon.$$

Поясним подбор параметров (принцип аналогичен подбору значений параметров в отрицании условия Коши сходимости функцинальных рядов). Так как подынтегральная функция убывает по x при любом фиксированном α, то ее оценка снизу осуществляется значением в правом конце промежутка интегрирования. Так как в задаче возможен подбор значения параметра $\alpha = \frac{1}{(T+1)^2}$, при котором подынтегральная функция оценивается снизу константой, то отрезок интеграла в отрицании условия Коши оценивается этой константой, умноженной на длину отрезка интегрирования. $\triangleleft$

Пример 2.4.

Исследовать на равномерную сходимость несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx$ на множестве $E_\alpha = (\alpha_0; +\infty)$, где $\alpha_0 > 0$.

$\triangleright$ Так как для любого $\alpha \geqslant \alpha_0$ имеет место оценка $|e^{-\alpha x} \sin x| \leqslant e^{-\alpha_0 x}$ и несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x}$ сходится при $\alpha_0 > 0$, то исследуемый интеграл сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. $\triangleleft$

Замечание. Использование признака Дирихле при исследовании данного интеграла нецелесообразно.

Пример 2.5.

Исследовать на равномерную сходимость несобственный интерал $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx$ на множестве $E_0 = (0; +\infty)$.

$\triangleright$ Поточечная сходимость следует из признака сравнения несобственных интегралов: $|e^{-\alpha x} \sin x| \leqslant e^{-\alpha x}$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ — сходится при любом $\alpha > 0$.

Неравномерную сходимость докажем, используя отрицание условия Коши. В качестве промежутков интегрирования можно выбрать участки положительности функции $\sin x$, тогда:

$$\exists \varepsilon = \frac{2}{e} \; \forall T > 0 \; \exists \xi_2 = \pi + 2\pi n, \; \xi_1 = 2\pi n, \; n = [T] + 1, \; \exists \alpha = \frac{1}{\pi + 2\pi n} :$$

$$\left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-\alpha t} \sin t dt \right| = \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-\alpha t} \sin t dt \geqslant e^{-\alpha \xi_2} \int_{2\pi n}^{\pi + 2\pi n} \sin t dt = 2e^{-1}.$$

По критерию Коши интеграл сходится неравномерно.

Заметим, что выбор n обеспечивает условие $\xi_2 > \xi_1 \geqslant T$. $\triangleleft$

Пример 2.6.

Исследовать на равномерную сходимость несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{\sin\alpha x}{x+\alpha}dx$ на множествах:

а) $E_\alpha = (\alpha_0; +\infty)$, где $\alpha_0 > 0$;

б) $E_0 = (0; +\infty)$.

$\triangleright$ Отметим, что единственной особой точкой является $+\infty$.

Поточечная сходимость на E_α и E_0 доказывается по признаку Дирихле сходимости несобственных интегралов [6].

Подчеркнем, что при любом фиксированном α интеграл сходится условно, поэтому признак Вейерштрасса в данном случае не применим. Проверим условия признака Дирихле.

а) Функция $f(x;\alpha) = \sin\alpha x$ непрерывна и на множестве E_α имеет равномерно ограниченную первообразную, а именно $\forall T > 0$ $\left|\int_1^T \sin\alpha x dx\right| = \left|\frac{\cos\alpha T - 1}{\alpha}\right| \leqslant \frac{2}{\alpha_0}$.

Функция $g(x;\alpha) = \frac{1}{x+\alpha}$ монотонна при любом $\alpha \in E_\alpha$ (в очевидных случаях фиксируем свойство без обоснования). Так как $0 \leqslant \frac{1}{x+\alpha} \leqslant \frac{1}{x} = g(x)$, $g(x) \to 0$ и не зависит от α, то $g(x;\alpha) \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$.

Интеграл сходится равномерно на E_α.

б) Как указано выше признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов не применим, так как при любом фиксированном α интеграл сходится условно.

Из равенства $\forall T > 0$ $\left|\int_1^T \sin\alpha x dx\right| = \left|\frac{\cos\alpha T - 1}{\alpha}\right|$ можно заметить, что на множестве E_0 первообразная функции $\sin\alpha x$ не является равномерно ограниченной, поэтому признак Дирихле не применим.

