Решение первого пробного тура.

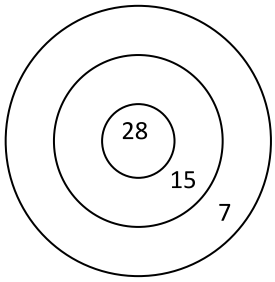
Задания по математике.

1. *(1 балл)* Сейчас отец старше сына в четыре раза, а через пять лет он будет старше сына только в три раза. Сколько лет сейчас отцу?

   Решение. Пусть сейчас сыну x лет, тогда отцу $4x$ лет. Через пять лет сыну будет $x + 5$ лет, а отцу будет $4x + 5$ лет. По условию $4x + 5 = 3(x + 5)$, т.е. $x = 10$, а $4x$ = 40.

   Ответ. отцу 40 лет.

2. *(2 балла)* Мишень для стрельбы из лука выглядит как показано на рисунке. За какое наименьшее количество выстрелов спортсмен может набрать ровно 105 очков?



   Решение. Предположим, что был по крайней мере один выстрел в 15. Тогда

$$105 = 7n + 15m + 28k,$$

   и т.к. 105, 7*n* и 28*k* делятся на 7, то и 15*m* также должно делиться на 7, следовательно, $m \geq 7$. Но если выстрелов в 15 не было, то достаточно ровно 6 выстрелов: $105 = 28 \cdot 3 + 7 \cdot 3$, и 6 - это очевидно наименьшее число выстрелов.

   Ответ. 6.

3. *(2 балла)* На факультете общей и прикладной физики (ФОПФ) средний балл абитуриентов равен 270, а на факультете аэрофизики и космических исследований (ФАКИ) 230. Сорок абитуриентов ФОПФ в последний момент перенесли заявления на ФАКИ. В результате средний балл на обоих факультетах вырос на 20 баллов. Сколько всего ребят подали документы на ФОПФ и на ФАКИ (общее количество)?

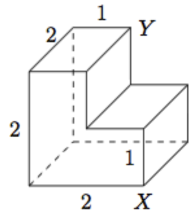
   Решение. Пусть изначально на ФОПФ подали документы x абитуриентов, а на ФАКИ – y. Посчитаем общее число абитуриентов вначале и в конце и приравняем эти величины, поскольку общее число абитуриентов не изменилось.

$$270x + 230y = 290 * (x - 40) + 250 * (y + 40),$$

   раскроем скобки и получим $20x + 20y = 1600$, т.е. $x + y = 80$.

   Ответ. 80

4. *(3 балла)* В вершине X деревянного многогранника сидит муха. Чему равен кратчайший путь мухи по поверхности из вершины X в вершину Y?



Решение. Рассмотрим развертку трех правых граней фигуры и соединим X и Y прямой линией. Длина полученного пути вычисляется как гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 2 и 3 и равна $\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

Ответ. $\sqrt{13}$

5. *(4 балла)* Через какое время после того, как часы показывали 5 часов ровно, минутная стрелка догонит часовую? (Стрелки движутся плавно, без скачков)?

   Решение. Минутная стрелка за 60 минут поворачивается на 360^0, т.е. ее скорость 6^0 в минуту, часовая стрелка за 60 минут поворачивается на 30^0, т.е. ее скорость 0.5^0 в минуту. Скорость сближения равна 6^0-0.5^0=5.5^0, а начальный угол между стрелками 150^0. Время, через которое минутная стрелка догонит часовую, равно 150/5.5=300/11.

   Ответ. 300/11.

Задания по физике.

1. *(1 балл)* Три бегуна участвуют в забеге на 400 м, располагаясь на соседних дорожках. Спортсмен, стартовавший по первой дорожке, финишировал первым через 56 с, бегун на третьей дорожке отстал от победителя на 2 с. Определите скорость бегуна на второй дорожке, если известно, что в момент финиша победителя все три бегуна располагались на одной прямой. Скорости бега спортсменов считать постоянными на всей дистанции.

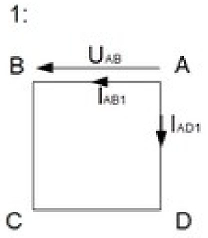
   Решение. По условию третий бегун потратит на 400 метров 56+2=58 секунд. Скорость третьего бегуна равна $\frac{400}{58}=\frac{200}{29}$ (м/с). В момент финиша победителя третьему останется добежать $2*\frac{200}{29}$ метров, а второму, соответственно, $\frac{200}{29}$ метров, т.е. за 56 секунд он уже пробежал $400-\frac{200}{29}$, значит его скорость равна $\frac{400-\frac{200}{29}}{56}\approx 7.02$ м/с.

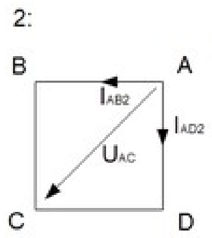
   Ответ. 7.02 м/с

2. *(2 балла)* Два маленьких, одинаковых по размеру заряженных проводящих шарика, находящихся на расстоянии l = 20 см, отталкиваются с силой F_1 = 3мН. После того как шарики были приведены в соприкосновение и затем разведены на прежнее расстояние, они стали отталкиваться с силой F_2 = 4мН. Во сколько раз отличаются начальные заряды шариков?

