Порядок убывания коэффициентов Фурье и остатка ряда Фурье.

Основные теоретические сведения.

Функция $f(x)$ называется абсолютно интегрируемой на интервале $(a;b)$, если она имеет не более конечного числа особенностей на интервале $(a;b)$ и несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно.

Напомним определение коэффициентов Фурье, ряда Фурье и остатка ряда Фурье по тригонометрической системе.

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на интервале $(-\pi;\pi)$.

Ряд Фурье по тригонометрической системе

$$\left\{\frac{1}{2}, \cos kx, \sin kx\right\}_{k=1}^{+\infty}$$

имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

где коэффициенты Фурье $\{a_0, a_k, b_k\}_{k=1}^{+\infty}$ заданы формулами:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Остаток ряда Фурье имеет вид:

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right).$$

Определение 1. Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке $[a; b]$, если существует разбиение отрезка $[a; b]$

$$\{x_i\}_{i=0}^{I}: \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_I = b,$$

такое, что в любой точке отрезка $[a; b]$, кроме точек x_i, функция f определена и непрерывна, а в точках x_i существуют конечные односторонние пределы

$$f(x_i + 0),\ i = 0, \ldots, I - 1$$

и

$$f(x_i - 0),\ i = 1, \ldots, I.$$

В точках x_i функция может быть не определена.

Если функция f и ее производная f' кусочно-непрерывны на отрезке $[a; b]$, то в точках разрыва функции f производная не существует, но существуют односторонние производные, равные односторонним пределам производной.

Заметим, что кусочно-непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция ограниченна на нем, так как существует конечное разбиение отрезка, на каждом подотрезке которого функция может быть продолжена до непрерывной в силу существования односторонних пределов. Следовательно, функция ограничена на каждом подотрезке разбиения, а значит и на $[a; b]$.

Лемма 1. Пусть функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ кусочно- непрерывны на отрезке $[-\pi;\pi]$. Тогда для коэффициентов Фурье функции f справедливы оценки:

$$a_k = O\left(\frac{1}{k}\right),\ b_k = O\left(\frac{1}{k}\right),$$

т.е.

$$\exists C \in \mathbb{R}:\ \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow |a_k| \leqslant \frac{C}{k},\ |b_k| \leqslant \frac{C}{k}.$$

$\triangleright$ Поскольку из кусочной-непрерывности функций f и f' следует их ограниченность, то существуют числа $C_0,\ C_1 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\forall x \in [-\pi;\pi] \hookrightarrow |f(x)| \leqslant C_0, \quad |f'(x)| \leqslant C_1.$$

Пусть $x_0, \dots, x_I \quad (-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_I = \pi)$ — точки разрывов функции f. Тогда

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = -\frac{1}{\pi k}\sum_{i=1}^{I}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) d\cos kx =$$
$$= -\frac{1}{\pi k}\sum_{i=1}^{I}\left(f(x)\cos kx\big|_{x=x_{i-1}+0}^{x=x_i-0} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)\cos kx dx\right).$$

Оценим сумму внеинтегральных членов. Для этого воспользуемся оценкой $|f(x)| \leqslant C_0$ и перегруппируем сумму с учетом непрерывности функции $\cos kx$:

$$\left|\sum_{i=1}^{I} f(x)\cos kx\big|_{x=x_{i-1}+0}^{x=x_i-0}\right| \leqslant C_0\left|\sum_{i=1}^{I}\cos kx\big|_{x=x_{i-1}}^{x=x_i}\right| = C_0|\cos kx_I - \cos kx_0| \leqslant 2C_0.$$

Оценим сумму интегральных членов, для этого воспользуемся оценками $|f'(x)| \leqslant C_1$ и $|\cos kx| \leqslant 1$:

$$\left|\sum_{i=1}^{I}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)\cos kx dx\right| \leqslant C_1\left|\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx\right| \leqslant C_1\int_{-\pi}^{\pi} dx \leqslant 2\pi C_1.$$

В итоге, имеем оценку $|b_k| \leqslant \frac{2C_0 + 2\pi C_1}{\pi k}$, то есть $b_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$.

