Введение в нормированные и евклидовы пространства.

Основные определения и примеры.

Напомним определения вещественного (комплексного) линейного пространства, нормированного пространства и евклидова пространства.

Определение 1.1. Множество L называется вещественным линейным пространством, если в L определены операции

сложения

$$+ : L \times L \to L$$

и умножения на действительное число

$$\cdot_\lambda : \mathbb{R} \times L \to L,$$

удовлетворяющие следующим аксиомам:

1) $\forall f, g \in L \hookrightarrow f + g = g + f$;

2) $\forall f, g, h \in L \hookrightarrow (f + g) + h = f + (g + h)$;

3) $\exists 0 \in L : \forall f \in L \hookrightarrow f + 0 = f$;

4) $\forall f \in L \; \exists - f \in F : f + (-f) = 0$;

5) $\forall f \in L \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \hookrightarrow \alpha\left(\beta f\right) = \left(\alpha\beta\right) f$;

6) $\forall f \in L \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \hookrightarrow \left(\alpha + \beta\right) f = \alpha f + \beta f$;

7) $\forall f, g \in L \forall \alpha \in \mathbb{R} \hookrightarrow \alpha\left(f + g\right) = \alpha f + \alpha g$;

8) для $1 \in \mathbb{R} \; \forall f \in L \hookrightarrow 1 f = f$.

Определение комплексного линейного пространства получается заменой множества $\mathbb{R}$ на множество $\mathbb{C}$.

Система $\{f_k\}_{k=1}^n \subset L$ называется линейно независимой, если из равенства нулю ее линейной комбинации следует равенство нулю всех коэффициентов:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Бесконечная система элементов линейного пространства называется линейно независимой, если любое конечное число ее элементов линейно независимо.

Определение 1.2. Размерность линейного пространства [1].

Если в линейном пространстве можно найти n линейно независимых элементов, а любые $n+1$ элементов этого пространства линейно зависимы, то говорят, что линейное пространство имеет размерность n.

Если в линейном пространстве можно указать систему из произвольного конечного числа линейно независимых элементов, то говорят, что линейное пространство бесконечномерно.

Определение 1.3. Линейное вещественное пространство L называется нормированным, если в нем введена норма, то есть функция

$$\| \ \| : L \to [0; +\infty)\,,$$

такая что:

1) $\forall f \in L \hookrightarrow \|f\| \geqslant 0$;

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall f \in L \hookrightarrow \|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$;

3) $\forall f, g \in L \hookrightarrow \|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$;

4) $\forall f \in L; \|f\| = 0 \hookrightarrow f = 0$.

Нормированное пространство L с нормой $\| \ \|$ будем обозначать $(L, \| \ \|)$. Для некоторых нормированных пространств приняты стандартные обозначения, которые будут введены ниже.

Определение комплексного нормированного пространства получается заменой множества $\mathbb{R}$ на множество $\mathbb{C}$.

[1] Подробнее см. курс линейной алгебры.

Определение 1.4. Линейное вещественное пространство L называется евклидовым, если в нем определено скалярное произведение, то есть билинейная, симметричная, положительно определенная функция

$$(\ , \ ) : L \times L \to \mathbb{R} :$$

1)$\forall f, g, h \in L \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \hookrightarrow (\alpha f + \beta g, h) = \alpha\,(f, h) + \beta\,(g, h)$;

2) $\forall f, g \in L \hookrightarrow (f, g) = (g, f)$;

3) $\forall f \in L \hookrightarrow (f, f) \geqslant 0$;

4) $\forall f \in L : (f, f) = 0 \to f = 0$.

Задача 1.1. Докажите, что

1) любое евклидово пространство является нормированным относительно евклидовой нормы

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}; \tag{1}$$

2) в любом евклидовом пространстве выполнено неравенство Коши-Буняковского

$$(f, g) \leqslant \sqrt{(f, f)}\sqrt{(g, g)}; \tag{2}$$

3) для евклидовой нормы имеет место формула

$$(f, g) = \frac{1}{2}\left(\|f + g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2\right); \tag{3}$$

4) если для некоторой нормы в нормированном пространстве L выражение $\frac{1}{2}\left(\|f + g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2\right)$ удовлетворяет аксиомам скалярного произведения, то норма является евклидовой и пространство L является евклидовым со скалярным произведением, определенным формулой (3).

Одним из основных изучаемых в теме понятий является сходимость последовательности элементов нормированного пространства по норме:

Определение 1.5. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ элементов нормированного пространства $(L, \|\ \|)$ называется сходящейся к элементу $f \in L$ по норме, если числовая последовательность $\|f_n - f\| \to 0$ при $n \to +\infty$.

Так как на одном линейном пространстве можно определить несколько норм, т.е. определить несколько нормированных пространств, то важным является вопрос сравнения сходимости в этих пространствах.

Определение 1.6. Две нормы $\| \ \|_{(1)}$ и $\| \ \|_{(2)}$ в линейном пространстве X называют эквивалентными, если существуют произвольные постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что

$$\forall x \in X \hookrightarrow c_1\|x\|_{(1)} \leqslant \|x\|_{(2)} \leqslant c_2\|x\|_{(1)}.$$

Теорема 1.1.

Две нормы, определенные в одном и том же линейном пространстве, эквивалентны тогда и только тогда, когда из сходимости последовательности по одной из норм следует ее сходимость по другой норме.

Рассмотрим некоторые примеры нормированных и евклидовых пространств, а также примеры, отражающие свойства сходимости последовательностей элементов по различным нормам.

Нормы в $\mathbb{R}^n$.

В линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ можно ввести, например, следующие нормы:

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|;$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|;$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^2|}.$$

В $\mathbb{R}^n$ сходимость по каждой из норм совпадает с покоординатной сходимостью.

Подчеркнем, что указанный факт является проявлением более общего свойства:

Теорема 1.2.

В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

Норма $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i^2|}$ порождается скалярным произведением: $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, т.е. является евклидовой нормой.

Нормы в линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$.

Рассмотрим примеры норм и скалярного произведения на линейном пространстве непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций.

Напомним, что сумма и произведение на число функций определяется поточечно, то есть: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ и $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Выполнение аксиом линейного пространства (Определение 1.1) полезно проверить самостоятельно.

⊚ Нормированное пространство функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$ с нормой

$$\|f\|_{C[a;b]} = \max_{x\in[a;b]} |f(x)|$$

будем обозначать $C\,[a;b]$.

Сходимость последовательности непрерывных функций по норме $\|\ \|_{C[a;b]}$ эквивалентна равномерной сходимости, что следует непосредственно из определений сходимости по норме в пространстве $C[a;b]$ и равномерной сходимости функциональной последовательности.

⊚ Пространство непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с нормой

$$\|f\|_{L_1[a;b]} = \int_a^b |f(x)|dx$$

обозначают $CL_1\,[a;b]$ и называют пространством непрерывных функций со сходимостью в среднем.

⊚ Пространство непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с нормой

$$\|f\|_{L_2[a;b]} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2dx}$$

обозначают $CL_2\,[a;b]$ и называют пространством непрерывных функций со сходимостью в среднем квадратичном.

Задача 1.2. Проверьте, что функции $\| \ \|_{C[a;b]}$, $\| \ \|_{L_1[a;b]}$ и $\| \ \|_{L_2[a;b]}$ определяют нормы на пространстве непрерывных функций.

Покажем, что нормы в пространствах $C\,[a;b]$, $CL_1\,[a;b]$ и $CL_2\,[a;b]$ определяют различную сходимость.

Пример 1.1. Рассмотрим непрерывные на отрезке $[0;1]$ функции $f_n(x) = n^\alpha x^n$. Найти все значения параметра α, при которых последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к нулевой функции по каждой из приведенных норм.

▷ Обозначим через f_0 нулевую функцию: $f_0(x) = 0$ для любого $x \in [0;1]$.