   Решение. Так как шарики одинаковые, то после соприкосновения их заряды будут одинаковыми по модулю. Т.к. шарики до соприкосновения отталкивались, то имели одноименные заряды; после соприкосновения отталкиваются, следовательно, заряды также одноименные. Потому в законе сохранения заряда: $q_1+q_2=2q$. Сила Кулона в первом случае $F_1=\frac{kq_1q_2}{l^2}=3\text{мН}$, а во втором случае $F_2=\frac{k(\frac{q_1+q_2}{2})^2}{l^2}=4\text{мН}$. Пусть $q_1=xq_2$, тогда $\frac{kxq_1{}^2}{l^2}=3$ и $\frac{k(\frac{q_1+xq_1}{2})^2}{l^2}=4$. Поделим одно из равенств на другое и получим квадратное уравнение на x: $3x^2-10x+3=0$, откуда $x=3$ или ${}^1\!/_3$.
   Ответ. В три раза.

3. *(3 балла)* Из проволоки постоянного поперечного сечения изготовлен квадрат *ABCD*. При подключении источника постоянного напряжения при помощи проводов с малым сопротивлением по сравнению с сопротивлением проволоки к соседним вершинам квадрата *A* и *B* полная сила тока в цепи равна 64 мА. Какой силы ток будет протекать по стороне *AD*, если тот же источник напряжения подключить к вершинам *A* и *C*?





Решение. Пусть R_{o1} – общее сопротивление в 1 случае, R_{o2}– общее сопротивление во 2 случае. $R_{ADC} = 3R_{AB}$;

$$R_{o1} = \frac{R_{AB} \cdot 3R_{AB}}{R_{AB}+3R_{AB}} = \frac{3}{4}R_{AB};$$

$$R_{o2} = \frac{2R_{AB} \cdot 2R_{AB}}{2R_{AB}+2R_{AB}} = R_{AB}.$$

$$\frac{I_{o1}}{I_{o2}} = \frac{R_{o1}}{R_{o2}} = \frac{3}{4}.$$

$I_{o1} = \frac{3}{4}I_{o2} = 48мА,\ \ I_{AB2} = I_{AD2}, I_{AB2} = \frac{1}{2}I_{o2} = 24мА$

Ответ. $24мА$

4. *(3 балла)* На дне сосуда с вертикальными стенками лежит сплошной стальной куб с ребром 8 см. В сосуд наливают 400 г воды. Определите уровень воды в сосуде. На сколько изменится уровень при удалении куба? Площадь квадратного дна сосуда *S* = 100 см^2. Уровень воды не доходит до верхнего края сосуда.

Решение. Объём залитой в стакан воды составляет 400 см^3 . Для заполнения стакана водой до верхней грани куба необходим объём воды

$$V_1 = (100см^2 - 64см^2) \cdot 8см = 288см^3 < 400см^3.$$

Следовательно, уровень воды в стакане будет находиться выше верхней грани куба. Расстояние от верхней грани куба до уровня воды равно:

$$h = \frac{112см^3}{100см^2} = 1{,}12см = 11{,}2мм.$$

Таким образом, уровень воды в стакане составит 91,2 мм . При удалении куба уровень станет равным 4 см = 40 мм , т. е. опустится на 51,2 мм .

Ответ. 51,2 мм .

5. *(3 балла)* Определите наименьшую площадь плоской однородной льдины толщиной h = 50 мм, способной удержать на воде автомобиль массой M = 1.5 тонны. Поверхность льдины не заливается водой.

Решение. Запишем уравнение $\rho_{воды} hSg = \rho_{льда} hSg + Mg$, откуда $S = \frac{M}{h(\rho_{воды} - \rho_{льда})} = 30\ м^2$.

Ответ. $30\ м^2$

Задания по информатике.

1. *(1 балл)* Почтовый индекс в некоторой стране состоит из одной первой буквы (используется 26-символьный алфавит) и двух десятичных цифр, одновременно не равных нулю. Сколько различных индексов можно построить?

   Решение. Всего комбинаций из букв этого алфавита и двух десятичных цифр - 2600. Невозможными являются 26 комбинаций, которые оканчиваются на два нуля и начинаются с одной из 26 букв. 2600–26=2574.

   Ответ. 2574.

2. *(2 балла)* Для заданных целых A и B определить общее количество нечётных чисел, среди расположенных между A и B, включая и их.

   Решение. Сначала найдём разность между заданными числами. Очевидно, что количество нечётных чисел будет не менее, чем $[(|a - b| + 1)/2]$, так как между a и b $|a - b| + 1$ число, из них не менее $[(|a - b| + 1)/2]$ нечётных.