Оценка $a_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$ доказывается аналогично.$\triangleleft$

Теорема 1. (О порядке убывания коэффициентов Фурье и остатка ряда Фурье.)

Пусть функция $f(x)$ и ее производные до $q-1$ порядка включительно непрерывны на отрезке $[-\pi;\pi]$ и удовлетворяют условиям $f^{(p)}(-\pi)=f^{(p)}(\pi)$ при $p=0,1,\dots,q-1$. Пусть производные функции f порядка q и $q+1$ кусочно-непрерывны на $[-\pi;\pi]$. Тогда,

1) справедлива оценка скорости убывания коэффициентов Фурье функции f:

$$|a_k|+|b_k|=O\left(\frac{1}{k^{q+1}}\right); \tag{1}$$

2) справедлива оценка скорости убывания остатка ряда Фурье $r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx$:

$$\sup_{x\in[-\pi;\pi]}|r_n(x)|=O\left(\frac{1}{k^q}\right).$$

3) Если функция $f^{(q)}(x)$ имеет неустранимый разрыв в некоторой точке $x_0\in[-\pi;\pi]$ $\left(f^{(q)}(x_0-0)\neq f^{(q)}(x_0+0)\right)$, то оценка (1) неулучшаема в том смысле, что

$$\forall\varepsilon>0\hookrightarrow |a_k|+|b_k|\neq O\left(\frac{1}{k^{q+1+\varepsilon}}\right).$$

$\triangleright$ Доказательство приведем только для пункта 1.

1) Обозначим через $a_k^{(p)}$, $b_k^{(p)}$ коэффициенты Фурье функции $f^{(p)}(x)$.

Применим теорему почленном дифференцировании ряда Фурье:

Пусть функция $f(x)$ непрерывна, а ее производная $f'(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[-\pi;\pi]$ и выполняется равенство $f(-\pi)=f(\pi)$. Тогда ряд Фурье функции $f'(x)$ получается формальным почленным дифференцированием ряда Фурье функции $f(x)$.

Из теоремы о почленном дифференцировании ряда Фурье имеем:

$$a_k^{(p)}=-\frac{1}{k}b_k^{(p+1)},\ b_k^{(p)}=\frac{1}{k}a_k^{(p+1)}$$

при $p=0,1,\dots,q-1$, следовательно,

$$|a_k|+|b_k|=\frac{1}{k^q}\left(|a_k^{(p)}|+|b_k^{(p)}|\right). \tag{2}$$

Применяя лемму 1 к функции $f^{(q)}(x)$, получим оценки $a_k^{(p)}=O\left(\frac{1}{k}\right)$, $b_k^{(p)}=O\left(\frac{1}{k}\right)$ вместе с равенством (2), получим искомую оценку (1). $\triangleleft$

Замечание о припоминании теоремы.

Для припоминания условия теоремы удобно использовать, например, следующие идеи:

1) В лемме 1 рассматривается кусочно-непрерывная функция с кусочно-непрерывной производной, при этом порядок убывания коэффициентов Фурье наименьший возможный, то есть первый: $\frac{1}{k}$. Припоминаем, что порядок убывания на единицу больше порядка производной, которая оказалась не непрерывной, а кусочно-непрерывной.

2) вычислить коэффициенты Фурье конкретной функции, например, $f(x) = \operatorname{sign} x$ при $x \in [-\pi; \pi]$. Получим $b_k = \frac{4}{\pi}\frac{1}{2k-1}$. То есть, кусочно непрерывная функция с кусочно непрерывной производной имеет оценку: $b_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$.

Примеры решения задач.

Алгоритм решения задачи «Оценить скорость убывания коэффициентов Фурье и остатка ряда Фурье функции» :

Указываем непрерывность производных до $q-1$ порядка (если есть) и точки разрыва производных порядка q и $q+1$, рассматриваем, в том числе, односторонние пределы и производные на концах отрезка $[-\pi;\pi]$ (с обоснованием). Со ссылкой на теорему приводим ответ.