Поэтому предполагаем и доказываем неравномерную сходимость на E_0.

Предварительно рассмотрим соображения, позволяющие выбрать параметры в отрицании условия Коши. При фиксированном α функция $g(x;\alpha) \sim \frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$, и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится. В доказательстве условия Коши неравномерной сходимости выберем отрезок интегрирования также, как в условии Коши расходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$. Значение параметра α

[6] см. Комментарий 2.4

подберем так, чтобы аргумент синуса на отрезке интегрирования оценивался снизу константой.

Оформим результат.

В результате оценок снизу, получим:

$$\exists\varepsilon\ \forall T > 1\ \exists\xi_2 = 2T > \xi_1 = T \in [T;+\infty)\ \exists\alpha = \frac{1}{T}$$
$$\hookrightarrow \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\sin\frac{t}{T}}{t+\frac{1}{T}}dt \geqslant \frac{\sin 1}{2T+T}T \geqslant \frac{\sin 1}{3}.$$

Выбирая $\varepsilon = \frac{\sin 1}{3}$, завершим доказательство неравномерной сходимости. $\triangleleft$

Вычисление несобственных интегралов, зависящих от параметра.

В параграфе основное внимание уделяется задачам вычисления несобственных интегралов, зависящих от параметра. Мы рассмотрим три основных подхода к вычислению:

1) с использованием определения и основных свойств несобственного интеграла: пример 3.1;

2) сведение к табличным — ранее вычисленным интегралам, указанным в таблице 1 (см. ниже): примеры 3.2. и 3.3;

3) с использованием теорем непрерывности, дифференцирования и интегрирования несобственного интеграла по параметру: примеры 3.4 – 3.7.

Прежде чем формулировать теоремы, подчеркнем, что отличием теорем для несобственных интегралов от соответствующих теорем для собственных интегралов, зависящих от параметра, является включение требования равномерной сходимости.

Теорема 3.1.(Непрерывность интеграла по параметру.)
Пусть функция $f(x;\alpha)$ непрерывна на множестве $[a;b) \times [\alpha_1;\alpha_2]$ и интеграл $\int_a^b f(x;\alpha)dx$ сходится равномерно на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$, тогда функция $F(\alpha) = \int_a^b f(x;\alpha)dx$ непрерывна на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$.

Теорема 3.2. (Интегрирование интеграла по параметру.)
Пусть функция $f(x;\alpha)$ непрерывна на множестве $[a;b)\times[\alpha_1;\alpha_2]$ и интеграл $\int_a^b f(x;\alpha)dx$ сходится равномерно на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$, тогда

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(\int_a^b f(x;\alpha)dx\right)d\alpha=\int_a^b\left(\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(x;\alpha)d\alpha\right)dx.$$

Замечание. Применение теоремы интегрирования для вычисления несобственных интегралов, зависящих от параметра, удобно в случае, когда подынтегральная функция может быть представлена определенным интегралом Римана по отрезку, зависящему от параметра: $f(x;\alpha)=\int_{\alpha_0}^{\alpha} g(x;y)dy$ так, что для функции $g(x;y)$ выполнены условия теоремы интегрирования и интеграл известен (можно вычислить) $\int_a^b g(x;y)dx = G(y)$. Тогда, меняя порядок интегрирования, сводим задачу к вычислению определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x;\alpha)dx=\int_a^b\int_{\alpha_0}^{\alpha} g(x;y)dydx=\int_{\alpha_0}^{\alpha}\int_a^b g(x;y)dxdy=\int_{\alpha_0}^{\alpha} G(y)dy.$$

Аналогична схема применения теоремы интегрирования несобственного интеграла для интегралов зависящих от двух параметров.

Теорема 3.3. (Дифференцирование интеграла по параметру.)
Пусть функция $f(x;\alpha)$ и ее частная производная $f'_\alpha(x;\alpha)$ непрерывны на прямоугольнике $[a;b)\times[\alpha_1;\alpha_2]$, интеграл $\int_a^b f'_\alpha(x;\alpha)dx$ сходится равномерно на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$ и при некотором $\alpha_0\in[\alpha_1;\alpha_2]$ сходится интеграл $\int_a^b f(x;\alpha_0)dx$, тогда функция $F(\alpha)=\int_a^b f(x;\alpha)dx$ дифференцируема на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$ и

$$F'(\alpha)=\int_a^b f'_\alpha(x;\alpha)dx.$$

Замечание. Применение теоремы дифференцирования целесообразно рассматривать, при условии, что несобственный интеграл от производной подынтегральной функции известен (легко вычислить).