Найдем для каждой рассмариваемой нормы числовую последовательность из определения сходимости по норме (определение 1.5) и найдем все значения параметра α, при которых полученные числовые последовательности являются бесконечно малыми:

$$\|f_n - f_0\|_{C[0;1]} = \sup_{[0;1]} |f_n(x)| = n^\alpha$$

$$\Rightarrow \left(f_n \to f_0 \text{ в } C\,[0;1] \ \Leftrightarrow\ \alpha < 0\right).$$

$$\|f_n - f_0\|_{L_1[a;b]} = \int_0^1 |n^\alpha x^n| dx = \frac{n^\alpha}{n+1}$$

$$\Rightarrow \left(f_n \to f_0 \text{ в } CL_1\,[0;1] \ \Leftrightarrow\ \alpha < 1\right).$$

$$\|f_n - f_0\|_{L_2[a;b]} = \sqrt{\int_0^1 |n^{2\alpha} x^{2n}| dx} = \frac{n^\alpha}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\Rightarrow \left(f_n \to f_0 \text{ в } CL_2\,[0;1] \ \Leftrightarrow\ \alpha < \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, нормированные пространства $C[a;b]$, $CL_1[a;b]$ и $CL_2[a;b]$ совпадают как множество элементов — функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$, но различны как нормированные пространства, а нормы $\| \ \|_{C[a;b]}$, $\| \ \|_{L_1[a;b]}$ и $\| \ \|_{L_2[a;b]}$ не эквивалентны по теореме 1.1. ◁

Нормированные пространства $RL_1[a;b]$ и $RL_2[a;b]$.

Определение нормированного пространства включает:

– задание множества объектов;

– структуры линейного пространства на заданном множестве объектов, т.е. операций сложения элементов и умножения на число, удовлетворяющих системе аксиом;

– введение нормы.

Определение 1.7. Функция f называется абсолютно интегрируемой на конечном или бесконечном интервале $(a;b)$, если

1) функция f имеет на $(a;b)$ не более конечного числа особенностей, т.е. существуют числа

$$x_0, \dots, x_I : \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_I = b$$

такие, что для любого $i \in \{1, \dots, I\}$ и для любого отрезка

$$[\alpha; \beta] \subset (x_{i-1}; x_i)$$

существует интеграл Римана $\int_\alpha^\beta f(x)dx$;

2) интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится, как несобственный интеграл с конечным числом особенностей[2].

Рассмотрим множество абсолютно интегрируемых на отрезке $[a;b]$ функций. Операции определим поточечно [3].

Для любой абсолютно интегрируемой функции определена числовая функция $\|f\|_{L_1[a;b]} = \int_a^b |f(x)|dx$, для которой аксиомы 1-3 нормы проверяются аналогично случаю пространства $CL_1\,[a;b]$, но аксиома 4 не выполнена, так как, например, изменение функции $f_0(x) = 0$ в любом конечном множестве точек не влечет изменения значения интеграла $\int_a^b |f(x)|dx$. То есть, $\|f\|_{L_1[a;b]} = 0$ не влечет в пространстве абсолютно интегрируемых функций, что $f \equiv 0$.

[2] См. комментарий 1.

[3] см. тему «Нормы в линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$.» выше.

То есть, на линейном пространстве абсолютно интегрируемых функций, числовая функция $\|f\|_{L_1[a;b]} = \int_a^b |f(x)|dx$ не является нормой.

Для того, чтобы числовая функция $\|f\|_{L_1[a;b]} = \int_a^b |f(x)|dx$ удовлетворяла всем аксиомам нормы, изменим множество объектов и введем структуру линейного пространства на новом множестве[4].

На уровне идеи: пространство абсолютно интегрируемых функций можно упрощенно понимать как нормированное пространство абсолютно интегрируемых функций, в котором функции f и g, удовлетворяющие условию $\int_a^b |f-g|dx = 0$ отождествляются, т.е. объединены в один элемент пространства.

Рассмотрим подробнее.

◎ Пространство $RL_1\,[a;b]$ — абсолютно интегрируемых функций.

Подчеркнем, что аксиома 4 в определении нормы обеспечивает условие: элемент пространства равен нулю тогда и только тогда, когда норма этого элемента равна нулю. Для обеспечения выполнения аксиомы 4 введем определение классов эквивалентных относительно нормы [5] функций.

Абсолютно интегрируемые функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что

$$\|f-g\|_{L_1[a;b]} = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx = 0$$

будем называть эквивалентными относительно нормы $\|\ \|_{L_1[a;b]}$. В частности, свойству удовлетворяют функции, отличающиеся на множестве нулевой меры Жордана, например, в конечном числе точек. Обозначение: $f \sim g$.

Зафиксируем некоторую абсолютно интегрируемую функцию f. Множество всех эквивалентных ей функций будем называть классом эквивалентности и обозначать $\widehat{f}$.

[4] В конспекте представлена только идея определения пространств $L_1[a;b]$ и $L_2[a;b]$. Строгое определение соответствующих понятий опирается на понятия эквивалентности, классов эквивалентности и факторпространства. В дополнении к конспекту приведены примеры, иллюстрирующие понятие класс эквивалентности.

[5] Мы используем термин «эквивалентны относительно нормы», чтобы не вводить дополнительных терминов.

Для любой функции g эквивалентной f, можно построить класс эквивалентности, тогда $\widehat{g} = \widehat{f}$. Каждая абсолютно интегрируемая функция принадлежит некоторому классу эквивалентности, причем только одному. Другими словами, множество абсолютно интегрируемых функций оказывается представленным в виде объединения непересекающихся подмножеств — классов эквивалентных относительно $\| \|_{L_1[a;b]}$ функций[6].

Определим новое линейное пространство, элементами которого являются классы эквивалентных функций.

Введем структуру линейного пространства, т.е. операции умножения на число и сложения элементов[7].

Умножение класса эквивалентности на число.
В классе эквивалентности $\widehat{f}$ выберем любого представителя f, то есть абсолютно интнгрируемую функцию и умножим ее на число α. Полученная функция принадлежит какому-то классу эквивалентности, который мы будем обозначать $\widehat{\alpha f}$ и называть произведением класса эквивалентности $\widehat{f}$ на число α [8].

Сложение классов эквивалентности.
В классах эквивалентности $\widehat{f}$ и $\widehat{g}$ выберем по представителю f и g, соответственно. Суммой классов эквивалентности $\widehat{f}$ и $\widehat{g}$ будем называть класс эквивалентности, которому принадлежит элемент $f+g$: $\quad \widehat{f} + \widehat{g} = \widehat{f+g}$ [9].

Покажем, что функция $\| \|_{L_1[a;b]}$ принимает на эквивалентных относительно нормы абсолютно интегрируемых функциях одинаковое значение:

Пусть $f \sim g$, то есть $\|f-g\|_{L_1[a;b]} = 0$, тогда
$\|f\|_{L_1[a;b]} = \|f-g+g\|_{L_1[a;b]} \leqslant \|f-g\|_{L_1[a;b]} + \|g\|_{L_1[a;b]} = \|g\|_{L_1[a;b]}$.

То есть, $\|f\|_{L_1[a;b]} \leqslant \|g\|_{L_1[a;b]}$. Выполняя аналогичные оценки для $\|g\|_{L_1[a;b]}$, получим неравенство $\|g\|_{L_1[a;b]} \leqslant \|f\|_{L_1[a;b]}$, что завершает доказательство.

[6] Приведенные утверждения требуют доказательства.

[7] Требуется проверка выполнения аксиом линейного пространства.

[8] Требуется доказать, что полученный класс эквивалентности не зависит от выбора представителя.

[9] Требуется доказать, что полученный класс эквивалентности не зависит от выбора представителей.

Определим числовую функцию на классах эквивалентных относительно нормы функций:

$\|\widehat{f}\|_{L_1[a;b]} = \|f\|_{L_1[a;b]}$, где f произвольный представитель класса эквивалентных относительно нормы функций. Требуется проверка, что введеннная функция, определенная на множестве классов эквивалентности, удовлетворяет аксиомам нормы.

Пространство $RL_1\,[a;b]$ определим как нормированное пространство классов эквивалентных функций, абсолютно интегрируемых на интервале $(a;b)$ с нормой

$$\|f\|_{L_1[a;b]} = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Заметим, что нулевым элементом линейного нормированного пространства $RL_1\,[a;b]$ является класс функций, эквивалентных тождественно нулевой функции: $f \sim f_0$, где $f_0(x) \equiv 0$, т.е. $\|f - f_0\|_{L_1[a;b]} = \int_a^b |f(x)|dx = 0$.

При анализе свойств пространства, как правило, можно использовать любого представителя (функцию) из класса эквивлентных по норме функций.

$\circledcirc$ Пространство $RL_2\,[a;b]$ - квадратично интегрируемых функций.

Определение 1.8. Функция f называется квадратично интегрируемой на конечном или бесконечном интервале $(a;b)$, если

1) функция f имеет на $(a;b)$ не более конечного числа особенностей, т.е. существуют числа

$$x_0, \ldots, x_I : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_I = b$$

такие, что для любого $i \in \{1, \ldots, I\}$ и для любого отрезка

$$[\alpha;\beta] \subset (x_{i-1}; x_i)$$

существует интеграл Римана $\int_\alpha^\beta f(x)dx$;

2) интеграл $\int_a^b f^2(x)dx$ сходится, как несобственный интеграл с конечным числом особенностей.

