

МЕЖВУЗОВСКИЙ ЦЕНТР ВОСПИТАНИЯ И РАЗВИТИЯ  
ТАЛАНТЛИВОЙ МОЛОДЕЖИ  
В ОБЛАСТИ ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК  
«ФИЗТЕХ-ЦЕНТР»

## Олимпиады и семинары.



ЛЕТНЯЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ ШКОЛА  
«ФИЗТЕХ.СНГ»

2015 г.

Уважаемый участник летней школы «Физтех.СНГ»!

Преподаватели и студенты МФТИ подготовили для Вас сборник методических материалов для подготовки к предстоящим конкурсам и олимпиадам. Данное методическое пособие представляет собой набор задач и материалов, использованных при составлении учебной программы летней школы. В его основу легли семинары, лекционные материалы, курсы по выбору, задания регаты и вступительного теста. Коллектив составителей сборника выражает благодарность всем участникам летней школы. Будем рады видеть Вас в МФТИ — ведущем техническом вузе России и стран СНГ.

Удачи во всех начинаниях!

Искренне Ваши,

«Физтех-Центр», а также преподавательский состав Летней Международной Школы «Физтех.СНГ»: Белов А. А., Бельков П. Д., Богданов А. Д., Быхун А. В., Вовченко И. В., Елсуков В. М., Лангерус К. Ф., Мелентьев А. В., Оксамытный Ю. В., Останин П. А., Сушко В. А., Тараксевич М. А., Ягодкин Д. И.

# Содержание

<b>Олимпиады</b>	<b>4</b>
Олимпиада по математике (9 класс) . . . . .	4
Олимпиада по математике (10 класс) . . . . .	6
Олимпиада по физике (9 класс) . . . . .	8
Олимпиада по физике (10 класс) . . . . .	11
<b>Физико-математическая регата</b>	<b>15</b>
<b>Курсы по выбору и семинары</b>	<b>23</b>
Курс по выбору «Олимпиадная математика» . . . . .	24
Геометрия масс . . . . .	24
Движения . . . . .	26
Индукция . . . . .	29
Комбинаторика . . . . .	31
Вычисление сумм . . . . .	32
Производящие функции . . . . .	35
Семинар по геометрии . . . . .	39
Семинар по делимости и уравнениям в целых числах . .	40
Делимость . . . . .	40
Уравнения в целых числах . . . . .	42
Курс по выбору «Астрономия» . . . . .	43
Курс по выбору «Начала математического анализа» . .	46
Вычисление пределов . . . . .	46
Вычисление производных . . . . .	48
Вычисление интегралов . . . . .	49
Курс по выбору «Математические методы физики» . .	51
Физика как наука . . . . .	51
Погрешность . . . . .	52
Границы применимости . . . . .	52
Решение задач . . . . .	53
Теоретическая механика . . . . .	53

# Олимпиады

## Олимпиада по математике (9 класс).

**M1.** Решить уравнение на множестве действительных чисел  $x^2 + 2[x] + 3 = 0$ , где  $[.]$  — операция взятия целой части (наименьшее целое, не превосходящее аргумента).

*Решение.* Для  $[.]$  справедлива оценка:  $[x] \geq x - 1$ . Далее,  $x^2 + 2[x] + 3 \geq x^2 + 2(x-1) + 3 = (x+1)^2$ . Значит, единственный возможный корень — единица. Проверяем:  $(-1)^2 - 2 + 3 = 2 \neq 0$ ,  $\Rightarrow x = 1$  не подходит. Значит, решений нет.

**M2.** Про последовательность вещественных чисел известно, что начиная с третьего члена ее  $n$ -й член равен разности  $(n-1)$ -ого и  $(n-2)$ -ого. Доказать, что она периодична.

*Решение.* Пусть  $a, b$  — первые члены последовательности. Выпишем еще несколько первых членов:  $a, b, b-a, -a, -b, -b+a, a, b, \dots$ . Первые 2 члена повторились. Значит, последовательность действительно периодична.

