БИЛЕТ 5

1. Каких чисел от 1 до $8 \cdot 10^{20}$ (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?

Ответ: чисел, содержащих только нечётные цифры, больше на $\dfrac{5^{21}-5}{4}$.

Решение. Рассмотрим k-значные числа ($1 \leqslant k \leqslant 20$). Количество чисел, состоящих только из нечётных цифр, равно 5^k (на каждую из k позиций можно выбрать любую из цифр 1, 3, 5, 7, 9); количество чисел, состоящих только из чётных цифр, равно $4 \cdot 5^{k-1}$ (на первую позицию можно выбрать любую из цифр 2, 4, 6, 8, а на оставшиеся позиции – любую из цифр 0, 2, 4, 6, 8). Следовательно, k-значных чисел, содержащих в своей записи только нечётные цифры, на $5^k - 4 \cdot 5^{k-1} = 5^{k-1}$ больше, чем чисел, содержащих в своей записи только чётные цифры.

Рассмотрим 21-значные числа, не превосходящие $8 \cdot 10^{20}$. Чисел, записанных только нечётными цифрами, среди них $4 \cdot 5^{20}$, а чисел, записанных только чётными цифрами – $3 \cdot 5^{20} + 1$ (не забываем учесть само число $8 \cdot 10^{20}$).

Итак, чисел, записанных только нечётными цифрами, больше на $1+5+5^2+5^3+\ldots+5^{19}+5^{20}-1 = \dfrac{5^{21}-1}{5-1} - 1 = \dfrac{5^{21}-5}{4}$.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 + 2f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 + 2g(x)$ равно 5.

Ответ: -7.

Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Рассмотрим $h(x) = (f(x))^2 + 2g(x)$. Раскрывая скобки, получаем $h(x) = (ax+b)^2 + 2(ax+c) = a^2x^2 + 2a(b+1)x + b^2 + 2c$. График $y = h(x)$ – это парабола с ветвями вверх, минимальное значение принимается в вершине. Абсциссой вершины является $x_{\text{в}} = -\frac{b+1}{a}$; ордината вершины равна $h(x_{\text{в}}) = -2b - 1 + 2c$.

Аналогично получаем, что минимальное значение выражения $(g(x))^2 + 2f(x)$ равно $-2c - 1 + 2b$. Заметим, что сумма этих двух минимальных значений равна -2, следовательно, если одно из этих минимальных значений равно 5, то второе равно $-2 - 5 = -7$.

3. Уравнение $x^2 + ax + 5 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

$$x_1^2 + \frac{250}{19x_2^3} = x_2^2 + \frac{250}{19x_1^3}.$$

Найдите все возможные значения a.

Ответ: $a = 10$.

Решение. Для существования корней уравнения его дискриминант должен быть положителен, откуда $a^2 - 20 > 0$. При этом условии по теореме Виета $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = 5$. Тогда $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - x_1x_2 = a^2 - 5$.

Преобразуем данное равенство:

$$x_1^2 - x_2^2 + \frac{250}{19} \cdot \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1^3x_2^3} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + \frac{250\,(x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right)}{19\,(x_1x_2)^3} = 0.$$

Поскольку корни различны, $x_1 - x_2 \neq 0$. Разделив обе части на $x_1 - x_2$ и подставляя указанные выше значения, получаем $-a + \frac{250}{19} \cdot \frac{a^2-5}{125} = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 19a - 10 = 0$, откуда $a = 10$ или $a = -0{,}5$. Неравенству $a^2 - 20 > 0$ удовлетворяет только $a = 10$.

4. На каждой из прямых $x = 0$ и $x = 2$ отмечено по 62 точки с ординатами $1, 2, 3, \ldots, 62$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 124 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

Ответ: 7908.

Решение. Есть две возможности.

