МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Олимпиада “МАГИСТРАТУРА ФИЗТЕХА” по математике

1	2а	2б	3а	3б	4а	4б	5	6а	6б	6в	7	8а	8б	9а	9б
1	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**1**	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19а	19б	19в	20	21	22	Σ
1	**1**	**2**	**2**	**2**	**2**	**3**	**3**	**2**	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**	**3**	**50**

БИЛЕТ 1

ВНИМАНИЕ! В задачах 1–20 все числа вещественные, в задачах 21–22 числа комплексные.
В каждой задаче должен быть написан ОТВЕТ.

1. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{(2k-3)(k+1)}{k+4}-\dfrac{(2k^2-3)(k+1)}{k^2+4}\right)$.

Решение. Приводя дроби к общему знаменателю и упрощая, получаем $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{11k-11k^3}{k^3+4k^2+4k+16}=-11$.

Ответ. -11.

2. Найдите пределы функций: **а)** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 3x+1}{\cos^2 x+3\cos x+2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{sh} x}{\operatorname{tg}(x^2)\ln(2-x)}$.

Решение. а) Перед нами неопределённость (при $x=\pi$ числитель и знаменатель дроби обращаются в ноль). Применим правило Лопиталя. Получаем

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 3x+1}{\cos^2 x+3\cos x+2}=\lim_{x\to\pi}\frac{-3\sin 3x}{-2\cos x\sin x-3\sin x}.$$

Поскольку неопределённость сохраняется, применим правило Лопиталя ещё раз:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{-3\sin 3x}{-2\cos x\sin x-3\sin x}=\lim_{x\to\pi}\frac{-9\cos 3x}{-2\cos 2x-3\cos x}=\frac{9}{-2+3}=9.$$

Значит, исходный предел существует и также равен 9.

б) Раскладывая числитель и знаменатель дроби по формуле Тейлора, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\operatorname{sh} x}{\operatorname{tg}(x^2)\ln(2-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+x+o(x^2)}{(x^2+o(x^2))\cdot(\ln 2+o(1))}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2\ln 2+o(x^2)}=-\frac{1}{2\ln 2}.$$

Ответ. а) 9, **б)** $-\dfrac{1}{2\ln 2}$.

3. Для функции $h(x)=\log_{|x|}(\arccos 2x)$ найдите: **а)** область определения, **б)** производную.

Решение. а) Область определения задаётся неравенствами $|x|>0$, $|x|\neq 1$, $\arccos 2x>0$, $-1\le 2x\le 1$, решая которые, получаем $x\in\left[-\dfrac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

б) $h'(x)=\left(\dfrac{\ln\arccos 2x}{\ln|x|}\right)'=\left(\ln\arccos 2x\cdot\ln^{-1}|x|\right)'=\dfrac{1}{\arccos 2x}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\right)\cdot 2\cdot\ln^{-1}|x|+\ln\arccos 2x\cdot\left(-\ln^{-2}|x|\right)\cdot\dfrac{1}{x}$.

Ответ. а) $x\in\left[-\dfrac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$, **б)** $h'(x)=-\dfrac{2}{\arccos 2x\cdot\sqrt{1-4x^2}\cdot\ln|x|}-\dfrac{\ln\arccos 2x}{x\ln^2|x|}$.

4. Для функции $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{4-x}$ найдите: **а)** асимптоты, **б)** точки локального экстремума.

Решение. а) Выделяя целую часть дроби, получаем $f(x) = 2 - x + \frac{1}{4-x}$. Следовательно, асимптотами являются прямые $y = 2 - x$ и $x = 4$.

б) $f'(x) = -1 + \frac{1}{(4-x)^2} = \frac{(x-3)(5-x)}{(4-x)^2}$. Производная обращается в ноль при $x = 3$ и меняет знак с минуса на плюс при переходе через $x = 3$, поэтому $x = 3$ – точка минимума. Аналогично получаем, что $x = 5$ – точка максимума. Других критических точек у функции нет (при $x = 4$ сама функция не определена).

Ответ. а) $y = 2 - x$, $x = 4$; **б)** $x = 3$ – локальный минимум, $x = 5$ – локальный максимум.