Более подробно см. комментарий в конце пособия.

Пример 1. Оценить скорость убывания коэффициентов Фурье и остатка ряда Фурье функции $f(x) = x^4$, заданной на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$\triangleright$ В данном случае $f(x)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Первая производная не удовлетворяет условию равенства на концах: $f'(x) = 4x^3$, значит $f'(-\pi+0) \neq f'(\pi-0)$. $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны на интервале $(-\pi;\pi)$. Значит, выполнены условия теоремы об оценке скорости сходимости коэффициентов Фурье при $q=1$. Так как функция четная, достаточно указать $a_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ и $\sup|r_n(x)| = O\left(\frac{1}{n}\right)$. $\triangleleft$

Пример 2. Оценить скорость убывания коэффициентов Фурье и остатка ряда Фурье функции $f(x) = |x|\ (x^2 - \pi^2)^2$, заданной на отрезке $[-\pi; \pi]$.

$\triangleright$ Заметим, что функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема во всех точках интервала $(-\pi; \pi)$, кроме точки $x = 0$.

$f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$ и $f(\pi) = f(-\pi)$.

В соответствии с условиями теоремы найдем наименьший порядок производной, разрывной в точке $x = 0$ или, для которой $f'(-\pi + 0) \neq f'(\pi - 0)$.

Найдем $f'(x)$ и $f''(x)$.

$$f'(x) = \left(x^2 - \pi^2\right)^2 \operatorname{sign} x + 4x^2 \left(x^2 - \pi^2\right) \operatorname{sign} x, \quad \text{при} \quad x \neq 0.$$

Вторая производная будет иметь вид многочлена, умноженного на функцию $\operatorname{sign} x$:

$$f''(x) = \left(12x \left(x^2 - \pi^2\right) + 8x^3\right) \operatorname{sign} x, \quad \text{при} \quad x \neq 0.$$

Очевидно, что $f'(-\pi + 0) = f'(\pi - 0) = 0$.

Но, $f'(0 + 0) = \pi^4 \neq f'(0 - 0) = -\pi^4$.

Односторонние пределы вторых производных в точках $x = 0$, $x = -\pi$, $x = \pi$ существуют.

Значит, выполнены условия теоремы об оценке скорости сходимости коэффициентов Фурье при $q = 1$.

Тогда,$a_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ и $\sup |r_n(x)| = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

$\triangleleft$

Комментарий

Необходимо обосновать:

1) существование и непрерывность производных за исключением, быть может, конечного числа точек;

2) для двух старших производных доказать существование конечного числа точек разрыва.

Выделяем «особые» точки, в которых не применимы правила дифференцирования (теоремы о производной суммы, произведения, частного, сложной функции и производных элементарных функций).

В «неособых» точках ссылаемся на указанные выше правила дифференцирования.

В «особых» точках, как правило, удобно применить следующее свойство (рекомендуется доказать самостоятельно):

Пусть функция $h(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности.

Пусть существуют пределы производных $h'(x_0+0) = \lim_{x\to x_0+0} h'(x)$ и $h'(x_0-0) = \lim_{x\to x_0-0} h'(x)$ и они равны: $h'(x_0+0) = h'(x_0-0)$.

Тогда функция $h(x)$ дифференцируема в точке x_0 и ее производная $h'(x)$ непрерывна в точке x_0.

Утверждение применяем для вычисленных по правилам дифференцирования производным (см. пример 2).

Для двух старших производных достаточно показать, что $h'(x_0+0) \neq h'(x_0-0)$ в «особых» точках.

Рекомендуемая литература.

1. Бесов. О.В. Лекции по математическому анализу. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 480с. — ISBN 978-5-9221-1506-3.

2. Иванов Г.Е. Лекции по математическому анализу: в 2 ч.: учебное пособие/ Г.Е. Иванов. — 3-е изд., испр. и доп. — М.:МФТИ, 2011. — ISBN 978-5-7417-0382-3.

3. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.