1) Гипотенуза треугольника лежит на одной из прямых, а вершина прямого угла – на второй прямой. Пусть ABC – данный треугольник с прямым углом при вершине C, CH – его высота, опущенная на гипотенузу. Из пропорциональности отрезков прямоугольного треугольника получаем, что $CH^2 = AH \cdot BH$, т.е. $AH \cdot BH = 4$. Поскольку AH и BH – целые числа, то возможны следующие случаи: $AH = BH = 2$, $AH = 4$ и $BH = 1$, $AH = 1$ и $BH = 4$.

В первом из этих случаев гипотенузу AB, равную 4, можно расположить $58 \cdot 2 = 116$ способами (по $62 - 4$ способов расположения на каждой из двух данных прямых), при этом положение вершины C определяется однозначно.

Во втором и третьем случаях длина гипотенузы равна 5, и её можно расположить $2(62-5) = 114$ способами. Для каждого положения гипотенузы существует два способа размещения вершины – получаем $2 \cdot 114 = 228$ способов.

2) Один из катетов треугольника (назовём его BC) перпендикулярен данным прямым, а второй катет (AC) лежит на одной из данных прямых. Тогда положение катета BC можно выбрать 62 способами. Для каждого варианта расположения катета BC вершину A можно расположить 122 способами (подходят все точки кроме уже выбранных B и C) – всего выходит $62 \cdot 122 = 7564$ способов.

Итого получаем $116 + 228 + 7564 = 7908$ способов.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ BD, и в каждый из полученных треугольников ABD и BCD вписана окружность. Прямая, проходящая через вершину B и центр одной из окружностей, пересекает сторону DA в точке M. При этом $AM = \frac{8}{5}$ и $MD = \frac{12}{5}$. Аналогично, прямая, проходящая через вершину D и центр второй окружности, пересекает сторону BC в точке N. При этом $BN = \frac{30}{11}$ и $NC = \frac{25}{11}$.

а) Найдите отношение $AB : CD$.

б) Найдите длины сторон AB и CD, если дополнительно известно, что данные окружности касаются друг друга.

Ответ: а) $AB : CD = 4 : 5$, $AB = 4$, $CD = 5$.

Решение. а) Так как биссектриса треугольника делит его сторону пропорционально двум другим сторонам, $AB : BD = AM : MD = 2 : 3$ и $BD : DC = BN : NC = 6 : 5$. Следовательно, $AB : CD = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = 4 : 5$.

б) Обозначим точки касания окружности, вписанной в треугольник ABD, с его сторонами AB, AD, BD через P, F, K соответственно; точки касания окружности, вписанной в треугольник BCD с его сторонами BC, CD, BD – через Q, E, K соответственно (по условию точка касания со стороной BD общая).

Пусть $BK = x$, $KD = y$. Используя равенство отрезков касательной, проведённых к окружности из одной точки, получаем соотношения

$BQ = BP = BK = x$, $DF = DE = DK = y$, $AF = AD - DF = 4 - y$, $AP = AF = 4 - y$, $CQ = BC - BQ = 5 - x$, $CE = CQ = 5 - x$, $AB = AP + PB = 4 + x - y$, $CD = 5 - x + y$.

В пункте а) было получено, что $AB : CD = 4 : 5$, откуда $\frac{4+x-y}{5-x+y} = \frac{4}{5}$, $x = y$. Тогда $AB = 4$, $CD = 5$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от девяти последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 294, а сумма расстояний от этих же девяти чисел до некоторого числа b равна 1932. Найдите все возможные значения a, если известно, что $a+b=256$.

Ответ: $a=\frac{13}{3}$, $a=\frac{755}{3}$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+8$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k;\, k+8]$, то сумма расстояний от него до данных девяти чисел не превосходит $\frac{9}{2}\cdot 8=36$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 8, сумма расстояний до $k+1$ и $k+7$ не превосходит 8, сумма расстояний до $k+2$ и $k+6$ также не превосходит 8 и т.д.; расстояние до $k+4$ не превосходит половины длины отрезка между крайними числами, т.е. 4). Следовательно, числа a и b лежат вне отрезка $[k;\, k+8]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|9a-k-(k+1)-\ldots-(k+8)|=9|a-k-4|$. Аналогично, сумма расстояний от числа b до каждого из данных чисел равна $9|b-k-4|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 9|a-k-4|=294, \\ 9|b-k-4|=1932, \\ a+b=256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a-k-4|=32\frac{2}{3}, \\ |b-k-4|=214\frac{2}{3}, \\ a+b=256. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и b лежат справа от отрезка $[k;\, k+8]$. Тогда