**M3.** Решить уравнение  $x^2 + 8x = y^2$  в натуральных числах.

*Решение.* Дополним до полного квадрата в левой части:  $(x+4)^2 = y^2 + 16$ . Два квадрата отличаются на 16. Ясно, что расстояние между двумя соседними квадратами неограниченно увеличивается, так как  $(x+1)^2 - x^2 = 2x+1$  неограниченно растёт. Значит, начиная с  $x_0$  такого, что  $2x_0 + 1 > 16$ , расстояние между двумя соседними квадратами превысит 16. При  $x > x_0$  решения не будет. В данном случае можно положить  $x_0 = 8$ . Осталось перебрать значения  $x$  от 1 до 8: подойдет только  $x = 1$ . Значит, ответ — пара  $(1, 3)$ .

**M4.** Для выполнения специальных задач был спроектирован робот-червь с лестничным типом нервной системы. В такой нервной системе электрический импульс распространяется в направлении от

головы к хвосту и на каждой «ступеньке лестницы» может либо продолжить движение к хвосту, либо перейти на противоположную сторону (по перемычке, перпендикулярной направлению распространения) и продолжить распространяться в направлении к хвосту.



Импульс не движется в обратную сторону. Подсчитать, сколькими способами такой импульс может дойти от головы червя длины  $L$  до его хвоста, если на единице длины хвоста имеется  $m$  перемычек. Пример одного из таких способов см. на рисунке ниже:



*Решение.* Количество перемычек во всем черве:  $M = L \cdot m$ . На каждой ступеньке-ячейке можно выбрать один из двух возможных путей. Такой выбор нужно осуществлять  $M$  раз. Значит, общее число путей —  $2^M = 2^{Lm}$ .

*Замечание.* Ответ  $2^{Lm+1}$  также засчитывался за правильный, если в решении учитывалась самая первая перемычка.

**M5.** В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AC$  взята точка  $Z$ . Через нее провели прямые, параллельные медианам  $AP$  и  $CQ$ . Эти прямые пересекли стороны  $BC$  и  $AB$  соответственно в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что три части, на которые медианы  $AP$  и  $CQ$  разделили  $MN$ , равны.

*Решение.* Пусть  $E$  и  $F$  — точки пересечения отрезка  $MN$  с медианами  $AP$  и  $BQ$  соответственно, а  $X$  — точка пересечения отрезка  $ZM$  с медианой  $CQ$ . Если  $G$  — точка пересечения медиан треугольника, то  $GP = \frac{1}{3}AP$ , а так как  $ZM \parallel AP$ , то  $XM = \frac{1}{3}ZM$ . Из подобия треугольников  $\triangle XMF$  и  $\triangle ZMN$  ( $XF \parallel ZN$ ) следует, что  $MF = \frac{1}{3}MN$ . Аналогично,  $NE = \frac{1}{3}MN$ .

## Олимпиада по математике (10 класс).

**M1.** Решите на множестве действительных чисел уравнение  $x^2 - x + 1 + \arctg(x) = 0$ .

*Решение.* Обозначим  $g(x) = x^2 - x + 1 + \arctg(x)$ . Исследуем функцию  $f(x) = x^2 - x + 1$ . Дискриминант  $D = -3 < 0 \Rightarrow$  нулей нет,  $a > 0 \Rightarrow$  ветви параболы направлены вверх. Значит,  $f(x) > 0$ , откуда при  $x \geq 0$  получаем  $g(x) > 0$ .

Далее,  $f(x) > f(0) = 1$  при  $-\frac{\pi}{4} < x < 0$ , так как вершина параболы расположена в положительной части оси абсцисс. Кроме того,  $\arctg(x) < -1$  при  $x < -\frac{\pi}{4}$ . На этом участке корней тоже нет.

Осталось рассмотреть случай  $x < -\frac{\pi}{4}$ . Возьмем  $x = -\frac{3}{4}$  (это число на оси абсцисс лежит правее, чем  $-\frac{\pi}{4}$ ):  $2 < \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} + 1 = \frac{37}{16} < f(x)$ . Но  $\arctg(x) \geq -\frac{\pi}{2} > -2$ . Значит, уравнение вообще не имеет корней.