Несобственный интеграл, зависящий от параметра, удобно рассматривать как функцию параметра $F(\alpha)$, тогда применение теоремы дифференцирования позволяет найти производную этой функции.

Затем $F(\alpha)$ может быть восстановлена по своей производной:

– либо с помощью определенного интеграла Римана по формуле Ньютона-Лейбница (при этом необходимо найти значение интеграла при конкретном значении параметра),

– либо с помощью неопределенного интеграла (при этом используются свойства функции $F(\alpha)$ для нахождения значения произвольной постоянной, например, предел на бесконечности, ограниченность и т.п.).

Замечание. Подчеркнем, что в задачах на применение теоремы дифференцирования несобственного интеграла на рассматриваемом множестве параметров Ω интеграл от производной может сходиться неравномерно. Тогда используется прием построения вспомагательного отрезка множества параметров, на котором есть равномерная сходимость:

– фиксируется произвольное значение параметра α_0,

– строится отрезок множества значений параметров, содержащий α_0, содержащийся в множестве параметров и такой, что интеграл от производной сходится равномерно на этом отрезке,

– на этом отрезке доказывается поточечная сходимость интеграла $F(\alpha)$ и для любого α из этого отрезка находится $F'(\alpha)$, в частности, $F'(\alpha_0)$,

– в силу произвольности параметра α_0 из Ω получаем, что $F'(\alpha)$ найдено для любого $\alpha \in \Omega$. (В приведеном рассуждении предполагается, что вспомогательный отрезок существует для любого α_0.)

Прием был показан в примере 1.1 и будет использован в примерах 3.3, 3.5, 3.7.

Рассмотрим вычисление несобственных интегралов, зависящих от двух параметров, методом дифференцирования по параметру. При этом необходимо понять по какому параметру целесообразно осуществлять дифференцирование (если параметр не выбран в условии задачи). Для выбора можно:

– осуществить формальное дифференцирование по каждому параметру и оценить возможность вычисления полученных интегралов;

– проверить условия теоремы дифференцирования для каждого параметра;

– вычисление исходного интеграла осуществляется интегрированием его производной по некоторому отрезку, поэтому необходимо вычислить значение интеграла при фиксированной переменной ($\Phi(0;\beta)$ в примере 3.5), или при одинаковых значениях параметров ($F(\beta;\beta)$ в примере 3.4), или на основе свойств функции (органиченности и предельного перехода в примере 3.7);

– после проведения предварительного анализа и выбора параметра дифференцирования, второй параметр считаем произвольным и фиксированным.

Отметим, что для некоторых интегралов возможно применение разных методов (см. примеры 3.5 и 3.7).

Приведем *таблицу интегралов, зависящих от параметров*, которые могут использоваться, как известные [7] при вычислении других несобственных интегралов, зависящих от параметра:

Таблица 1.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos\alpha x dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}; \qquad (I_1)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\sin\alpha x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}; \qquad (I_2)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha \qquad \text{интеграл Дирихле;} \qquad (I_3)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{интеграл Эйлера-Пуассона.} \qquad (I_4)$$

Ниже мы приводим вычисления некоторых из них.

Пример 3.1. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} e^{-\beta x}\cos\alpha x dx$ при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

$\triangleright$ Заметим, что при фиксированных $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ интеграл сходится по признаку сравнения для несобственного интеграла, функции $\cos\alpha x$, $e^{-\beta x}$, $\sin\alpha x$ (требуется при втором интегрировании по частям) непрерывно дифференцируемы и существуют пределы при $x \to +\infty$ внеинтеральных членов. Дважды интегрируем по частям [8]. Получим:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos\alpha x dx = \frac{\sin\alpha x}{\alpha}e^{-\beta x}\Big|_0^{+\infty} - \frac{\beta\cos\alpha x}{\alpha^2}e^{-\beta x}\Big|_0^{+\infty} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos\alpha x dx.$$

Внеинтегральные члены стремятся к нулю при $x \to +\infty$, первое слагаемое в нуле равно 0, второе слагаемое в нуле с учетом знака равно $\frac{\beta\cos 0}{\alpha^2}e^0 = \frac{\beta}{\alpha^2}$.