Проверьте, что для функции двух аргументов

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

выполнены все аксиомы скалярного произведения, кроме аксиомы 4. А для функции

$$\|f\|_{L_2[a;b]}=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

выполнены аксиомы 1-3 нормы, но не выполнена аксиома 4, так как интеграл не зависит от изменения функции на множестве нулевой меры.

Аналогично приему, использованному при определении пространства абсолютно интегрируемых функций, будем считать эквивалентными (неразличимыми) квадратично интегрируемые на интервале $(a;b)$ функции $f(x)$ и $g(x)$, для которых

$$\|f-g\|_{L_2[a;b]}=0.$$

Пространство $RL_2\,[a;b]$ определим как евклидово пространство классов эквивалентных функций, квадратично интегрируемых на интервале $(a;b)$ со скалярным произведением $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)d$, где эквивалентные относительно евклидовой нормы $\|\ \|_{L_2[a;b]}$ функции считаются неразличимыми (представляющими единственный элемент нормированного пространства).

При анализе свойств пространства, как правило, можно использовать любого представителя (функцию) из класса эквивлентных по норме функций.

В дальнейшем, мы будем, как правило, использовать элемент класса эквивалентности не указывая это явно, то есть работать с функцией, определяющей некоторый класс эквивалентности. Если потребуется говорить об элементе пространства, как классе эквивалентности, это будет оговорено специально.

Теоремы включения.

Подчеркнем, что пространства непрерывных функций, абсолютно интегрируемых функций и квадратично интегрируемых функций содержат различные наборы элементов.

Имеют место стогие включения[10]:

Теорема 1.3.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Справедливо включение $C\,[a;b] \subset RL_2\,[a;b]$, причем

$$\forall f \in C\,[a;b] \hookrightarrow \|f\|_{L_2[a;b]} \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_{C[a;b]}. \tag{4}$$

2) Справедливо включение $RL_2\,[a;b] \subset RL_1\,[a;b]$, причем

$$\forall f \in RL_2\,[a;b] \hookrightarrow \|f\|_{L_1[a;b]} \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_{L_2[a;b]}. \tag{5}$$

$\triangleright$ 1) Пусть $f \in C\,[a;b]$. Тогда интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b f^2(x)dx$ существуют в собственном смысле, следовательно, функция $f(x)$ квадратично интегрируема на $(a;b)$.

$$\|f\|_{L_2[a;b]} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \leqslant \sqrt{(b-a)\left(\max_{x\in[a;b]}|f(x)|\right)^2} = \sqrt{b-a}\|f\|_{C[a;b]}.$$

2) Пусть $f \in RL_2\,[a;b]$. Тогда функция имеет не более конечного числа особенностей на отрезке $[a;b]$. Функции $g(x) = |f(x)|$ и $h(x) = 1$ принадлежат $RL_2\,[a;b]$. Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского $(g,h) \leqslant \|g\|_{L_2[a;b]}\|h\|_{L_2[a;b]}$. Распишем подробнее:

$$(g,h) = \int_a^b 1\cdot|f(x)|dx = \|f\|_{L_1[a;b]} \leqslant \|h\|_{L_2[a;b]}\|g\|_{L_2[a;b]} = \sqrt{b-a}\|f\|_{L_2[a;b]}.$$

Из полученной оценки, в частности, следует сходимость интеграла $\int_a^b |f(x)|dx$, что влечет $f \in RL_1\,[a;b]$. $\triangleleft$

[10]Заметим, что непрерывную функцию при анализе первого вложения понимаем, как представителя соответствующего класса эквивалентности квадратично интегрируемых функций. Аналогично рассматривается второе вложение.

Из неравенств, доказанных в теореме 1.3, следует, что из равномерной сходимости функциональной последовательности вытекает сходимость этой последовательности в смысле среднего квадратичного, а из сходимости последовательности в смысле среднего квадратичного вытекает ее сходимость в среднем.

Заметим, что для припоминания вложений пространств можно использовать эталонные несобственные интегралы: рассмотрим интеграл, зависящий от параметра $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

При $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$ функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ абсолютно интегрируема, но не квадратично интегрируема, т.е. $f \in RL_1\,[0;1]$, но $f \notin RL_2\,[0;1]$.

При $\alpha \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ абсолютно интегрируема и квадратично интегрируема, т.е. $f \in RL_1\,[0;1] \cap RL_2\,[0;1]$.

Свойство полноты нормированных пространств.

Определение 2.1. Последовательность $\{f_n\}$ элементов нормированного (евклидова) пространства $(L, \| \|)$ называется фундаментальной, если выполнено условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \; \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \|f_n - f_{n+p}\| < \varepsilon. \tag{6}$$

Определение 2.2. Нормированное (евклидово) пространство L называется полным, если в этом пространстве любая фундаментальная последовательность $\{f_n\}$ сходится к некоторому элементу $f \in L$ по норме пространства: $\|f_n - f\| \to 0$ при $n \to +\infty$.

Полное нормированное пространство называется банаховым пространством.

Полное евклидово пространство называется гильбертовым пространством.

Примером полного нормированного пространства служит $\mathbb{R}^n$. Полнота $\mathbb{R}^n$ доказывается критерием Коши.

Рассмотрим вопрос полноты пространств $C\,[a;b]$, $CL_1\,[a;b]$ и $CL_2\,[a;b]$.

Пример 2.1. Доказать, что пространство $C\,[a;b]$ полно.

$\triangleright$ Сходимость по норме $\| \|_{C[a;b]}$ совпадает с равномерной сходимостью. Если последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ фундаментальна в $C\,[a;b]$, то, по критерию Коши равномерной сходимости функциональной последовательности[11], $\exists f: \; f_n \rightrightarrows f$ на $[a;b]$. Функция f непрерывна, как равномерный предел непрерывных функций [12]. Таким образом, любая фундаментальная в $C\,[a;b]$ последовательность сходится к элементу пространства, то есть $C\,[a;b]$ полно.$\triangleleft$

[11]См. комментарий 2.

[12]См. комментарий 3.

Пример 2.2. Доказать, что пространство $CL_1\,[-1;1]$ неполно.

$\triangleright$ Рассмотрим последовательность непрерывных нечетных функций $f_n(x)$, определенных на отрезке $[-1;1]$, заданных формулами на отрезке $[0;1]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 1, \dfrac{1}{n} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Докажем, что последовательность фундаментальна в $CL_1\,[-1;1]$: пусть $m > n$

$$\|f_n - f_m\|_{L_1[a;b]} = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|dx < 2\int_0^{\frac{1}{n}} 1dx = \frac{2}{n} \to 0.$$

Докажем от противного, что не существует непрерывной функции, к которой последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится по норме $\|\ \ \|_{L_1[a;b]}$. Предположим, что существует непрерывная на отрезке $[-1;1]$ функция $f(x)$, такая, что $\|f_n - f\|_{L_1[a;b]} \to 0$ при $n \to \infty$.

Покажем, что для любого $x \in (0;1]$ $f(x) = 1$.

Зафиксируем произвольное $x_0 \in (0;1]$ и выберем $N_{x_0} \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{N_{x_0}} \leqslant \frac{x_0}{2}$, тогда $\forall n \geqslant N_{x_0}$ $\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}; x_0\right] \subset \left[\frac{x_0}{2}; 1\right] \hookrightarrow f_n(x) = 1$.

Покажем, что числовая последовательность $\int_{\frac{x_0}{2}}^{x_0} |f_n(x) - f(x)|dx$ равна 0, начиная с номера N_{x_0}.

Так как при $n \geqslant N_{x_0}$ $\quad \int_{\frac{x_0}{2}}^{x_0} |f_n(x) - f(x)|dx = \int_{\frac{x_0}{2}}^{x_0} |1 - f(x)|dx$, то последовательность стационарна с номера N_{x_0}.

Так как $0 \leqslant \int_{\frac{x_0}{2}}^{x_0} |f_n(x) - f(x)|dx \leqslant \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|dx = \|f_n - f\|_{L_1[a;b]} \to 0$ при $n \to \infty$, то стационарная с некоторого номера последовательность равна 0.