$$\begin{cases} a-k-4=32\frac{2}{3}, \\ b-k-4=214\frac{2}{3}, \\ a+b=256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=37, \\ b=219, \\ k=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ввиду того, что k должно быть натуральным числом, этот случай не подходит.

2) Оба числа a и b лежат слева от отрезка $[k;\, k+8]$. Тогда

$$\begin{cases} -a+k+4=32\frac{2}{3}, \\ -b+k+4=214\frac{2}{3}, \\ a+b=256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=219, \\ b=37, \\ k=247\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Этот случай также не подходит.

3) Число a лежит справа, а b – слева от отрезка $[k;\, k+8]$. Тогда

$$\begin{cases} a-k-4=32\frac{2}{3}, \\ -b+k+4=214\frac{2}{3}, \\ a+b=256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=251\frac{2}{3}, \\ b=4\frac{1}{3}, \\ k=215. \end{cases}$$

4) Число b лежит справа, а a – слева от отрезка $[k;\, k+8]$. Тогда

$$\begin{cases} -a+k+4=32\frac{2}{3}, \\ b-k-4=214\frac{2}{3}, \\ a+b=256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4\frac{1}{3}, \\ b=251\frac{2}{3}, \\ k=33. \end{cases}$$

Итак, возможны два случая: $a=4\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$, $a=251\frac{2}{3}=\frac{755}{3}$.

7. В треугольнике ABC сторона AC равна 6, а угол ACB равен 120°. Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC. Найдите длины отрезков CL, MK, AB и площадь треугольника ANL.

   Ответ: $CL = 1$, $MK = 3$, $AB = 2\sqrt{13}$, $S_{\triangle ALN} = \frac{125\sqrt{3}}{52}$.

   Решение. Обозначим центр окружности через O, основание высоты треугольника проведённой из вершины C, через H, а угол BAC через α.

   Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle OCL = \frac{1}{2}\angle ACB = 60^\circ$. Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $CL = OL \operatorname{ctg} \angle OCL = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$. По сумме углов четырёхугольника $OLCK$ находим, что $\angle LOK = 60^\circ$.

   Поскольку $OL \perp AC$ и $MK \parallel AC$, то $OL \perp MK$. Треугольник MOK равнобедренный, высота в нём является биссектрисой, значит, $\angle MOK = 2\angle LOK = 120^\circ$. Отсюда $MK = 2 \cdot MO \cdot \sin 60^\circ = 3$.

   $\angle MOL = \frac{1}{2}\angle MOK = 60^\circ$, $MO = LO$, следовательно, треугольник MOL – равносторонний, $\angle MLO = 60^\circ$, $ML = \sqrt{3}$. Тогда $\angle ALM = \angle ALO - \angle MLO = 30^\circ$.

   Рассмотрим треугольник ALM. По теореме косинусов получаем, что $AM^2 = AL^2 + LM^2 - 2 \cdot AL \cdot LM \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 13$.

   По теореме о касательной и секущей $AL^2 = AM \cdot AN$, откуда $AN = \frac{25}{\sqrt{13}}$. У треугольников ALM и ALN общая высота, проведённая из вершины L, поэтому их площади относятся как основания, т.е. как $AM : AN$. Следовательно, $S_{\triangle ALN} = S_{\triangle ALM} \cdot \frac{AM}{AN} = \frac{1}{2} \cdot AL \cdot LM \cdot \sin 30^\circ \cdot \frac{25}{13} = \frac{125\sqrt{3}}{52}$.