Обозначим искомый интеграл I. Получим уравнение $I = \frac{\beta}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}I$.

Тогда $I = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$.$\triangleleft$

---

[7] Только, если табличный интеграл используется при вычислении другого несобственного интеграла и не является осноным содержанием задачи.

[8] см. Комментарий 2.2.

Для сведения интегралов к эталонам используются приемы преобразования подынтегрального выражения, интегрирования по частям, дифференцирования по параметру и др.

Пример 3.2. Используя интеграл Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha$, вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} dx.$$

$\triangleright$

Проинтегрировав по частям, получим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} dx = -\left.\frac{\sin x - x\cos x}{2x^2}\right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{2x} dx = \\ = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Стремление к нулю внеинтегрального члена при $x \to +0$ и при $x \to +\infty$ обосновать самостоятельно.

$\triangleleft$

Пример 3.3. Используя интеграл Эйлера - Пуассона $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, вычислить интеграл

$$F(\alpha;\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx$$

при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Приведем два решения.

$\triangleright$ Решение 1.

Для любых $\alpha > 0,\ \beta > 0$ подынтегральная функция $f(x;\alpha;\beta) = \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}$ является четной по переменной x и интеграл $\int_0^{+\infty} f(x,\alpha,\beta)dx$ сходится: $f(x;\alpha;\beta) \sim \beta - \alpha$ при $x \to 0$, то есть точка $x = 0$ не является особой; $|f(x;\alpha;\beta)| \leqslant \frac{1}{x^2}$ при достаточно больших x, следовательно, интеграл сходится по признаку сравнения для несобственных интегралов.

Поэтому интеграл $F(\alpha;\beta)$ сходится и $F(\alpha;\beta) = 2\int_0^{+\infty} f(x;\alpha;\beta)dx$.

Так как $f(x;\alpha;\beta) = -f(x;\beta;\alpha)$ и $f(x;\alpha;\alpha) = 0$, а значит $F(\alpha;\alpha) = 0$, то достаточно вычислить интеграл только при условии $\alpha > \beta$.

Производная подынтегральной функции по параметру α имеет вид $f'_\alpha = -e^{-\alpha x^2}$. Интеграл от производной может быть сведен к интегралу Эйлера - Пуассона заменой переменной интегрирования. Проверим условия теоремы дифференцирования.

Как показано в примере 2.3 интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ сходится неравномерно на множестве $\alpha > 0$. Зафиксируем $\beta > 0$. Введенное ограничение $\alpha > \beta$ позволяет применить теорему дифференцирования интеграла по параметру α на любом подотрезке луча $\alpha \in (\beta;+\infty)$.

Функция $f(x;\alpha;\beta)$ непрерывно-дифференцируема на луче $(\beta;+\infty)$.

Покажем равномерную сходимость интеграла от производной:
так как $\left|-e^{-\alpha x^2}\right| \leqslant e^{-\beta x^2}$, оценивающая функция не зависит от α и интеграл от нее сходится, то по признаку Вейерштрасса сходится равномерно по α на луче $(\beta;+\infty)$.

Сходимость интеграла $F(\alpha;\beta)$ показана выше.

Тогда $F'_\alpha = -2\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$.

Значит, $F(\alpha;\beta) = F(\beta;\beta) + \int_\beta^\alpha \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}\right) dt = 0 + 2\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})$.

При $0 < \alpha < \beta$ используем свойство $f(x;\alpha;\beta) = -f(x;\beta;\alpha)$.

Итак, $F(\alpha;\beta) = 2\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})$. ◁

Замечание. Подчеркнем, что интеграл $F(x;\alpha;\beta)$ нельзя свести к разности интегралов вида $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}}{x^2} dx$, так как указанный интеграл расходится: $\frac{e^{-\alpha x^2}}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ при $x \to 0$. Если подынтегральная функция может быть представлена разностью некоторых более «удобных» функций, прежде осуществления перехода к разности интегралов, необходимо проверить поточечную сходимость слагаемых.

Замечание. В примере 3.3 при вычислении интегралов от двух параметров был показан прием использования второго параметра для выделения множества, на котором применима теорема дифференцирования и выполнено условие равномерной сходимости.