**M2.** Докажите, что  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  и  $\sqrt{5}$  не являются членами одной арифметической прогрессии.

*Решение.* Докажем от противного. Пусть  $r$  — разность прогрессии. Тогда  $\sqrt{3} = \sqrt{2} + m \cdot r$  и  $\sqrt{5} = \sqrt{2} + n \cdot r$ , откуда получаем  $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{n}{m} = z$  — рациональное число. Обе части второго равенства положительны, приведем его к общему знаменателю, возведем в квадрат и приведем подобные. Получим:  $2(z^2\sqrt{6} - \sqrt{10}) = a$ ,  $a \in \mathbb{Q}$ . Возведем еще раз в квадрат:  $b \cdot \sqrt{60} = f$ , где  $b$  и  $f$  рациональны,  $\Rightarrow \sqrt{60}$  рационален — противоречие.

**M3.** Центр описанной окружности  $\triangle ABC$  отразили симметрично относительно его сторон. Образы точки  $O$  при симметрии относительно  $BC, AC, AB$  — точки  $A_1, B_1, C_1$  соответственно. Докажите, что  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

*Решение.* Пусть центр окружности —  $O$ . Обозначим пересечения  $AB \cap C_1O = C_2$ ,  $A \cap B_1O = B_2$ ,  $BC \cap A_1O = A_2$ . Ясно, что эти

точки — середины сторон треугольника  $ABC$ . Они также являются серединами отрезков  $A_1O, B_1O, C_1O$  по определению осевой симметрии. Тогда  $C_2B_2 \parallel BC \parallel C_1B_1$  и  $C_2B_2 = \frac{BC}{2} = \frac{B_1C_1}{2}$  по свойству средней линии. Аналогично для двух других пар сторон. Значит, треугольники равны по трем сторонам.

**М4.** Найдите сумму  $1 + q + 2q^2 + 3q^3 + \dots$ , если  $0 < q < 1$ .

*Первое решение.* Искомая сумма  $S = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + \dots$ . Домножим на  $q$ :  $qS = q + q^2 + 2q^3 + 3q^4 + \dots$ . Вычтем и прибавим  $q$ :  $S - qS + q = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}$  (бесконечно убывающая

геометрическая прогрессия). Выразим результат:  $S = \frac{1 - q + q^2}{(1 - q)^2}$ .

*Второе решение.* Искомая сумма  $S = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + \dots = (1 + q + q^2 + \dots) + (q^2 + q^3 + \dots) + (q^3 + q^4 + \dots) + \dots$ . Вынесем из каждой скобки первое слагаемое в ней:  $S = (1 + q + q^2 + \dots) + q^2(1 + q + q^2 + \dots) + q^3(1 + q + q^2 + \dots) + \dots = (1 + q + q^2 + \dots)(1 + q^2 + q^3 + \dots)$ . В каждой скобке осталась одна и та же бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Запишем ее для удобства в квадратных скобках:

$$S = \left[ \frac{1}{1-q} \right] \left( \frac{1}{1-q} - q \right).$$

Результат совпадает с результатом первого решения.

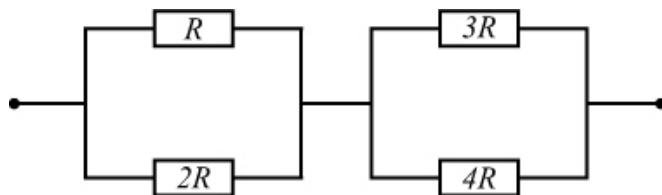
**М5.** Рассмотрим функцию натурального аргумента  $f(n)$ , не обращающуюся в 0 ни при каком значении аргумента. Про нее известно, что  $f(n+2f(n)) = f(n)$ . Докажите, что если эта функция принимает хотя бы одно значение, отличное от  $\frac{1}{2}$ , то значение  $\frac{1}{2}$  она принимать уже не может.