5. Составьте общее уравнение плоскости, проходящей через точку $T(-1; 3; 1)$ и прямую $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$.

Решение. Вектор $\vec{a}(3; -2; 1)$, являющийся направляющим вектором данной прямой, параллелен искомой плоскости. Точка $M(-2; 1; 0)$ лежит на данной прямой. Значит, вектор $\vec{b} = \overrightarrow{MT}(1; 2; 1)$ также параллелен искомой плоскости. Тогда вектор нормали к плоскости $\vec{n}(\alpha; \beta; \gamma)$ удовлетворяет условиям $\vec{n} \perp \vec{a}$, $\vec{n} \perp \vec{b}$, откуда $3\alpha - 2\beta + \gamma = 0$, $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$. Этим уравнениям удовлетворяет, например, $\vec{n}(2; 1; -4)$. Следовательно, уравнение плоскости принимает вид $2(x+1) + 1(y-3) - 4(z-1) = 0$. Упрощая, окончательно получаем $2x + y - 4z + 3 = 0$.

Ответ. $2x + y - 4z + 3 = 0$.

6. Малыш и Карлсон независимо друг от друга случайным образом выбирают одно из чисел от 1 до 16 (числа могут совпадать, выбор каждого из чисел равновероятен). Найдите:
а) вероятность того, что они выбрали разные числа;
б) вероятность того, что ни одно из выбранных чисел не является квадратом другого;
в) математическое ожидание произведения выбранных чисел.

Решение. а) Пусть Малыш уже выбрал число. Тогда для Карлсона получаем 15 благоприятных исходов (при которых числа разные) из 16, вероятность равна $\frac{15}{16}$.

б) Множество элементарных исходов состоит из упорядоченных пар натуральных чисел $(a; b)$, где $a, b \in [1; 16]$. Всего возможно $16 \cdot 16 = 256$ исходов; из них *не* подходят $(1; 1)$, $(2; 4)$, $(3; 9)$, $(4; 16)$, $(4; 2)$, $(9; 3)$, $(16; 4)$ – всего 7 штук. Значит, искомая вероятность равна $1 - \frac{7}{256} = \frac{249}{256}$.

в) Для независимых случайных величин математическое ожидание произведения равно произведению их математических ожиданий. Поэтому получаем $\left(\frac{1}{16}(1 + 2 + 3 + \ldots + 16)\right)^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2 = \frac{289}{4}$.

Ответ. а) $\frac{15}{16}$, **б)** $\frac{249}{256}$, **в)** $\frac{289}{4}$.

7. Найдите A^{-1}, если $A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{Vmatrix}$.

Решение. С помощью формулы для обратной матрицы (её удобно применять на практике в случае матрицы 2×2) получаем, что $A^{-1} = \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ -2/3 & 1/3 \end{Vmatrix}$.

Ответ. $A^{-1} = \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ -2/3 & 1/3 \end{Vmatrix}$.

8. Найдите все значения x, при каждом из которых функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k \sin k + \ln x)}{k^3}$ **(а)** сходится, **(б)** абсолютно сходится.

Решение. При любом фиксированном допустимом значении x ($x > 0$) для общего члена ряда справедливы следующие соотношения:

$$|a_k(x)| = \left|\frac{k \sin k + \ln x}{k^3}\right| \le \left|\frac{k \sin k}{k^3}\right| + \left|\frac{\ln x}{k^3}\right| \le \frac{1}{k^2} + \frac{|\ln x|}{k^3} = b_k(x).$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ сходится при любом положительном x, поэтому по признаку сравнения исходный ряд сходится абсолютно при любом положительном x. Известно также, что из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость.

Ответ. а) $x > 0$, **б)** $x > 0$.

9. В линейном пространстве многочленов $q = q(x)$ степени не выше первой задано линейное преобразование $\varphi(q) = q(3x) + q(2x)$.

а) Найдите матрицу φ в базисе $\{x-1, 3x+4\}$.

б) Найдите собственные векторы и собственные значения преобразования φ в том же базисе.