▷ Решение 2.

Так как подынтегральная функция четная, то $F(\alpha;\beta) = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx$.

Воспользуемся теоремой интегрирования и представим подынтегральную функцию в виде определенного интеграла Римана: $\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} = \int_\alpha^\beta e^{-yx^2} dy$.

Интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-yx^2} dx$ на отрезке $[\alpha;\beta]$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Применим теорему об интегрировании несобственного интеграла:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \int_\alpha^\beta e^{-yx^2} dy dx = \int_\alpha^\beta \int_0^{+\infty} e^{-yx^2} dx dy =$$

используя интеграл Эйлера-Пуассона, получим:

$$= \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}} dy = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}\right).$$

Тогда $F(\alpha,\beta) = 2\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}\right)$. ◁

Пример 3.4. Доказать непрерывность справа функции $\Phi(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\beta x} dx$ в точке $\beta = 0$.

$\triangleright$ Теорема непрерывности несобственного интеграла сформулирована для множества параметров, являющегося отрезком.

Зафиксируем отрезок $[0; \beta_0]$, где $\beta_0 > 0$ выбрано произвольно.

Подынтегральная функция $\frac{\sin x}{x} e^{-\beta x}$ непрерывна на $[0; +\infty) \times [0; \beta_0]$ как произведение непрерывных функций $\frac{\sin x}{x}$ и $e^{-\beta x}$.

Представим интеграл суммой собственного и несобственного интегралов, чтобы не анализировать особенность в нуле:
$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\beta x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} e^{-\beta x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\beta x} dx$. Первое слагаемое представления является собственным интегралом от непрерывной функции, следовательно, непрерывно справа в точке $\beta = 0$. Равномерную сходимость второго интеграла докажем по признаку Дирихле, так как получить равномерную по β оценку и воспользоваться признаком Вейерштрасса не представляется возможным: при $\beta = 0$ исследуемый интеграл имеет вид $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ и сходится условно.

Функция $g(x) = \sin x$ непрерывна на множестве $[1; +\infty)$ и имеет место равномерная по β оценка ее первообразной: $\forall T > 1$ $\left| \int_1^T \sin x dx \right| \leqslant 2$.

Функция $f(x; \beta) = \frac{1}{xe^{\beta x}}$ непрервно-дифференцируема, монотонно убывает по x при любом фиксированном β и равномерно стремится к нулю в силу оценки $0 \leqslant f(x; \beta) \leqslant \frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$.

По признаку Дирихле интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\beta x} dx$ сходится равномерно по β на отрезке $[0; \beta_0]$. И функция $\Phi(\beta)$ непрервна справа в точке $\beta = 0$, как сумма непрервных справа функций.$\triangleleft$

Пример 3.5. Вычислить интеграл

$$\Phi(\alpha;\beta)=\int_0^\infty e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx \tag{6}$$

при $\beta>0$.

$\triangleright$ Предварительный анализ задачи.

Обозначим подынтегральную функцию $\phi(x,\alpha,\beta)=e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}$.

Тогда $\phi'_\alpha=e^{-\beta x}\cos\alpha x$ и $\phi'_\beta=-e^{-\beta}\sin\alpha x$. Интегралы от производных можно вычислить в обоих случаях (см. табличные интегралы, зависящие от параметра I_1 и I_2).

Интеграл $\int_0^{+\infty}\phi'_\beta(x;\alpha;\beta)dx$ сходится неравномерно на множестве $\beta>0$ (см.пример 2.5). Поэтому необходимо либо рассматривать множество $\beta\geqslant\beta_0>0$, либо дифференцировать по другому параметру: равномерную сходимость интеграла от производной можно доказать по признаку Вейерштрасса и $\Phi(0;\beta)=0$, так как $\phi(x;0;\beta)=0$.

Осуществим дифференцирование по параметру α.

В силу первого замечательного предела точка $x=0$ не является особой (подынтегральная функция ограничена в окрестности точки $x=0$).

Заметим, что подынтегральная функция является нечетной по α. Проверим дифференцируемость по α при $\alpha>0$.

Так как теорема дифференцирования несобственного интеграла сформулирована для параметров, принадлежащих некоторому отрезку, построим отрезок для произвольного фиксированного $\alpha>0$: $\left[\frac{\alpha}{2};2\alpha\right]=E$.