   Так как $KM \parallel AC$, треугольники BKM и BCA подобны, при этом коэффициент подобия равен $KM : CA = 3 : 6$. Отсюда следует, что $\frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}$, $\frac{BA - \sqrt{13}}{BA} = \frac{1}{2}$, $AB = 2\sqrt{13}$.

БИЛЕТ 6

1. Каких чисел от 1 до $4 \cdot 10^{25}$ (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?

Ответ: чисел, содержащих только нечётные цифры, больше на $\dfrac{5^{26}-5}{4}$.

Решение. Рассмотрим k-значные числа ($1 \leqslant k \leqslant 25$). Количество чисел, состоящих только из нечётных цифр, равно 5^k (на каждую из k позиций можно выбрать любую из цифр 1, 3, 5, 7, 9); количество чисел, состоящих только из чётных цифр, равно $4 \cdot 5^{k-1}$ (на первую позицию можно выбрать любую из цифр 2, 4, 6, 8, а на оставшиеся позиции – любую из цифр 0, 2, 4, 6, 8). Следовательно, k-значных чисел, содержащих в своей записи только нечётные цифры, на $5^k - 4 \cdot 5^{k-1} = 5^{k-1}$ больше, чем чисел, содержащих в своей записи только чётные цифры.

Рассмотрим 26-значные числа, не превосходящие $4 \cdot 10^{25}$. Чисел, записанных только нечётными цифрами, среди них $2 \cdot 5^{25}$, а чисел, записанных только чётными цифрами – $\cdot 5^{25}+1$ (не забываем учесть само число $4 \cdot 10^{25}$).

Итак, чисел, записанных только нечётными цифрами, больше на $1+5+5^2+5^3+\ldots+5^{24}+5^{25}-1 = \dfrac{5^{26}-1}{5-1} - 1 = \dfrac{5^{26}-5}{4}$.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 + 8f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 + 8g(x)$ равно -29.

Ответ: -3.

Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Рассмотрим $h(x) = (f(x))^2 + 8g(x)$. Раскрывая скобки, получаем $h(x) = (ax+b)^2 + 8(ax+c) = a^2x^2 + 2a(b+4)x + b^2 + 8c$. График $y = h(x)$ – это парабола с ветвями вверх, минимальное значение принимается в вершине. Абсциссой вершины является $x_{\text{в}} = -\frac{b+4}{a}$; ордината вершины равна $h(x_{\text{в}}) = -8b - 16 + 8c$.

Аналогично получаем, что минимальное значение выражения $(g(x))^2 + 2f(x)$ равно $-8c - 16 + 8b$. Заметим, что сумма этих двух минимальных значений равна -32, следовательно, если одно из этих минимальных значений равно -29, то второе равно $-32 + 29 = -3$.

3. Уравнение $x^2 + ax + 4 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2; при этом

$$x_1^2 - \frac{20}{3x_2^3} = x_2^2 - \frac{20}{3x_1^3}.$$

Найдите все возможные значения a.

Ответ: $a = -10$.

Решение. Для существования корней уравнения его дискриминант должен быть положителен, откуда $a^2 - 16 > 0$. При этом условии по теореме Виета $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = 4$. Тогда $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - x_1x_2 = a^2 - 4$.

Преобразуем данное равенство:

$$x_1^2 - x_2^2 - \frac{20}{3} \cdot \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1^3x_2^3} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - \frac{20(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}{3(x_1x_2)^3} = 0.$$

Поскольку корни различны, $x_1 - x_2 \neq 0$. Разделив обе части на $x_1 - x_2$ и подставляя указанные выше значения, получаем $-a - \frac{20}{3} \cdot \frac{a^2-4}{64} = 0 \Leftrightarrow 5a^2 + 48a - 20 = 0$, откуда $a = -10$ или $a = 0{,}4$. Неравенству $a^2 - 16 > 0$ удовлетворяет только $a = -10$.

4. На каждой из прямых $y = 0$ и $y = 2$ отмечено по 64 точки с абсциссами $1, 2, 3, \ldots, 64$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 128 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

Ответ: 8420.

Решение. Есть две возможности.