Решение. а) Чтобы найти матрицу линейного преобразования, нужно отыскать координаты образов базисных векторов при преобразовании.

$$\varphi(x-1) = (3x-1) + (2x-1) = 5x-2 .$$

Образ первого базисного вектора – это многочлен $5x-2$. Чтобы найти его координаты в данном базисе, представляем его в виде $5x-2 = a(x-1) + b(3x+4)$, коэффициенты a и b предстоит найти. Для этого раскрываем скобки и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x. Получаем $5 = a+3b$, $-2 = -a+4b$, откуда $a = \frac{26}{7}$, $b = \frac{3}{7}$. Значит, первый столбец матрицы преобразования – это $\frac{1}{7}\begin{Vmatrix}26\\3\end{Vmatrix}$. Аналогично находится второй столбец – $\frac{1}{7}\begin{Vmatrix}36\\23\end{Vmatrix}$. В итоге получаем $A = \frac{1}{7}\begin{Vmatrix}26 & 36\\3 & 23\end{Vmatrix}$.

б) Напомним, что *ненулевой* вектор $\bar{p}$ называется собственным вектором преобразования φ, если $\varphi(\bar{p}) = \lambda\bar{p}$, где λ – соответствующее собственное значение. Пусть многочлен $h(x) = \mathring{a}x + b$ является собственным вектором преобразования φ. Тогда $\varphi(ax+b) = 5ax + 2b = \lambda(ax+b)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем $5a = \lambda a$, $2b = \lambda b$.

Если $a = 0$, то $b \neq 0$ и $\lambda = 2$; собственный вектор – это $h(x) = 1$, или $h(x) = -\frac{3}{7}(x-1) + \frac{1}{7}(3x+4)$, если его выразить в нужном базисе.

Если $b = 0$, то $a \neq 0$ и $\lambda = 5$; собственный вектор – это $h(x) = x$, или $h(x) = \frac{4}{7}(x-1) + \frac{1}{7}(3x+4)$.

Если $b \neq 0$ и $a \neq 0$, то получается противоречие.

Ответ. а) $A = \frac{1}{7}\begin{Vmatrix}26 & 36\\3 & 23\end{Vmatrix}$, **б)** $\lambda_1 = 2$, $h_1(x) = 1 = -\frac{3}{7}(x-1) + \frac{1}{7}(3x+4)$; $\lambda_2 = 5$, $h_2(x) = x = \frac{4}{7}(x-1) + \frac{1}{7}(3x+4)$.

10. Функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[7;17]$, и при этом $f(17) = 3$, $-2 \le f'(x) \le 3$ при $x \in [7;17]$. Найдите наибольшее возможное значение $f(7)$.

Решение. По формуле Ньютона–Лейбница $\int_7^{17} f'(x)dx = f(17) - f(7) = 3 - f(7)$. Значит, $f(7) = 3 - \int_7^{17} f'(x)dx$. Ясно, что значение $f(7)$ максимально, если интеграл в правой части последней формулы минимален. С учётом данных в условии ограничений на $f'(x)$ минимум достигается при $f'(x) \equiv -2$, откуда $f_{\max}(7) = 3 - \int_7^{17}(-2)dx = 23$.

Ответ. 23.

11. Пусть $h(x)$ – непрерывная функция такая, что $2x^6 - 128 = \int_c^x h(v)dv$, где c – некоторая константа. Найдите c.

Решение. Подставив в обе части данного равенства $x = c$, получаем $2c^6 - 128 = 0$, откуда $c = \pm 2$.

Ответ. $c = \pm 2$.

12. Вычислите интеграл $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(\cos 2x + \sqrt{1+x^4}\sin^3 x\cos^3 x\right)dx$.

Решение. Данный интеграл представим в виде суммы двух интегралов $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos 2x dx + \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\sqrt{1+x^4}\sin^3 x\cos^3 x dx$. Второй интеграл равен нулю, так как подынтегральная функция нечётная, а пределы интегрирования симметричны относительно нуля. Первый интеграл находим по формуле Ньютона-Лейбница: $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos 2x dx = \left.\frac{\sin 2x}{2}\right|_{-\pi/3}^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\ln x = ax^5$ имеет ровно одно решение.