Итак, интеграл от непрерывной, неотрицательной функции $\int_{\frac{x_0}{2}}^{x_0} |1 - f(x)|dx = 0$, значит $\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}; x_0\right] \hookrightarrow f(x) = 1$, в частности, $\forall x_0 \in (0;1] \quad f(x_0) = 1$.

Аналогично доказывается, что для любого $x_0 < 0 \quad f(x_0) = -1$.

Так как $\lim_{x \to +0} f(x) = 1 \neq \lim_{x \to -0} f(x) = -1$, то функция $f(x)$ разрывна. Это противоречит предположению о непрерывности $f(x)$.

Полученное противоречие доказывает, что последовательность $f_n(x)$ сходится к разрывной функции, то есть неполноту пространства $CL_1\,[a;b]$.$\triangleleft$

Отметим без доказательства, что пространство $RL_1\,[a;b]$ и пространство $RL_2\,[a;b]$ неполны.

Пример 2.3. Исследовать пространство $\left(C^1\left[-1;1\right], \|\ \|_{C[-1;1]}\right)$ - непрерывно дифференцируемых функций с равномерной нормой на полноту.

$\triangleright$ Пространство неполно, так как функция $f(x) = |x|$ не является непрерывно-дифференцируемой на отрезке $[-1;1]$, но существует последовательность непрерывно дифференцируемых функций

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

являющаяся фундаментальной в $\left(C^1[-1;1], \|\ \|_{C[-1;1]}\right)$ и сходящаяся к $f(x)$ по равномерной норме.

Соответствующие оценки норм провести самостоятельно.$\triangleleft$

Задача 2.1. Исследовать пространство $\left(C^1\left[a;b\right], \|\ \|_{C^1[a;b]}\right)$ - непрерывно дифференцируемых функций с нормой $\|f\|_{C^1[a;b]} = \|f\|_{C[a;b]} + \|f'\|_{C[a;b]}$ на полноту.

Полные системы в нормированных пространствах.

Приведем два эквивалентных определения полноты системы элементов в нормированном пространстве:

Определение 3.1. Система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ элементов нормированного пространства $(L, \| \ \|)$ называется полной в L, если

$$\forall f \in L \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \{\alpha_k\}_{k=1}^{m} : \left\| f - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi_k \right\| < \varepsilon.$$

То есть, любой элемент пространства L с наперед заданной точностью $\varepsilon > 0$ может быть приближен конечной линейной комбинацией элементов системы.

Эквивалентное определение полной системы в нормированном пространстве опирается на понятие плотного подмножества:

Пусть A и B - подмножества нормированного пространства L. Множество A называется плотным подмножеством B, если:

1) $A \subset B$;

2) $\forall b \in B \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : \|b - a\| < \varepsilon$.

Определение 3.2. Система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ полна в нормированном пространстве $(L, \| \ \|)$, если линейная оболочка системы (множество конечных линейных комбинаций элементов системы) плотна в L.

Обращаем внимание, что:

1. Понятия *полная система* в нормированном пространстве и *полное нормированное пространство* различны!

2. В определении полной системы рассматриваются только *конечные* линейные комбинации элементов *системы*.

Решение задачи исследования полна ли система в нормированном пространстве включает два этапа:

- выбор ответа, который может осуществляться «на уровне идей»;

- доказательство утверждения «система полна» или «система не полна» в нормированном пространстве.

При анализе любой задачи на полноту системы обращаем внимание на норму пространства, в котором исследуется полнота. При выборе ответа на вопрос задачи нередко целесообразно пользоваться геометрическим смыслом рассматриваемой нормы.

Приемы анализа и доказательства будут показаны не только при разборе примеров, но и в доказательствах теорем.

Основными системами, представленными в задачах являются:

◎ тригонометрическая система $\{1; \cos nx; \sin nx\}_{n=1}^{+\infty}$;

◎ система алгебраических одночленов $\{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$,

а также некоторые их подсистемы.

Пусть α_i, β_j, где $i = 0, \dots, n;\ j = 1, \dots, n$, - некоторые действительные числа, причем $\alpha_n \neq 0$ или $\beta_n \neq 0$. Выражение

$$T_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$$

называется тригонометрическим многочленом степени n.

Исследование тригонометрической системы и ее подсистем на полноту в пространствах непрерывных функций по равномерной норме.

Основным инструментом доказательства *полноты тригонометрической системы*

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

и ее подсистем в пространствах непрерывных функций с равномерной нормой являются *суммы Фейера.*

Определение 3.3 Суммами Фейера $\sigma_n(x)$ функции $f(x)$ называются средние арифметические ее сумм Фурье $S_n(x)$[13] :

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_n(x)}{n+1},\ n = 0, 1, 2, \dots.$$

[13]См. комментарий 4.

Ряд Фурье функции $f(x)$ называется сходящимся в смысле средних арифметических, если сходится последовательность сумм Фейера функции f.

Отметим, что суммы Фейера являются 2π-периодическими функциями.

Определение 3.4. $C^*[a;b]$ обозначим линейное пространство функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$ и таких, что $f(a) = f(b)$.

Приведем основные теоремы, любую из которых можно использовать при доказательстве полноты тригонометрической системы или ее подсистем по равномерной норме.

Теорема 3.1. (Теорема Фейера.)

Пусть функция $f \in C^*[-\pi;\pi]$.

Тогда последовательность сумм Фейера функции f сходится к функции f равномерно на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Теорема 3.2. (Первая теорема Вейерштрасса.)

Пусть функция $f \in C^*[-\pi;\pi]$.

Тогда $\forall\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический многочлен $T_n(x)$, равномерно приближающий функцию $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ с точностью ε, то есть

$$\max_{x\in[-\pi;\pi]} |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon.$$

$\triangleright$ Так как суммы Фейера функции f по теореме Фейера равномерно приближают функцию f на отрезке $[-\pi;\pi]$, то в качестве искомого тригонометрического многочлема выберем соответствующую сумму Фейера, являющуюся тригонометрическим многочленом. $\triangleleft$

Теорема 3.3.

Тригонометрическая система полна в пространстве $C^*[-\pi;\pi]$ по равномерной норме $\| \, \|_{C[-\pi;\pi]}$.

$\triangleright$ Так как любой тригонометрический многочлен является конечной линейной комбинацией элементов тригонометрической системы, то доказательство состоит в применении первой теорем Вейерштрасса.$\triangleleft$

Замечание о типичных ошибках.

$\triangleright$ Для доказательства полноты тригонометрической системы в пространстве непрерывных функций *нельзя* использовать последовательность частичных сумм Фурье: последовательность сумм Фурье непрерывной 2π-периодической функции может расходится в некоторых точках, значит, не является в общем случае поточным, а, следовательно, и равномерным приближением своей функции.$\triangleleft$

Для доказательства полноты тригонометрической системы в пространствах $C[a;b]$, таких что $[a;b] \subsetneq [-\pi;\pi]$ используется *прием продолжения* функции до функции из пространства $C^*[-\pi;\pi]$.

Пример 3.1. Исследовать на полноту тригонометрическую систему в $C\,[-2;2]$.

$\triangleright$ Так как тригонометрическая система полна в $C^*\,[-\pi;\pi]$, а также $[-2;2] \subset [-\pi;\pi]$, то продолжим произвольную функцию $f \in C\,[-2;2]$ линейно до непрерывной на $[-\pi;\pi]$ функции f^* так, что $f^*(-\pi) = f^*(\pi) = 0$. Приблизим продолженную f^* как элемент $C^*\,[-\pi;\pi]$.

Так как $\|f^*\|_{C[-\pi;\pi]} \geqslant \|f\|_{C[-2;2]}$, то полнота тригонометрических системы доказана. $\triangleleft$

Приемы продолжения функции используются и в задачах исследования полноты некоторых *подсистем тригонометрической системы.*

Решение задач на проверку полноты подсистем тригонометрических функций опирается на следующие утверждения о свойствах ряда Фурье абсолютно интегрируемой функции, которые рекомендуется доказать самостоятельно (доказательство приведенных утверждений состоит в проверке равенства нулю соответствующих коэффициентов ряда Фурье):

1. Четная функция на отрезке $[-\pi;\pi]$ раскладывается по подсистеме косинусов: $\{\cos nx\}_{n=0}^{+\infty}$;

2. Нечетная функция на отрезке $[-\pi;\pi]$ раскладывается по подсистеме синусов: $\{\sin nx\}_{n=1}^{+\infty}$;

3. 2π-периодическая и удовлетворяющая условию $f(x+\pi) = f(x)$ раскладывается по подсистеме $\{1, \cos 2nx, \sin 2nx\}_{n=1}^{+\infty}$;

4. Четная функция, удовлетворяющая на отрезке $[0;\pi]$ условию $f(\pi - x) = f(x)$

раскладывается по подсистеме $\{\cos 2nx\}_{n=0}^{+\infty}$;

5. Четная функция, удовлетворяющая на отрезке $[0;\pi]$ условию $f(\pi - x) = -f(x)$ раскладывается по подсистеме $\{\cos(2n+1)x\}_{n=0}^{+\infty}$.