1) Гипотенуза треугольника лежит на одной из прямых, а вершина прямого угла – на второй прямой. Пусть ABC – данный треугольник с прямым углом при вершине C, CH – его высота, опущенная на гипотенузу. Из пропорциональности отрезков прямоугольного треугольника получаем, что $CH^2 = AH \cdot BH$, т.е. $AH \cdot BH = 4$. Поскольку AH и BH – целые числа, то возможны следующие случаи: $AH = BH = 2$, $AH = 4$ и $BH = 1$, $AH = 1$ и $BH = 4$.

В первом из этих случаев гипотенузу AB, равную 4, можно расположить $60 \cdot 2 = 120$ способами (по $64 - 4$ способов расположения на каждой из двух данных прямых), при этом положение вершины C определяется однозначно.

Во втором и третьем случаях длина гипотенузы равна 5, и её можно расположить $2(64-5) = 118$ способами. Для каждого положения гипотенузы существует два способа размещения вершины – получаем $2 \cdot 118 = 236$ способов.

2) Один из катетов треугольника (назовём его BC) перпендикулярен данным прямым, а второй катет (AC) лежит на одной из данных прямых. Тогда положение катета BC можно выбрать 64 способами. Для каждого варианта расположения катета BC вершину A можно расположить 126 способами (подходят все точки кроме уже выбранных B и C) – всего выходит $64 \cdot 126 = 8064$ способа.

Итого получаем $120 + 236 + 8064 = 8420$ способов.

5. В четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ BD, и в каждый из полученных треугольников ABD и BCD вписана окружность. Прямая, проходящая через вершину B и центр одной из окружностей, пересекает сторону DA в точке M. При этом $AM = \frac{25}{7}$ и $MD = \frac{10}{7}$. Аналогично, прямая, проходящая через вершину D и центр второй окружности, пересекает сторону BC в точке N. При этом $BN = \frac{3}{2}$ и $NC = \frac{9}{2}$.

а) Найдите отношение $AB : CD$.

б) Найдите длины сторон AB и CD, если дополнительно известно, что данные окружности касаются друг друга.

Ответ: а) $AB : CD = 5 : 6$; б) $AB = 5$, $CD = 6$.

Решение. а) Так как биссектриса треугольника делит его сторону пропорционально двум другим сторонам, $AB : BD = AM : MD = 5 : 2$ и $BD : DC = BN : NC = 1 : 3$. Следовательно, $AB : CD = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} = 5 : 6$.

б) Обозначим точки касания окружности, вписанной в треугольник ABD, с его сторонами AB, AD, BD через P, F, K соответственно; точки касания окружности, вписанной в треугольник BCD с его сторонами BC, CD, BD – через Q, E, K соответственно (по условию точка касания со стороной BD общая).

Пусть $BK = x$, $KD = y$. Используя равенство отрезков касательной, проведённых к окружности из одной точки, получаем соотношения

$BQ = BP = BK = x$, $DF = DE = DK = y$, $AF = AD - DF = 5 - y$, $AP = AF = 5 - y$, $CQ = BC - BQ = 6 - x$, $CE = CQ = 6 - x$, $AB = AP + PB = 5 + x - y$, $CD = 6 - x + y$.

В пункте а) было получено, что $AB : CD = 5 : 6$, откуда $\frac{5+x-y}{6-x+y} = \frac{5}{6}$, $x = y$. Тогда $AB = 5$, $CD = 6$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от восьми последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 612, а сумма расстояний от этих же восьми чисел до некоторого числа b равна 240. Найдите все возможные значения a, если известно, что $a+b=100{,}5$.