Решение. Построив эскизы графиков левой и правой частей уравнения при $x > 0$, замечаем, что ровно одно решение возможно только при касании графиков (обе функции возрастают, одна строго выпуклая, а другая строго вогнутая).

Пусть x_0 – абсцисса точки касания. Тогда $\ln x_0 = a{x_0}^5$ и $\frac{1}{x_0} = 5a{x_0}^4$ (равенство функций и их производных в точке касания). Решая эту систему уравнений, находим $x_0 = \exp\frac{1}{5}$, $a = \frac{1}{5e}$

Ответ. $a = \frac{1}{5e}$.

14. Найдите $f^{(2016)}(x)$, если $f(x) = \frac{x+7}{e^x}$.

Решение. Перепишем данную функцию в виде $f(x) = (x+7)e^{-x}$. По формуле Лейбница для производной произведения получаем $\left((x+7)e^{-x}\right)^{(2016)} = (x+7)\cdot\left(e^{-x}\right)^{(2016)} + 2016\cdot(x+7)'\cdot\left(e^{-x}\right)^{(2015)} = (x+7)e^{-x} - 2016e^{-x} = \frac{x-2009}{e^x}$.

Ответ. $\frac{x-2009}{e^x}$.

15. Найдите координаты точки плоскости $3x - y - 5z = -4$, расположенной ближе всего к началу координат.

Решение. Проведём через начало координат прямую l, перпендикулярную данной плоскости. Точка пересечения этой прямой с плоскостью и есть искомая.

Вектор нормали $\vec{n}$ к плоскости имеет вид $\vec{n}(3; -1; -5)$. Значит, прямая может быть задана следующими параметрическими уравнениями: $x = 3t$, $y = -t$, $z = -5t$, $t \in R$. Подставляя эти выражения в уравнение плоскости, получаем $9t + t + 25t = -4$, откуда $t = -\frac{4}{35}$. Следовательно, координаты искомой точки таковы: $\left(-\frac{12}{35}; \frac{4}{35}; \frac{20}{35}\right)$.

Ответ. $\left(-\frac{12}{35}; \frac{4}{35}; \frac{20}{35}\right)$.

16. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y^{(5)} + 4y''' = e^{-2x} - 2$.

Решение. 1) Решаем однородное уравнение. Для этого находим корни характеристического уравнения: $\lambda^5 + 4\lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \\ \lambda_{4,5} = \pm 2i.\end{array}\right.$ Значит, общее решение однородного уравнения имеет вид $y_o = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\cos 2x + C_5\sin 2x$.

2) Для слагаемого e^{-2x} в правой части частное решение ищем в виде $y_1 = Ae^{-2x}$. Получаем $-32Ae^{-2x} - 32Ae^{-2x} = e^{-2x}$, откуда $A = -\frac{1}{64}$, $y_1 = -\frac{1}{64}e^{-2x}$.

3) Для слагаемого -2 в правой части частное решение ищем в виде $y_2 = Bx^3$. Получаем $0 + 4\cdot 6B = -2$, откуда $B = -\frac{1}{12}$, $y_2 = -\frac{x^3}{12}$.

Значит, общее решение исходного уравнения – это $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\cos 2x + C_5\sin 2x - \frac{e^{-2x}}{64} - \frac{x^3}{12}$.

Ответ. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\cos 2x + C_5\sin 2x - \frac{e^{-2x}}{64} - \frac{x^3}{12}$.

17. Используя метод множителей Лагранжа, найдите в области $y > 0$ точки условного экстремума функции $v(x, y) = y^3 - x^2$ при условии $4x + 3y^2 = 4$.

Решение. Функция Лагранжа равна $L(x, y) = y^3 - x^2 + \lambda\left(4x + 3y^2 - 4\right)$. Находим её стационарную точку (для этого приравниваем к нулю частные производные по x и y, добавляем уравнение связи):

$$L_x = -2x + 4\lambda = 0,\ L_y = 3y^2 + 6\lambda y = 0,\ 4x + 3y^2 = 4,$$

откуда (с учётом условия $y > 0$) $\lambda = -1$, $x = -2$, $y = 2$.