*Решение.* Пусть при некотором  $n = k$  функция принимает значение  $\frac{1}{2}$ . Тогда  $f(k + 2\frac{1}{2}) = f(k + 1) = f(k) = \frac{1}{2}$ . Все последующие значения равны  $\frac{1}{2}$ . Однако, если при некотором  $n = l$  будет

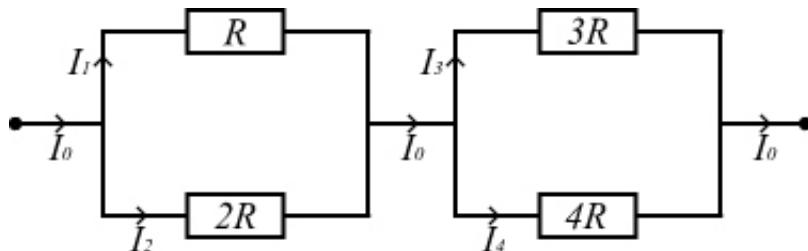
$f(l+2f(l)) \neq \frac{1}{2}$ , то с периодом  $2f(l) \neq 1$  это значение будет повторяться (имеется в виду, что значение функции равно  $k$  или  $\frac{k}{2}$  при некотором натуральном  $k$ , иначе аргумент не будет натуральным числом). Это противоречит тому, что начиная с некоторого момента все значения равны  $\frac{1}{2}$ .

## Олимпиада по физике (9 класс)

**Ф1.** Цепь, изображенная на рисунке, подключена к сети с постоянным напряжением. Известно, что мощность, выделяющаяся на резисторе с сопротивлением  $R = 25$  Ом, равна  $P_R = 64$  Вт. Найдите ток, протекающий через резистор с сопротивлением  $2R$ , и мощность, выделяющуюся на резисторе с сопротивлением  $4R$ .



*Решение.* Предположим, что токи в цепи текут так, как показано на рисунке.



Так как резисторы  $R$  и  $2R$  соединены параллельно, то  $U_1 = U_2$  и  $I_0 = I_1 + I_2$ . Мы знаем, что  $P_R = U_1 \cdot I_1 = I_1^2 \cdot R$ ,  $\Rightarrow I_1 =$

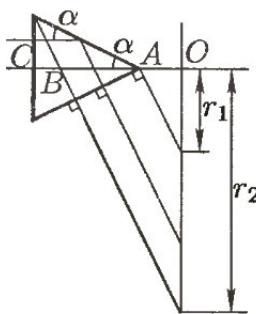
$$= \sqrt{\frac{P_R}{R}} = \sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{8}{5} \text{ А. Из } U_1 = U_2 \text{ получаем, что } I_1 \cdot R = I_2 \cdot 2R,$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{I_1}{2} = \frac{4}{5} \text{ А. Тогда } I_0 = I_1 + I_2 = \frac{8}{5} + \frac{4}{5} = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ А.}$$

Так как резисторы  $3R$  и  $4R$  соединены параллельно, то  $U_3 = U_4$  и  $I_0 = I_3 + I_4$ . Из  $U_3 = U_4$  получаем, что  $I_3 \cdot 3R = I_4 \cdot 4R$ ,  $\Rightarrow I_3 = \frac{4}{3}I_4$ .

$$\text{Тогда } I_0 = I_3 + I_4 = \frac{4}{3}I_4 + I_4 = \frac{7}{3}I_4, \Rightarrow I_4 = \frac{3}{7}I_0 = \frac{36}{35} \text{ А. Значит, } P_{4R} = U_4 \cdot I_4 = I_4^2 \cdot 4R = \frac{36^2 \cdot 4 \cdot 25}{35^2} \approx 105,8 \text{ Вт.}$$

**Ф2.** Параллельный пучок света падает на основание конуса, изготовленного из материала с показателем преломления  $n = 1,4$ , вдоль его оси. Нормальное сечение пучка совпадает с основанием конуса, радиус которого  $R = 2$  см. Высота конуса  $H = 2\sqrt{3}$  см. Определите площадь светлого пятна на экране, перпендикулярном оси конуса и расположенным на расстоянии  $L = 2$  см от вершины конуса.