   Дополнительное нечётное число появляется, если $|a - b|$ чётно, а a — нечётно (например, как в случае $a = 1$ и $b = 3$). Проверяем, верны ли эти условия; в случае необходимости увеличиваем ответ на 1.
   При реализации может возникнуть следующий технический момент: для проверки чётности a безопаснее сравнивать остаток от деления на два с нулём: некоторые языки программирования (в частности, C/C++) при взятии отрицательного числа по модулю положительного дают отрицательный остаток.

3. *(3 балла)* Вам заданы несколько дат в формате dd/mm/yyyy. В первой строке входа содержится одно целое число N — количество дат ($1 \le N \le 100$). Каждая из последующих N строк содержит даты в формате dd/mm/yyyy. Все даты корректны, номер года — целое положительное число, меньшее 10^4. Выведите даты в порядке возрастания в формате “yyyy/mm/dd” по одной на строку.

   Решение. Всего Задача про даты - чисто техническая: нужно считать даты в формате “%d/%d/%d” и отсортировать их.
   Самый удобный вариант - воспользоваться библиотечной функцией qsort() и написать для неё компаратор, который сравнивает сначала год, затем месяц, затем день. Впрочем, ограничения задачи позволяли отсортировать любым удобным участнику образом, в том числе за $O(N^2)$. Далее вывод делается с форматом “%04d/%02d/%02d” (заполнять нулями до 2 или 4 цифр соответственно).
   Обратите внимание, что порядок частей даты во вводе и выводе разный!

4. *(3 балла)* На острове Буяне жили N человек, каждый из которых был либо рыцарем, либо лжецом. Все они встали в круг. Рыцари говорят только правду, лжецы всегда только лгут. Каждому человеку в кругу задали вопрос: «Кто ты и кто твой сосед слева: рыцарь или лжец?». При этом каждый человек сказал, что он — рыцарь. А ответы всех людей о левом соседе были записаны в следующем формате: ответ «он рыцарь» обозначался за 1, ответ «он лжец» — за 0.
   Все ответы были записаны в строку через пробел в порядке опроса (совпадающем с порядком обхода). Последний спрошенный человек отвечал на вопрос о первом.
   Написать программу, которая по ответам жителей определяет, какое количество рыцарей заведомо присутствует в круге.

Решение. Задача о рыцарях и лжецах — переборная. К счастью, перебор можно ограничить всего лишь двумя вариантами: первый человек — рыцарь или лжец? Предположив один из двух вариантов, можно однозначно вычислить, рыцарь или лжец следующий (так как человек с известным статусом сказал про человека слева) и так далее по индукции до первого. В процессе индукции можно считать, сколько у нас рыцарей. Когда по индукции выяснен статус первого жителя, проверяем, соответствует ли он нашему предположению. Если же соответствующих вариантов 2, то выбираем тот, в котором меньше рыцарей (то есть заведомо присутствует столько-то, а может быть, есть и больше).

5. *(3 балла)* В деревне Горелово произошел пожар! Добровольцы из деревни Тушилово с криками «Зальём Огонь Шайками!» уже спешат на помощь. Однако для того, чтобы тушить пожар, шаек (или других ёмкостей) недостаточно — нужна также и вода. Набрать её можно только лишь в близлежащей речке Абсциссе. К счастью, речка абсолютно прямая, а берега ее пологие, так что набрать воды можно в произвольном месте Абсциссы. Какое же минимальное расстояние придется пробежать добровольцам, чтобы добраться от Тушилово (точка на плоскости с координатами x_a, y_a) до Горелово (x_b, y_b), набрав по пути воды в речке Абсциссе (прямая $y = 0$)? Помогите им!

Решение. Рассмотрим деревню Зеркалово, которая находится симметрично деревне Горелово относительно речки Абсциссы (то есть имеет координаты (x_2, $-y_2$). Пусть O — точка забора воды. Так как Горелово (G) и Зеркалово (Z) по построению находятся на одном и том же расстоянии от Абсциссы, то у треугольника OGZ высота, проведённая из точки O, делит отрезок GZ пополам. Соответственно, треугольник OGZ является равнобедренным и OZ = OG. Таким образом, достаточно найти кратчайшую траекторию между Тушилово и Зеркалово; очевидно, что этой траекторией является отрезок прямой, соединяющей Тушилово и Зеркалово (так как соответствующие точки находятся в разных полуплоскостях, то отрезок обязательно пересечёт речку). Таким образом, необходимо вычислить квадрат расстояния между точками (x_1, y_1) и (x_2, $-y_2$). Из теоремы Пифагора получаем, что искомое расстояние равно $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$.

Учитывая ограничения на координаты, ответ не превосходит 8 · 1018; таким образом, вычисления можно производить в 64-битных целых (тип int64 в Паскале или long long int в C/C++), после чего вывести ответ и строку, состоящую из десятичной точки и двадцати нулей.

Попытки решения задачи с помощью вещественной арифметики к успеху не привели, так как накапливающаяся при вычислениях и выводе погрешность исключает точный вывод двадцати нулей. Ещё одной распространённой ошибкой было использование 32-битных целых вместо 64-битных.