Рекомендуется самотоятельно получить условия на абсолютно интегрируемые функции, для получения ряда Фурье по системам:

$\{\sin 2nx\}_{n=1}^{+\infty}$;

$\{\sin(2n-1)x\}_{n=1}^{+\infty}$.

Так как ряд Фурье содержит только конкретную подсистему системы тригонометрических функций, то тем же свойством обладает последовательность частичных сумм ряда Фурье, а следовательно, и *последовательность сумм Фейера* этой функции, которая может быть использована для доказательства полноты системы по равномерной норме:

Пример 3.2. Исследовать на полноту систему $\{\cos nx\}_{n=0}^{+\infty}$ в пространстве $C\,[0;\pi]$.

$\triangleright$ Система полна, так как любую функцию из $C\,[0;\pi]$ можно *продолжить четным образом* до функции из $C^*\,[-\pi;\pi]$.

То есть, для произвольной функции $f \in C[0;\pi]$ определим функцию $f^* \in C^*[-\pi;\pi]$ такую, что $\forall x \in [0;\pi] \hookrightarrow f^*(x) = f(x)$ и $\forall x \in [-\pi;\pi] \hookrightarrow f^*(-x) = f^*(x)$.

В силу полноты тригонометрической системы в пространстве $C^*[-\pi;\pi]$, функцию f^* можно равномерно приблизить соответствующей суммой Фейера. В силу четности функции, ее сумма Фейера включает только косинусы. Полученная сумма Фейера равномерно приближает функцию f на отрезке $[-\pi;\pi]$. $\triangleleft$

Соответствующим продолжением могут решаться задачи на доказательство полноты по другим подсистемам.

Замечание о типичных ошибках.

Прием продолжения, показанный в примерах 3.1 и 3.2 позволяет применять теоремы о полноте системы *непрерывных* функций, поэтому необходимо обратить внимание на продолжение именно до непрерывной функции или функции из $C^*\,[-\pi;\pi]$.

Приведем пример *неполной системы* и *приемы доказательства неполноты по равномерной норме*.

Пример 3.3. Полна ли тригонометрическая система в нормированном пространстве $C\,[-\pi;\pi]$.

$\triangleright$ Неполна, так как непрерывную функцию не удовлетворяющую условию равенства значений на концах $f(-\pi) = f(\pi)$ нельзя приблизить по равномерной норме с произвольной точностью тригонометрическими многочленами, которые этому свойству удовлетворяют.

Приведем два варианта (приема) доказательства неполноты.

Доказательство 1 (проверим отрицание определения).

Так как любая конечная линейная комбинация элементов тригонометрической системы является тригонометрическим многочленом $T_n(x)$, то неполнота тригонометрической системы в $C\,[-\pi;\pi]$ означает, что

$$\exists \varepsilon > 0 \exists f \in C\,[-\pi;\pi]: \quad \forall T_n \hookrightarrow \|f - T_n\|_{C[a;b]} \geqslant \varepsilon.$$

Выберем $f(x) = x$ и $\varepsilon = \pi$.

$$\|f - T_n\|_{C[a;b]} = \max_{x \in [-\pi;\pi]} |f(x) - T_n(x)| \geqslant$$

т.к. максимум функции больше или равен ее значению в любых точках, то

$$\geqslant \max\{|f(-\pi) - T_n(-\pi)|,\ |f(\pi) - T_n(\pi)|\} \geq$$

т.к. максимум двух чисел больше или равен их среднего арифметического, то

$$\geqslant \frac{1}{2}\left(|f(-\pi) - T_n(-\pi)| + |f(\pi) - T_n(\pi)|\right) =$$

в силу 2π-периодичности тригонометрического мночлена и далее по неравенству треугольника получим

$$= \frac{1}{2}\left(|f(-\pi) - T_n(\pi)| + |f(\pi) - T_n(\pi)|\right) \geqslant \frac{1}{2}|f(-\pi) - f(\pi)| = \pi = \varepsilon.$$

Неполнота доказана.

Доказательство 2. (от противного)

Предположим, что система полна. Тогда для функции $f(x) = x$, принимающей на концах отрезка разные значения, предположим что существует тригонометрический многочлен, равномерно приближающий функцию $f(x)$ с точностью равной половине расстояния между значениями функции на концах отрезка: $\varepsilon = \frac{f(\pi)-f(\pi)}{2} = \pi$. Тогда, в частности,

$|f(\pi) - T_n(\pi)| < \varepsilon = \pi$,

$|f(-\pi) - T_n(-\pi)| < \varepsilon = \pi$.

Получим,

$$|f(-\pi) - f(\pi)| \leqslant |f(\pi) - T_n(\pi)| + |f(-\pi) - T_n(\pi)| =$$
$$= |f(\pi) - T_n(\pi)| + |f(-\pi) - T_n(\pi)| < 2\pi.$$

Полученное противоречие показывает, что система неполна. ◁

Аналогично можно доказать неполноту тригонометрической системы в пространствах $C_{[a;b]}$, где $[-\pi;\pi] \subset [a;b]$.

Рассмотри несколько примеров, акцентируя внимание на первой части решения: выборе ответа.

Пример 3.4. Исследовать на полноту систему $\{\cos 2nx\}_{n=0}^{+\infty}$ в $C\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

▷ Рассмотрим систему $\{\cos 2nx\}_{n=0}^{+\infty}$. Для того, чтобы суммы Фейера включали только слагаемые вида $\cos 2nx$, функция должна быть четной и удовлетворять условию симметричности относительно оси $x = \frac{\pi}{2}$ на отрезке $[0;\pi]$. Такое продолжение возможно для любой функции из $C\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Значит доказываем полноту системы (доказательство провести самостоятельно).◁

Пример 3.5. Исследовать на полноту систему $\{\sin 2nx\}_{n=1}^{+\infty}$ в $C\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$\triangleright$ Приведем два рассуждения:

Рассуждение 1.

Рассмотрим систему $\{\sin 2nx\}_{n=1}^{+\infty}$. Для того, чтобы суммы Фейера включали только слагаемые вида $\sin 2nx$, функция должна быть нечетной и удовлетворять условию центральной сисмметрии относительно точки $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Необходимым условием указанного свойства является $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Так как этому свойству удовлетворяют не все функции из $C\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Доказываем неполноту системы. Выбираем $f(x) = 1$ на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и используем прием из примера 3.3 (доказательство завершить самостоятельно).

Рассуждение 2.

В данной задаче можно использовать более простое рассуждение, включающее только равенство нулю тригонометрических многочленов по синусам четного аргумента в точке $\frac{\pi}{2}$ (см. пример 3.7)(доказательство провести самостоятельно). $\triangleleft$

Исследование на полноту системы алгебраических одночленов по равномерной норме.

Основными инструментами доказательства полноты системы одночленов по равномерной норме являются:

- вторая теорема Вейерштрасса (см. ниже);

- для доказательства полноты в некоторых задачах возможно использование частичных сумм ряда Тейлора (Маклорена) на отрезке внутри круга сходимости.

Пример 3.6. Пусть функция $f(x)$ представима рядом Маклорена с радиусом сходимости R. Доказать, что на любом отрезке $[a;b] \subset (-R;R)$, функцию f можно равномерно приблизить алгебраическими многочленами с наперед заданной точностью ε.

$\triangleright$ Так как ряд Маклорена функции f сходится равномерно на любом отрезке внутри интервала сходимости, то функцию можно равномерно приблизить с наперед заданной точностью частичными суммами ряда Маклорена. $\triangleleft$

Применение представления функции формулой Тейлора, как метода обоснования полноты системы алгебраических одночленов по равномерной норме, ограничено большими требованиями к рассматриваемым функциям:

- ряд Тейлора можно записать только для бесконечно дифференцируемой функции;

- существуют бесконечно дифференцируемые функции, для которых ряд Тейлора (Маклорена) равномерно сходится не к своей функции внутри интервала сходимости, например, $f(x) = \exp\{-\frac{1}{x^2}\}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$;

- отрезок, на котором рассматривается функция, должен содержаться внутри интервала сходимости.