*Решение.* Угол падения на грань конуса равен  $60^\circ$ , так как  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{H} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Этот угол больше угла полного внутреннего отражения:  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87 > \frac{1}{n} \approx 0,71$ . Значит, все лучи отразятся полностью. Тогда они упадут на противоположную грань под углом  $90^\circ$ , то есть пройдут ее, не преломившись. На экране образуется светлое пятно в виде кольца, внутренний радиус которого  $r_1 = 2\sqrt{3}$  см, а внешний —  $r_2 = (AO + (AC - CB)) \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \left(2 + 2\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt{3} =$

$$= 2\sqrt{3} + 6 - 2 = 4 + 2\sqrt{3} \text{ см. Тогда площадь пятна } S = \pi(r_2^2 - r_1^2) = \pi(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = \pi(4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3})(4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = 16\pi(1 + \sqrt{3}) \text{ см}^2.$$

**Ф3.** Однородный алюминиевый шарик с воздушной полостью плавает в жидкости. Объем погруженной части шарика в 1,5 раза больше объема непогруженной части. Плотность жидкости в 1,2 раза больше плотности алюминия. Какую часть объема шарика занимает полость?

Теперь представим, что плотность жидкости можно изменять так, чтобы она в  $k$  раз отличалась от плотности алюминия. Определите, при каком  $k$  шарик начнет тонуть.

*Решение.* Пусть  $V$  — объем алюминия, а  $V_0$  — объем полости, значит, объем всего шарика —  $V + V_0$ . Плотность алюминия обозначим  $\rho$ , тогда плотность жидкости  $1,2\rho$ . Объем погруженной части

найдём из условия:  $\frac{V_{\text{пог}}}{V + V_0 - V_{\text{пог}}} = 1,5, \Rightarrow V_{\text{пог}} = \frac{3}{4}(V + V_0)$ . Запишем первое условие равновесия (равнодействующая всех сил, действующих на шарик, равна  $\vec{0}$ ) в проекции на вертикальную

ось:  $1,2\rho g V_{\text{пог}} - \rho g V = 0, \Rightarrow 1,2V_{\text{пог}} = V, \Rightarrow \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4}(V + V_0) = V,$

$$\Rightarrow V = 9V_0. \text{ Откуда находим, что } \alpha = \frac{V_0}{V + V_0} = \frac{V_0}{9V_0 + V_0} = \frac{1}{10}.$$

Плотность алюминия обозначим  $\rho$ , тогда плотность жидкости  $k\rho$ . В момент, когда шарик начинает тонуть, объем погруженной части равен объему всего шарика:  $V_{\text{пог}} = V + V_0$ . Шарик начнет тонуть, если сила Архимеда не будет превышать силу тяжести:  $k\rho g V_{\text{пог}} - \rho g V \leq 0, \Rightarrow k(V + V_0) \leq V, \Rightarrow k(9V_0 + V_0) \leq 9V_0, \Rightarrow k \leq \frac{9}{10}.$

**Ф4.** Кусочек сахара брошен со скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Вслед за ним по той же траектории летит пчела с постоянной по величине скоростью  $v_0$ . Найдите ускорение пчелы в верхней точке траектории.

*Решение.* Скорость кусочка сахара в верхней точке:  $v_1 = v_0 \cos \alpha$ .

Тогда радиус кривизны траектории в этой точке:  $\rho = \frac{v_1^2}{g} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$ .

Так как касательная компонента ускорения по условию отсутствует, ускорение пчелы в верхней точке траектории находим так:

$$a = \frac{v_0^2}{\rho} = \frac{g}{\cos^2 \alpha}.$$

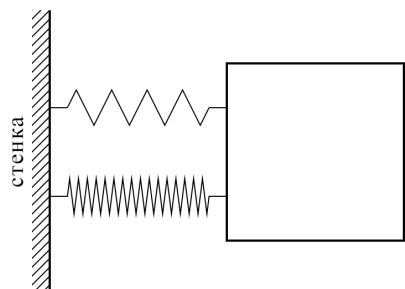
**Ф5.** Оценить массу атмосферы Земли.