Исследуем найденную точку на экстремум. Для этого находим второй дифференциал функции Лагранжа: $d^2L = L_{xx}dx^2 + 2L_{xy}dxdy + L_{yy}dy^2 = -2dx^2 + (6y + 6\lambda)dy^2$. Дифференцируя уравнение связи $4x + 3y^2 = 4$, получаем

$4dx + 6ydy = 0$, откуда $dx = -\frac{3y}{2}dy$, $d^2L = -\frac{9y^2}{2}dy^2 + 6(y+\lambda)dy^2$. Подставляя сюда координаты стационарной точки, находим, что $d^2L = -12dy^2 < 0$. Так как эта квадратичная форма отрицательно определена, то точка $(-2; 2)$ является точкой максимума.

Ответ. $(-2; 2)$ – локальный условный максимум.

18. Разложите функцию $h(x) = \sin x \cos^4 x$ в ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$.

Решение. Преобразуем функцию:

$$h(x) = \sin x \cos^4 x = \frac{1}{4}\sin x(1+\cos 2x)^2 = \frac{1}{4}\sin x(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{1}{8}\sin x(3 + 4\cos 2x + \cos 4x) =$$

$$= \frac{1}{16}(6\sin x + 8\sin x\cos 2x + 2\sin x\cos 4x) = \frac{1}{16}(6\sin x + 4\sin 3x - 4\sin x + \sin 5x - \sin 3x) = \frac{1}{8}\sin x + \frac{3}{16}\sin 3x + \frac{1}{16}\sin 5x.$$

Полученное представление и является разложением функции в ряд Фурье (это можно доказать, например, используя формулы для коэффициентов $b_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(x)\sin kxdx$ и т.д. и ортогональность функций системы).

Ответ. $h(x) = \frac{1}{8}\sin x + \frac{3}{16}\sin 3x + \frac{1}{16}\sin 5x.$

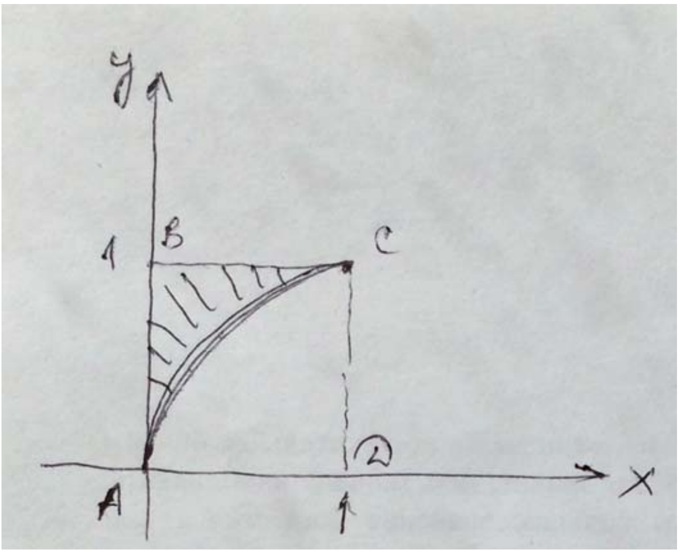
19. Дан повторный интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^1 g(x, y)dy$.

а) Изобразите область интегрирования и найдите её площадь.

б) Поменяйте порядок интегрирования.

в) Перейдите к полярным координатам и запишите интеграл в виде повторного в порядке интегрирования (ρ, φ).

Решение. а) Уравнение $y = \sqrt{2x - x^2}$ равносильно $y^2 = 2x - x^2$ при условии $y \ge 0$, откуда $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Область интегрирования изображена на рисунке (дуга AC – это четверть единичной окружности с центром D). Площадь этой области равна разности площади квадрата и четверти площади единичного круга, т.е. $1 - \frac{\pi}{4}$.



б) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-\sqrt{1-y^2}} g(x, y)dx$.

в) $\int\limits_0^1 d\rho \int\limits_{\arccos\rho/2}^{\pi/2} \rho g(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\varphi + \int\limits_1^{\sqrt{2}} d\rho \int\limits_{\arccos\rho/2}^{\arcsin 1/\rho} \rho g(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\varphi$.