Поэтому приближение системой $\{x^k\}_{k=0}^{+\infty}$ и ее подсистемами осуществляется, как правило, не с помощью теории рядов Тейлора, а с использованием Второй теоремы Вейерштрасса.

Теорема 3.4. (Вторая теорема Вейерштрасса.)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Тогда $\forall\varepsilon > 0$ найдется многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, равномерно приближающий функцию $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ с точностью ε, то есть

$$\max_{x\in[a;b]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

$\triangleright$ Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

Чтобы применить первую теорему Вейерштрасса нам нужно получить функцию $F(t)$ непрерывную на отрезке $[-\pi;\pi]$, такую что $F(-\pi) = F(\pi)$. Для построения функции $F(x)$ выполним замену переменной $x = a + \frac{b-a}{\pi}t; 0 \geqslant t \geqslant \pi,\ a \geqslant x \geqslant b$. Функцию $F(t) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi}t\right)$ продолжим четным образом на отрезок $[-\pi;0]$.

Функция $F(t)$ удовлетворяет условиям первой теоремы Вейерштрасса, тогда найдется тригонометрический многочлен $T_m(t)$, равномерно приближающий функцию $F(t)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ с точностью $\frac{\varepsilon}{2}$:

$\max_{t\in[-\pi;\pi]} |F(t) - T_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Тригонометрический многочлен $T_m(t)$ является конечной линейной комбинацией тригонометрических функций вида $\cos kt, \sin kt$, представимых рядом Маклорена с радиусом сходимости $R = +\infty$. Следовательно, функцию $T_m(t)$ можно равномерно приблизить на отрезке $[-\pi;\pi]$ частичными суммами ее ряда Маклорена $Q_n(t)$ с точностью $\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда,

$$\max_{t\in[-\pi;\pi]} |F(t) - Q_n(t)| \leqslant \max_{t\in[-\pi;\pi]} |F(t) - T_m(t)| + \max_{t\in[-\pi;\pi]} |T_m(t) - Q_n(t)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Определив многочлен $P_n(x) = Q_n\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)$ с помощью обратной замены переменной, завершим доказательство теоремы. $\triangleleft$

Теорема 3.5.

Система функций $\{x^k\}_{k=0}^{+\infty}$ полна в нормированном пространстве $C\,[a;b]$.

Доказательство осуществляется применением второй теоремы Вейерштрасса.

Приведем пример неполной системы и прием доказательства.

Пример 3.7. Исследовать на полноту систему $\{x^n\}_{n=1}^{+\infty}$ в пространстве $C\,[-1;1]$.

$\triangleright$ Основным отличием от предыдущей теоремы является то, что рассматриваемая система не включает константы.

Заметим, что все элементы системы равны нулю при $x = 0$. Покажем, что выполнено отрицание определения полной системы, а именно $\exists f(x) \equiv 1$ — непрерывная на отрезке $[-1;1]$ и $\exists \varepsilon = \frac{1}{2}$ такие, что для любой конечной линейной комбинации элементов системы $l_m(x)$:

$$\|f - l_m\|_{C[-1;1]} = \max_{x\in[-1;1]} |f(x) - l_m(x)| \geqslant |f(0) - l_m(0)| = 1 - 0 = 1 \geqslant \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

$\triangleleft$

Исследование полноты систем
в пространствах с интегральными нормами $\|\ \|_{L_1[a;b]}$ и $\|\ \|_{L_2[a;b]}$.

Лемма 3.1. Тригонометрическая система полна в $C^*\,[-\pi;\pi]$ по норме пространства $RL_2\,[-\pi;\pi]$.

$\triangleright$ Тригонометрическая система полна в $C^*\,[-\pi;\pi]$ по равномерной норме. В силу неравенства для норм $\|f\|_{L_2[a;b]} \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_{C[-\pi;\pi]}$ система полна в $C^*\,[-\pi;\pi]$ по норме $\|\ \|_{L_2[a;b]}$.$\triangleleft$

Следующие две леммы приведем без доказательства.

Лемма 3.2. Множество кусочно-непрерывных на $[a;b]$ функций является плотным в пространстве $RL_2\,[a;b]$ относительно нормы $RL_2\,[a;b]$.

Лемма 3.3. Множество $C^*\,[a;b]$ является плотным подмножеством множества кусочно-непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций относительно нормы $RL_2\,[a;b]$.

Используя две приведенные леммы покажем *прием последовательного приближения* на примере доказательства теоремы 3.6.

Теорема 3.6.

Тригонометрическая система полна в нормированном пространстве $RL_2\,[-\pi;\pi]$.

$\triangleright$ Зафиксируем произвольные $f \in RL_2\,[-\pi;\pi]$ и $\varepsilon > 0$.

По лемме 3.2 квадратично интегрируемую функцию можно приблизить по норме $\|\ \|_{L_2[a;b]}$ кусочно-непрерывной функций f_ε: $\|f - f_\varepsilon\|_{L_2[a;b]} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Кусочно-непрерывную, в свою очередь, по лемме 3.3 можно приблизить по норме $\|\ \|_{L_2[a;b]}$ функцией g_ε из $C^*\,[-\pi;\pi]$: $\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L_2[a;b]} < \frac{\varepsilon}{3}$.

По теореме 3.3 тригонометрическая система полна в $C^*\,[-\pi;\pi]$ по равномерной норме, то есть для функции g_ε существует тригонометрический многочлен ее приближающий по норме $\|\ \|_{C[-\pi;\pi]}$. Тогда, в силу неравенства для норм: $\|g_\varepsilon - T_n\|_{L_2[a;b]} \leqslant \sqrt{2\pi}\|g_\varepsilon - T_n\|_{C[-\pi;\pi]} < \frac{\varepsilon}{3}$. Итак,

$$\|f - T_n\|_{L_2[a;b]} \leqslant \|f - f_\varepsilon\|_{L_2[a;b]} + \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L_2[a;b]} + \|g_\varepsilon - T_n\|_{L_2[a;b]} \leqslant \varepsilon.$$

$\triangleleft$

Приведем без доказательства теорему о полноте алгебраической системы одночленов в $RL_2[-\pi;\pi]$.

Теорема 3.7.

Алгебраическая система $\{x^k\}_{k=0}^{+\infty}$ полна в нормированном пространстве $RL_2[-\pi;\pi]$.

В параграфе показаны основные приемы исследования и доказательства полноты (неполноты) систем. Все приемы требуют обоснования возможности их применения.

В некоторых задачах целесообрано использование теорем, отвечающих условиям конкретной задачи. Например, в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[-\pi;\pi]$ для исследования на полноту тригонометрической системы по равномерной норме можно пользоваться теоремой равномерной сходимости ряда Фурье. Выше был рассмотрен частный прием использования представления функции рядом Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций (см. пример 3.6). И т.д.

Ортогональные системы и ряды Фурье по ним.

Основные теоретические сведения.

Пусть H - произвольное евклидово пространство со скалярным произведением (,). Если не оговорено противное,то рассматривается евклидова норма:
$\forall x \in H \quad \|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Векторы f и g евклидова пространства называются ортогональными, если $(f,g) = 0$.

Теорема 4.1.

Скалярное произведение $(x;y)$ в евклидовом пространстве является непрерывной функций двух переменных x и y относительно евклидовой нормы.

$\triangleright$ Пусть $\|x - x_0\| < \delta < 1, \ \|y - y_0\| < \delta < 1$. Тогда, используя неравенства треугольника и Коши-Буняковского, получаем

$$|(x,y) - (x_0,y_0)| \leqslant |(x - x_0, y)| + |(x_0, y - y_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \|x - x_0\| \cdot \|y\| + \|x_0\| \cdot \|y - y_0\| \leqslant$$

$$\leqslant \delta\left(\|y_0\| + \delta\right) + \|x_0\|\delta \leqslant \delta\left(\|x_0\| + \|y_0\| + 1\right).$$

$\triangleleft$

Из теоремы непрерывности следуют, например, возможность предельного перехода под знаком скалярного произведения и почленного скалярного умножения ряда, сходящегося относительно евклидовой нормы:

1. Пусть при $k \to +\infty \ \ x_k \to x \ \Rightarrow \ (x_k, a) \to (x, a)$;
2. если $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = x \ \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty}(x_k, a) = (x, a)$.