Интеграл $\Phi(\alpha;\beta)$ сходится поточечно по признаку сравнения сходимости несобственных интегралов, так как при фиксированных $\alpha\in E$ и $\beta>0$ имеет место оценка $\left|\frac{\sin\alpha x}{x}e^{-\beta x}\right|\leqslant\frac{1}{e^{\beta x}}$ и интеграл от оценивающей функции сходится как эталон.

Интеграл $\Psi(\alpha;\beta)=\int_0^\infty e^{-\beta x}\cos\alpha x dx$, полученный из (6) дифференцированием по α подынтегральной функции, сходится равномерно по $\alpha\in E$ по признаку Вейерштрасса:

$$\left|e^{-\beta x}\cos\alpha x\right|\leqslant e^{-\beta x}.$$

Следовательно, по теореме дифференцирования несобственных интегралов $\Phi'_\alpha(\alpha;\beta)=\Psi(\alpha;\beta)$ на отрезке $\left[\frac{\alpha}{2};2\alpha\right]$, а значит, в виду произвольности $\alpha>0$ и на луче $(0;+\infty)$. Используя табличный интеграл I_1, имеем

$$\Phi'_\alpha(\alpha;\beta)=\Psi(\alpha;\beta)=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Интегрируя на отрезке $[0;\alpha]$ полученное равенство, имеем:

$$\Phi(\alpha;\beta)-\Phi(0;\beta)=\beta\int_0^\alpha\frac{dt}{t^2+\beta^2}=\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}.$$

Так как $\Phi(0;\beta)=0$ (подынтегральная функция равна 0), то при $\alpha>0$ и $\beta>0$

$$\Phi(\alpha;\beta)=\int_0^\infty e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}.$$

В силу нечетности $\Phi(\alpha;\beta)$ по α формула верна при всех действительных α.$\triangleleft$

Замечание. Вычисление $\Phi(\alpha;\beta)=\int_0^\infty e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$ дифференцированием по параметру β возможно (см. пример 3.7).

Пример 3.6. Вычислить интеграл Дирихле $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx$.

$\triangleright$ Заметим, что $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ нечетная функция, поэтому достаточно вычислить интеграл при $\alpha > 0$.

Пусть $\alpha > 0$. Применение теоремы дифференцирования несобственного интеграла по параметру невозможно, так как интеграл от производной подынтегральной функции $\int_0^\infty \cos \alpha x dx$ расходится при любом α.

Рассмотрим интеграл $\Phi(\alpha;\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ при $\beta > 0$ и докажем, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \lim_{\beta \to +0} \int_0^\infty e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx.$$

Доказательство равномерной сходимости интеграла $\Phi(\alpha;\beta)$ по β на отрезке $[0;1]$ аналогично рассмотренному в примере 2.4 (проведите самостоятельно).

Следовательно, функция $\Phi(\alpha;\beta)$ непрерывна по β в нуле справа и можно перейти к пределу справа при $\beta \to +0$ под знаком интеграла:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \lim_{\beta \to +0} \int_0^\infty e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \lim_{\beta \to 0+0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}.$$

Так как $F(\alpha)$ - нечетная функция, получаем

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}. \triangleleft$$

При вычислении интеграла Дирихле можно сначала вычислить однопараметрический интеграл $\Phi(\beta) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-\beta x} dx$ при $\beta > 0$, воспользоваться примером 3.4 и найти интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. Интеграл Дирихле можно найти заменой переменной. Приведем вычисление вспомогательного однопараметрического интеграла.

Пример 3.7. Вычислить интеграл $\Phi(\beta) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\beta x} dx$ при $\beta > 0$.

$\triangleright$ Воспользуемся теоремой дифференцирования.

Вычислим интеграл от производной подынтегральной функции:

$\int_0^{\infty} -\sin x \; e^{-\beta x} dx = -\frac{1}{1+\beta^2}$.

Заметим, что интеграл от производной сходится неравномерно на любом отрезке $[0; \beta_0]$, где $\beta_0 > 0$.

Поэтому для обоснования применения теоремы дифференцирования в произвольной точке $\beta > 0$ рассмотрим отрезок $[\beta_1; \beta_2]$, где $0 < \beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2$.