Ответ: $a=27$, $a=-3$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \ldots, k+7$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k; k+8]$, то сумма расстояний от него до данных восьми чисел не превосходит $4\cdot 7=28$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 7, сумма расстояний до $k+1$ и $k+6$ не превосходит 7, сумма расстояний до $k+2$ и $k+5$ также не превосходит 7 и т.д.). Следовательно, числа a и b лежат вне отрезка $[k; k+7]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|8a-k-(k+1)-\ldots-(k+7)|=8|a-k-3{,}5|$. Аналогично, сумма расстояний от числа b до каждого из данных чисел равна $8|b-k-3{,}5|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}8|a-k-3{,}5|=612,\\ 8|b-k-3{,}5|=240,\\ a+b=100{,}5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|a-k-3{,}5|=76{,}5,\\ |b-k-3{,}5|=30,\\ a+b=100{,}5.\end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и b лежат справа от отрезка $[k; k+7]$. Тогда

$$\begin{cases}a-k-3{,}5=76{,}5,\\ b-k-3{,}5=30,\\ a+b=100{,}5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=73{,}5,\\ b=27,\\ k=-6{,}5.\end{cases}$$

Ввиду того, что k должно быть натуральным числом, этот случай не подходит.

2) Оба числа a и b лежат слева от отрезка $[k; k+7]$. Тогда

$$\begin{cases}-a+k+3{,}5=76{,}5,\\ -b+k+3{,}5=30,\\ a+b=100{,}5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=27,\\ b=73{,}5,\\ k=100.\end{cases}$$

3) Число a лежит справа, а b – слева от отрезка $[k; k+7]$. Тогда

$$\begin{cases}a-k-3{,}5=76{,}5,\\ -b+k+3{,}5=30,\\ a+b=100{,}5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=103{,}5,\\ b=-3,\\ k=23{,}5.\end{cases}$$

Этот случай также не подходит.

4) Число b лежит справа, а a – слева от отрезка $[k; k+7]$. Тогда

$$\begin{cases}-a+k+3{,}5=76{,}5,\\ b-k-3{,}5=30,\\ a+b=100{,}5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-3,\\ b=103{,}5,\\ k=70.\end{cases}$$

Итак, возможны два случая: $a=-3$, $a=27$.

7. В треугольнике ABC сторона BC равна 4, а угол ACB равен $\frac{2\pi}{3}$. Окружность Γ радиуса $2\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC. Найдите длины отрезков CK, MK, AB и площадь треугольника CMN.

Ответ: $CK = 2$, $MK = 6$, $AB = 4\sqrt{13}$, $S_{\triangle CMN} = \frac{72\sqrt{3}}{13}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O, основание высоты треугольника проведённой из вершины C, через H, а угол ABC через β.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle OCK = \frac{1}{2}\angle ACB = 60^\circ$. Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $CK = OK \operatorname{ctg} \angle OCK = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2$. Тогда отрезок BK также равен 2. По сумме углов четырёхугольника $OLCK$ находим, что $\angle LOK = 60^\circ$.

Поскольку $OL \perp AC$ и $MK \parallel AC$, то $OL \perp MK$. Треугольник MOK равнобедренный, высота в нём является биссектрисой, значит, $\angle MOK = 2\angle LOK = 120^\circ$. Отсюда $MK = 2 \cdot MO \cdot \sin 60^\circ = 6$.

В силу параллельности прямых MK и AC получаем, что $\angle MKB = 120^\circ$. Рассмотрим треугольник MKB. По теореме косинусов $BM^2 = BK^2 + KM^2 - 2 \cdot BK \cdot KM \cdot \cos 120^\circ = 52$, $BM = 2\sqrt{13}$. По теореме синусов $\frac{MK}{\sin\beta} = \frac{BM}{\sin 120^\circ}$, откуда $\sin\beta = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$; $CH = BC\sin\beta = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

По теореме о касательной и секущей $BK^2 = BM \cdot BN$, откуда $BN = \frac{2}{\sqrt{13}}$; $MN = BM - BN = \frac{24}{\sqrt{13}}$. Значит, площадь треугольника CMN равна $\frac{1}{2}CH \cdot MN = \frac{72\sqrt{3}}{13}$.

Так как $KM \parallel AC$, треугольники BKM и BCA подобны, при этом коэффициент подобия равен $BK : BC = 1 : 2$. Отсюда следует, что $\frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}$, $AB = 4\sqrt{13}$.