Определение 4.1. Последовательность ненулевых элементов $\{e_j\}_{j=1}^{+\infty}$ пространства H называется ортогональной системой,

$$\forall j,k \in \mathbb{N}, \ j \neq k \hookrightarrow (e_j, e_k) = 0.$$

Если при этом $\forall j \in \mathbb{N} \ \ (e_j, e_j) = 1$, то система называется ортонормированной.

Определение 4.2. Пусть система $\{e_j\}_{j=1}^{+\infty}$ пространства H ортогональна. Для произвольного $f \in H$:

числа $\alpha_k = \dfrac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)}$ называются коэффициентами Фурье,

ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k$ рядом Фурье элемента f.

Теорема 4.2. (Минимальное свойство коэффициентов Фурье.)

Пусть в евклидовом пространстве H задана ортогональная система $\{e_j\}_{j=1}^{+\infty}$ и элемент $f \in H$. Пусть задано число $n \in \mathbb{N}$. Тогда среди всех линейных комбинаций элементов $e_1, \ldots, e_n$ сумма Фурье $s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ является наилучшим приближением элемента f в смысле евклидовой нормы пространства H, т.е.

$$\min_{\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\| = \|f - s_n\|.$$

Замечание. (Геометрическая интерпретация минимальнного свойства коэффициентов Фурье.) s_n является ортогональной проекцией элемента f на подпространство $L(e_1, \ldots, e_n)$, являющееся линейной оболочкой векторов $e_1, \ldots, e_n$. Теорема 4.2 утверждает, что ортогональная проекция s_n является наилучшим приближением элемента f среди всех элементов $L(e_1, \ldots, e_n)$.

Определение 4.3. Говорят, что элемент f нормированного пространства H раскладывается по системе $\{e_k\}_{k=1}^{+\infty}$ элементов пространства H, если существует числовая последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty}$ такая, что ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k$ сходится к элементу f по евклидовой норме пространства H:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| \to 0, \ n \to +\infty.$$

В этом случае будем писать: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k = f$.

Полезным инструментом является теорема единственности разложения элемента евклидова пространства по ортогональной системе.

Теорема 4.3.

Пусть элемент $f \in H$ раскладывается по ортогональной в евклидовом пространстве H системе $\{e_k\}_{k=1}^{+\infty}$: $\quad f = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k$. Тогда коэффициены α_k являются коэффициентами Фурье f: $\alpha_k = \frac{(f,e_k)}{(e_k,e_k)}$.

В следующей теореме рассмотрим аналог теоремы Пифагора:

Теорема 4.4.

Для любой ортогональной системы $\{e_k\}_{k=1}^{+\infty}$ евклидова пространства H и для любого элемента $f \in H$ справедливо равенство

$$\|f\|^2 = \|f - s_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha^2 \|e_k\|^2.$$

Указанное в теореме 4.4 равенство можно рассматривать как теорему Пифагора в прямоугольном треугольнике с катетами s_n и $f - s_n$ и гипотенузой f.

Теорема 4.5.

Для любой ортогональной системы $\{e_k\}_{k=1}^{+\infty}$ евклидова пространства H и для любого элемента $f \in H$ справедливо неравенство Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Теорема 4.6.

Для ортогональной системы $\{e_k\}_{k=1}^{+\infty}$ в евклидовом пространстве H следующие условия эквивалентны:

1. система $\{e_k\}_{k=1}^{+\infty}$ полна в пространстве H;

2. для любого элемента $f \in H$ ряд Фурье этого элемента по системе $\{e_k\}_{k=1}^{+\infty}$ сходится к элементу f в смысле евклидовой нормы пространства H;

3. выполнено равенство Парсеваля: $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2 = \|f\|^2$.

В частности равенство Парсеваля для тригонометрической системы в пространстве $RL_2\left[-\pi;\pi\right]$ имеет вид:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right),$$

где $a_0, a_1, b_1, \ldots$ - коэффициенты Фурье функции f по тригонометрической системе.

Равенство Парсеваля позволяет получить условия сходимости по евклидовой норме пространства рядов Фурье по ортогональным системам. Приведем теорему для тригонометрических рядов Фурье.

Теорема 4.7. (Достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье по тригонометрической системе.)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi;\pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$. Пусть производная $f'(x)$ кусочно-непрерывна на $[-\pi;\pi]$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно.

$\triangleright$ Пусть $a_k,\ b_k$ коэффициенты Фурье функции $f(x)$, а $a'_k,\ b'_k$ - коэффициенты Фурье функции $f'(x)$ по тригонометрической системе. Из теоремы о почленном дифференцировании ряда Фурье[14], следует, что $|a'_k| = k|b_k|,\ |b'_k| = k|a_k|$. Функция $f'(x) \in RL_2\left[-\pi;\pi\right]$, следовательно, по теореме 4.6 для нее выполнено равенство Парсеваля, то есть сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left((a'_k)^2 + (b'_k)^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(a_k^2 + b_k^2\right)$. Применяя неравенство $xy \leqslant \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ для $x = k|a_k|,\ y = \frac{1}{k}$ получим $|a_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(k^2 a_k^2 + \frac{1}{k^2}\right)$. Аналогично можно получить оценку $|b_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(k^2 b_k^2 + \frac{1}{k^2}\right)$.

Итак, $|a_k| + |b_k| \leqslant \frac{1}{2}k^2\left(a_k^2 + b_k^2\right) + \frac{1}{k^2}$.

Из полученной оценки, в силу сходимости рядов $\sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(a_k^2 + b_k^2\right)$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ по признаку сравнения следует сходимость числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k| + |b_k|\right)$. Откуда по признаку Вейерштрасса следует равномерная сходимость ряда Фурье на $\mathbb{R}$. $\triangleleft$

[14] См. комментарий 5.

Примеры ортогональных систем.

Пример 4.1. Тригонометрическая система

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

ортогональна относительно скалярного произведения $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

Доказательство осуществляется вычислением соответствующих скалярных произведений.

Пример 4.2. Последовательность комплекснозначных функций $\{e^{itn}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ ортогональна относительно скалярного произведения $(f,g) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.

Пример 4.3. Система многочленов Лежандра $\{L_n(x))_{n=0}^{+\infty}$, где $L_0(x) = 1,\ L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\left(x^2-1\right)^2}{dx^n},\ n \in \mathbb{N}$ ортогональна относительно скалярного произведения $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

Доказательство ортогональности полиномов Лежандра L_n любому многочлену Q_m степени $m < n$ осуществляется m кратным интегрированием по частям. Необходимо учесть, что $(x^2-1)^{(k)}$ при $0 \leqslant k \leqslant n-1$ обращается в ноль в точках ± 1.

Аналогично, интегрированием по частям можно вычислить , что $\|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$.

Применение основных теоретических сведений в решении задач.

Лемма 4.1 Любой алгебраический многочлен можно представить в виде линейной комбинации многочленов Лежандра.

$\triangleright$ Обозначим через E_n линейное пространство алгебраических многочленов степени не выше $n-1$. Так как любой многочлен степени не выше $n-1$ является линейной комбинацией n функций $1, x, \ldots, x^{n-1}$, то размерность пространства не превосходит n.

Так как многочлены Лежандра составляют ортогональную систему на отрезке $[-1;1]$, то любой их конечный набор линейно независим. Так как пространство E_n содержит n линейно независимых элементов $L_0(x), \ldots, L_{n-1}(x)$, то размерность пространства E_n равна n, а система многочленов Лежандра $L_0(x), \ldots, L_{n-1}(x)$

является базисом конечномерного линейного пространства E_n. Поэтому любой многочлен степени $n-1$ представим как линейная комбинация многочленов $L_0(x), \dots, L_{n-1}(x)$. $\triangleleft$

Теорема 4.8.

Система многочленов Лежандра полна в пространствах $C\,[a;b]$ и $RL_2\,[a;b]$. Ряд Фурье любой функции $f \in RL_2\,[-1;1]$ по системе многочленов Лежандра сходится к функции f в смысле среднего квадратичного.

$\triangleright$ Так как система $\{x^k\}_{k=0}^{+\infty}$ полна в $C\,[a;b]$ и любой алгебраический многочлен представим линейной комбинацией многочленов Лежандра, то система многочленов Лежандра полна в $C\,[a;b]$.

Аналогично, по теореме 3.7 о полноте системы алгебраических многочленов $\{x^k\}_{k=0}^{+\infty}$ в пространстве $RL_2\,[a;b]$ и лемме 4.1, доказывается полнота многочленов Лежандра в пространстве $RL_2\,[a;b]$.