Интеграл сходится равномерно на отрезке $[\beta_1; \beta_2]$ по теореме Вейерштрасса, так как $\left|\sin x \; e^{-\beta x}\right| \leqslant e^{-\beta_1 x}$ и интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\beta_1 x} dx$ сходится как эталон.

По теореме дифференцирования несобственного интеграла

$$\Phi'(\beta) = \int_0^{\infty} -\sin x \; e^{-\beta x} dx = -\frac{1}{1+\beta^2}$$

на любом отрезке $[\beta_1; \beta_2] \subset (0; +\infty)$, а значит и для любого $\beta > 0$. Найдем функцию $\Phi(\beta)$ как первообразную: $\Phi(\beta) = -\operatorname{arctg} \beta + C$ на $(0; +\infty)$.

Из оценки $|\Phi(\beta)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} dx = \frac{1}{\beta}$ следует, что $\Phi(\beta) \to 0$ при $\beta \to +\infty$ и, значит, $\Phi(\beta) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \beta$. $\triangleleft$

Дополнения к пособию.

Определение. (Равномерная сходимость функции по параметру.)

Говорят, что функция $f(x;\alpha)$ стремится к функции $f_0(x)$ при $\alpha \to \alpha_0 \in [\alpha_1;\alpha_2]$ равномерно по $x \in [a;b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall \alpha : 0 < |\alpha - \alpha_0| < \delta \; \forall x \in [a;b] \; \hookrightarrow \; |f(x;\alpha) - f_0(x)| < \varepsilon.$$

Теорема.(О предельном переходе под знаком интеграла.)

Пусть функция $f(x;\alpha)$ стремится к $f_0(x)$ при $\alpha \to \alpha_0 \in [\alpha_1;\alpha_2]$ равномерно по $x \in [a;b]$, функция $f_0(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$. Тогда

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} F(\alpha) = \lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_a^b f(x;\alpha)dx = \int_a^b \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x;\alpha)dx = \int_a^b f_0(x)dx.$$

Другими словами, в условиях теоремы, операции предельного перехода и интегрирования можно выполнить в любом порядке.

Теорема. (Об интегрировании интеграла по параметру.)

Пусть для любого $x \in [a;b]$ функция $f(x;\alpha)$ интегрируема по Риману на отрезке $[\alpha_0;\alpha_1]$, для любого $\alpha \in [\alpha_0;\alpha_1]$ функция $f(x;\alpha)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$ и существует кратный интеграл $\iint_{[a;b]\times[\alpha_1;\alpha_2]} f(x;\alpha)dxd\alpha$. Тогда существуют оба повторных интеграла и они равны:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha 1} \left(\int_a^b f(x;\alpha)dx \right) d\alpha = \int_a^b \left(\int_{\alpha_0}^{\alpha 1} f(x;\alpha)d\alpha \right) dx.$$

Таким образом, исследуемая функция $F(\alpha)$ интегрируема на отрезке $[\alpha_0;\alpha_1]$ и интегралы можно расставить в любом порядке.

Комментарии.

Комментарий 1. Теорема отделимости от нуля.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и принимает положительные значения на отрезке $[a;b]$.

Тогда существует $\mu > 0$ такое, что $\forall x \in [a;b] \hookrightarrow f(x) > \mu$.

$\triangleright$ Непрерывная на отрезке функция достигает своей точной нижней грани. Так как функция неотрицательна, имеем : $\exists x_0 \in [a;b]$ такое, что $\inf_{[a;b]} f = f(x_0) > 0$. Выберем $\mu = \frac{1}{2} \inf_{[a;b]} f$. По определению точной нижней грани получим доказываемую оценку. $\triangleleft$

Комментарий 2. Определение и методы исследования несобственного интеграла с одной особой точкой (кратко).

Комментарий 2.1.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;b)$, где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Пусть $\forall \xi \in [a;b)$ функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a;\xi]$.

Несобственным интегралом $\int_a^b f(x)dx$ называется предел $\lim_{\xi \to b} \int_a^\xi f(x)dx$.

Если существует конечный $\lim_{\xi \to b} \int_a^\xi f(x)dx$, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, иначе — расходится.

Комментарий 2.2.

Теорема (Об интегрировании по частям.)