Ответ. а) $1 - \frac{\pi}{4}$, **б)** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-\sqrt{1-y^2}} g(x, y)dx$, **в)** $\int\limits_0^1 d\rho \int\limits_{\arccos\rho/2}^{\pi/2} \rho g(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\varphi + \int\limits_1^{\sqrt{2}} d\rho \int\limits_{\arccos\rho/2}^{\arcsin 1/\rho} \rho g(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\varphi$.

20. Найдите неопределённый интеграл $\int \frac{4x+1}{\cos^2 2x} dx$.

Решение. Интегрируя по частям, получаем

$$\int \frac{4x+1}{\cos^2 2x} dx = \frac{1}{2}\int (4x+1) d\,\mathrm{tg}\,2x = \frac{1}{2}(4x+1)\,\mathrm{tg}\,2x - 2\int \mathrm{tg}\,2x dx = \left(2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{tg}\,2x - \int \frac{2\sin 2x dx}{\cos 2x} = \left(2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{tg}\,2x + \int \frac{d\cos 2x}{\cos 2x} =$$
$$= \left(2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{tg}\,2x + \ln|\cos 2x| + C.$$

Ответ: $\left(2x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{tg}\,2x + \ln|\cos 2x| + C.$

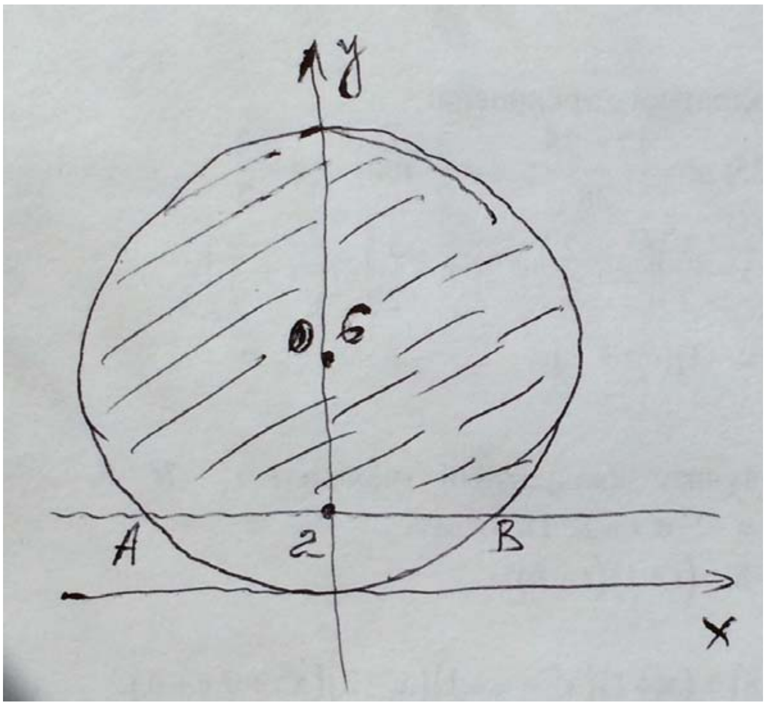
21. Вычислите $(i+1)^{239}$.

Решение. $(i+1)^{239} = \left(\sqrt{2}\exp\frac{i\pi}{4}\right)^{239} = \left(\sqrt{2}\right)^{239}\exp\frac{239 i\pi}{4} = \left(\sqrt{2}\right)^{239}\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) = 2^{119}\sqrt{2}\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2}} = 2^{119}(1-i).$

Ответ. $2^{119}(1-i)$.

22. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству $|z-6i| \le 6 \le 3\cdot \mathrm{Im}\,z$, и найдите площадь полученной фигуры.

Решение. Левой части неравенства удовлетворяют точки, лежащие в круге с центром $(0;6)$ радиуса 6 (граница круга включается), а правой части – точки, лежащие на прямой $y=2$ и выше неё. Площадь множества равна разности площадей круга и сегмента. Получаем $S = S_{круг} - S_{сектор\,OAB} + S_{\Delta OAB} = 36\pi - 36\arccos\frac{2}{3} + 8\sqrt{5}$.



Ответ. $36\pi - 36\arccos\frac{2}{3} + 8\sqrt{5}$.