Так как система многочленов Лежандра ортогональна и полна в пространстве $RL_2\,[a;b]$, то по теореме 4.6 получаем последнее утверждение: ряд Фурье любой функции $f \in RL_2\,[-1;1]$ по системе многочленов Лежандра сходится к функции f в смысле среднего квадратичного. $\triangleleft$

Пример 4.4. Доказать, что если две непрерывные функции имеют одинаковые коэффициенты Фурье по тригонометрической системе на отрезке $[-\pi;\pi]$, то эти функции тождественно равны на $[-\pi;\pi]$.

$\triangleright$ Так как функции непрерывные, рассмотрим их как элементы $CL_2\,[-\pi;\pi]$.

Введем обозначения: рассматриваемые функции обозначим f и g, тригонометрическую систему для краткости - $\{e_j\}_{j=1}^{+\infty}$, одинаковые коэффициенты Фурье функций f и g: $\alpha_k = (f, e_k) = (g, e_k)$. Напомним, что в силу ортонормированности тригонометрической системы в $CL_2\,[-\pi;\pi]$, при любом $k \quad (e_k, e_k) = 1$.

Найдем коэффициенты Фурье функции $f-g$:
в силу линейности скалярного произведения $(f-g, e_k) = (f, e_k) - (g, e_k) = 0$.

Полнота тригонометрической системы в $RL_2\,[-\pi;\pi]$ (теорема 3.6), а следовательно, и в его подпространстве $CL_2\,[-\pi;\pi]$, позволяет применить равенство

Парсеваля (теорема 4.6). Так как коэффициенты Фурье функции $f-g$ равны нулю, то равенство Парсеваля примет вид: $\|f-g\|_{L_2[a;b]}=0$. Из аксиомы 4 нормы следует совпадение функций на отрезке $[\pi;\pi]$, а, в силу периодичности, на $\mathbb{R}$.$\triangleleft$

Пример 4.5. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi;\pi]$ и имеет производную, квадрат которой интегрируем на этом отрезке. Доказать, что если $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,dx. \tag{7}$$

$\triangleright$ Заметим, что, $a_0=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0$. Значит разложение в ряд Фурье имеет вид $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx+b_k\sin kx$.

По теореме о почленном дифференцировании ряда Фурье[15] $f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} -ka_k\sin kx+kb_k\cos kx$. Для любого $k\in\mathbb{N}$ выполены неравенства $a_k^2\leqslant k^2a_k^2$ и $b_k^2\leqslant k^2b_k^2$.

Так как функции f и f' квадратично интегрируемы, то из равенств Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2+b_k^2$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}k^2a_k^2+k^2b_k^2$$

и указанных неравенств следует неравенство (7).$\triangleleft$

Представления функций рядом Фурье по триногометрической системе или ее подсистеме могут использоваться для вычисления суммы числового ряда с применением равенства Парсеваля.

Пример 4.6. Используя разложение функции $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ при $x\in[0;2\pi]$ в ряд Фурье, найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

$\triangleright$ Продолжим функцию f до функции $\widehat{f}$ периодической с периодом 2π. Заметим, что $\widehat{f}\in CL_2[-\pi;\pi]$. Поэтому для ряда Фурье по полной системе системе выполнено равенство Парсеваля. $\widehat{f}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ (коэффициенты Фурье вычислить самостоятельно). Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widehat{f}^2dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2dx=\frac{\pi^2}{6}.$$

[15]См. комментарий 5.

$\triangleleft$

Дополнение к конспекту.

Эквивалентность по норме. На примере.

Рассмотрим функцию

$$\|\ \|^{\sim}_{(n-1)} : \mathbb{R}^n \to [0; +\infty)\,,$$

определенную равенством

$$\|x\|^{\sim}_{(n-1)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}.$$

Для этой функции выполнены аксиомы 1-3 нормы, но не выполнена аксиома 4: для любого элемента $x \in \mathbb{R}^n$ вида $x = (0, \ldots, 0, p)$

$$\|x\|^{\sim}_{(n-1)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} 0^2} = 0.$$

Будем говорить, что элементы $x, y \in \mathbb{R}^n$ *эквивалентны по норме* $\|\ \|^{\sim}_{(n-1)}$, если $\|x - y\|^{\sim}_{(n-1)} = 0$.

Нетрудно доказать, что все элементы пространства $\mathbb{R}^n$ распадаются на непересекающиеся классы эквивалентности:

в данном случае в один класс эквивалентности входят все вектора пространства $\mathbb{R}^n$ с одинаковыми координатами $x_k,\ k = 1, \ldots, n-1$.

Для классов эквивалентности введем структуру линейного пространства, т.е. операции сложения и умножения на число:

Умножение класса эквивалентности на число: выбираем любого представителя, умножаем его на число (по координатно). Полученный элемент принадлежит конкретному классу эквивалентности. Так как у всех представителей одного класса эквивалентности совпадают первые $n-1$ координаты, то полученные в результате умножения на фиксированное число, элементы, очевидно, также принадлежат одному классу эквивалентности, который и называется произведением на число.

Сложение классов эквивалентности определяется аналогично. Проверка выполнения аксиом предоставляется читателю.

В полученном линейном пространстве классов эквивалентности функция $\|\ \|^{\sim}_{(n-1)}$ удовлетворяет всем аксиомам нормы, то есть является нормой.

Еще одним хорошо известным примером нормированного пространства, построенного с помощью отношения эквивалентности, является пространство свободных геометрических векторов с нормой, равной длине вектора.

В данном случае, мы отождествляем (определяем, как класс эквивалентности) множество «равных» векторов, то есть сонаправленных и равных по длинне.

Комментарии.

Комментарий 1. Определение несобственного интеграла с конечным числом особых точек.

Определение. Точка $c \in \mathbb{R}$ называется *особой точкой* несобсовенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$, если $a \leqslant c \leqslant b$ и функция f неограничена в любой окрестности точки c. Для несобственных интегралов вида $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ символы $\pm\infty$ всегда считаются особыми точками.

Определение. Пусть на конечном или бесконечном промежутке $(a;b)$ задана функция $f(x)$, за исключением точек $\{x_i\}_{i=1}^I$: $\quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_I = b$. Пусть функция f интегрируема в собственном смысле (интегрируемая по Риману)на любом отрезке $[\alpha;\beta] \subset (a;b)$, не содержащем точек x_i. Выберем произвольным образом точки $\xi_i \in (x_{i-1};x_i)$, $i = 1\ldots, I$.

Будем говорить, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, если все несобственные интегралы с одной особенностью $\int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx$ и $\int_{\xi_i}^{x_i} f(x)dx$ сходятся.

В противном случае будем говорить, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится.

Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то его значение определим как сумму несобственных интегралов с одной особоенностью:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{I} \left(\int_{x_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x)dx \right).$$

Из следующей леммы следует, что сходимость и значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$ не зависит от выбора точек ξ_i:

Лемма (Принцип локализации.) Пусть заданы $a, a_1 \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $a < a_1 < b$. Пусть на промежутке $[a;b)$ определена функция $f(x)$, интегрируемая в собственном смысле на любом отрезке $[a;a'] \subset [a;b)$. Тогда несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_{a_1}^b f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. И, если сходятся, то справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^b f(x)dx$$

.

Комментарий 2.

Теорема (Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.)

Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на множестве E тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши равномерной сходимости последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}: \ \forall n \geqslant N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in E \hookrightarrow |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Комментарий 3. Теорема (О непрерывности предельной функции равномерно сходящейся последовательности.)

Если последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ непрерывных на множестве E функций сходится к функции $f(x)$ равномерно на множестве E, то функция $f(x)$ непрерывна на множестве E.

Комментарий 4.

Рядом Фурье абсолютно интегрируемой 2π-периодической функции $f(x)$ называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Тогда суммами Фурье называются суммы:

$$S_0(x) = \frac{a_0}{2};$$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx, n \in \mathbb{N}.$$

Комментарий 5.

Теорема (О почленном дифференцировании ряда Фурье.)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна, а ее производная $f'(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[-\pi;\pi]$ и выполняется равенство $f(-\pi)=f(\pi)$.

Тогда ряд Фурье функции $f'(x)$ получается формальным почленным дифференцированием ряда Фурье функции $f(x)$.

Рекомендуемая литература.

1. Бесов. О.В. Лекции по математическому анализу. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 480с. — ISBN 978-5-9221-1506-3.

2. Иванов Г.Е. Лекции по математическому анализу: в 2 ч.: учебное пособие/ Г.Е. Иванов. — 3-е изд., испр. и доп. — М.:МФТИ, 2011. — ISBN 978-5-7417-0382-3.

3. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.