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a;b)$, пусть существует $\lim_{x \to b-0}(uv)$, тогда

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu,$$

где $uv|_a^b = \lim_{x \to b-0}(uv) - u(a)v(a)$.

Формула интегрирования по частям справедлива в случае сходимости по крайней мере одного из входящих в нее интегралов. Если один из интегралов расходится, то расходится и другой.

Комментарий 2.3.

Исследование на сходимость несобственных интегралов от знакопостоянных функций:

Теорема (Признак сравнения.)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $[a;b)$, где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $\forall \xi \in [a;b)$ интегрируемы по Риману на отрезке $[a;\xi]$.

Пусть $\forall x \in [a;b]$ выполнено неравенство: $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Тогда

1) из сходимости несобственного интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$;

2) из расходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость несобственного интеграла $\int_a^b g(x)dx$.

При использовании признака проверяют выполнение неравенства для *подынтегральных функций*: $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

Теорема (Замена на эквивалентную функцию.)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и знакопостоянны на промежутке $[a;b)$, где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $\forall \xi \in [a;b)$ интегрируемы по Риману на отрезке $[a;\xi]$.

Пусть $f \sim g$ при $x \to b$. Тогда, несобственные интегралы $\int_a^b g(x)dx$ и $\int_a^b f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Теорему замены на эквивалентную функцию применяют для знакопостоянных функций, которые могут быть сведены к следующим *эталонам*, для которых известны условия сходимости и расходимости:

$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$,

расходится при $\alpha \geqslant 1$;

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$,

расходится при $\alpha \leqslant 1$;

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{\alpha x}}$ сходится при $\alpha > 0$,

расходится при $\alpha \leqslant 0$;

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ сходится при $\alpha < 1, \forall\beta$ и при $\alpha = 1, \beta > 1$,

расходится при $\alpha > 1, \forall\beta$ и при $\alpha = 1, \beta \leqslant 1$;

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ сходится при $\alpha > 1, \forall\beta$ и при $\alpha = 1, \beta > 1$,

расходится при $\alpha < 1, \forall\beta$ и при $\alpha = 1, \beta \leqslant 1$;

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{\alpha x} x^\beta}$ сходится при $\alpha > 0, \forall\beta$ и при $\alpha = 0, \beta > 1$,

расходится при $\alpha < 0, \forall\beta$ и при $\alpha = 0, \beta \leqslant 1$.

Комментарий 2.4.

Исследование на *сходимость* несобственных интегралов от знакопеременных функций.

Напомним только признак Дирихле.

Теорема (признак Дирихле сходимости несобственного интеграла.)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$, такие что:

$f(x)$ непрерывна на луче $[a; +\infty)$;

$g(x)$ непрерывно дифференцируема на луче $[a; +\infty)$.

Пусть

1) первообразная $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ ограничена на луче $[a; +\infty)$:

$$\exists C \in \mathbb{R} : \ \forall t \in [a; +\infty) \ \hookrightarrow |F(t)| \leqslant C;$$

2) функция $g(x)$ является невозрастающей, начиная с некоторого x_0:

$$\exists x_0 \in [a; +\infty) : \ \forall x \in [x_0; +\infty) \hookrightarrow g'(x) \leqslant 0;$$

3) функция $g(x)$ стремится к нулю при $x \to +\infty$.

Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Комментарий 2.5.

Замечание о записи первообразной.

Так как функция $f(x)$ непрерывна, то функция, заданная как интеграл с переменным верхним пределом, $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ при $t \geqslant a$ непрерывно дифференцируема и, переобозначая переменную, имеем равенство для любого $x \geqslant a \hookrightarrow F'(x) = f(x)$.

То есть $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$.

Обращаем внимание, что для задания первообразной используется *интеграл с переменным верхним пределом*. Нельзя использовать несобственный интеграл, так как он либо расходится (например, для $f(x) = \sin x$), либо является константой, т.е. его производная равна нулю, а не подынтегральной функции.

Рекомендуемая литература.

1. Бесов. О.В. Лекции по математическому анализу. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 480с. — ISBN 978-5-9221-1506-3.

2. Иванов Г.Е. Лекции по математическому анализу: в 2 ч.: учебное пособие/ Г.Е. Иванов. — 3-е изд., испр. и доп. — М.:МФТИ, 2011. — ISBN 978-5-7417-0382-3.

3. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.