*Решение.* Считаем Землю шаром, а атмосферное давление — постоянным по всей поверхности этого шара. На небольшой элемент поверхности Земли  $S$  действует сила  $P_A S$ . С другой стороны, она же равна  $mg$ , где  $m$  — масса части атмосферы над этим элементом. Суммируем по всей поверхности Земли: получим  $P_A \cdot 4\pi R_{\text{Земли}}^2 = Mg$ , откуда  $M = \frac{4\pi P_A R_{\text{Земли}}^2}{g}$ .

## Олимпиада по физике (10 класс)

**Ф1.** Брусок, прикрепленный к стенке двумя пружинами одинаковой жесткости, равной  $k$ , но разной длины (в нерастянутом состоянии), лежит на полу. В начальный момент первая пружина растянута на  $l$ , а другая — сжата на  $l$ . Брусок закреплен так, что его боковая грань параллельна стенке, а пружины перемещают его в направлении, перпендикулярном стенке, но не могут развернуть. а) Найдите период малых колебаний такой системы, учитывая, что трения в системе нет.

б) Пусть трение в системе есть и потери энергии за первое колебание составили  $A$ . Найдите амплитуду второго колебания, если первое происходило с амплитудой  $x_0$ .



*Решение а).* Второй закон Ньютона:  $m\ddot{x} + k(x - l) + k(x + l) = 0$ , откуда  $m\ddot{x} + 2kx = 0$ . Период колебаний  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$ .

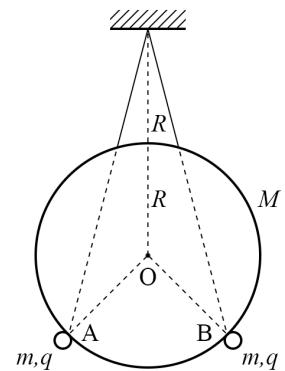
*Решение б).* Из закона сохранения энергии:  $\frac{k}{2}((x_0-l)^2+(x_0+l)^2) = A + \frac{k}{2}((x_1 - l)^2 + (x_1 + l)^2)$ , откуда  $x_1 = \sqrt{x_0^2 - \frac{A}{k}}$ .

**Ф2.** Последовательный  $RL$ -контур состоит из батареи, катушки индуктивности  $L_0$  и резистора  $R$ . В момент, когда ток в цепи был равен  $J_0$ , батарею отключают от контура, замыкая катушку на резистор. Начиная с этого же момента катушку медленно растягивают так, что в конце она вся оказывается вытянутой в прямой провод. Найдите заряд, который пройдет через резистор от момента отключения батареи до того, как катушка окажется полностью растянутой.

*Решение.* Запишем правило Кирхгофа для полученного контура:  $JR + \frac{d}{dt}[JL] = 0$ . Протекший заряд равен  $q = \int_0^{+\infty} J dt$ . Подставим

$J$  из закона Кирхгофа:  $q = -\frac{1}{R} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}[JL] dt = \frac{J_0 L_0}{R}$ , так как в конце  $J = 0$ .

**Ф3.** Два заряженных зарядами  $+q$  и  $-q$  маленьких шарика массы  $m$  подвешены за одну точку подвеса на одинаковых тонких нитях. До того, как шарики соприкоснулись, сверху на них положили большой непроводящий гладкий шар массы  $M = \frac{3\sqrt{2} + 2}{2\sqrt{2} - 1}m$  и радиуса  $R$ . Шар оказался в положении равновесия, а шарики разошлись так, что угол между направлениями на них из центра большого шара ( $\angle AOB$ ) стал равен  $90^\circ$ . Маленькие шариков, центр большого шара и точка подвеса лежат в одной плоскости. Расстояние от точки подвеса до центра шара —  $2R$ . Найдите заряды шариков, необходимые для создания такого



положения равновесия.

Указание: считать, что из шара вырезан очень тонкий диаметральный слой, в который поместились нити. Именно поэтому нити нарисованы «насквозь» шара, а не по периметру. При расчетах эту неоднородность шара можно не учитывать.

*Решение.* Со стороны шара на шарики действует по силе  $N$ , направленной радиально от центра шара. Силу  $N$  находим из того, что шар находится в равновесии:  $2N \cos 45^\circ = Mg$ , откуда  $N = \frac{Mg}{\sqrt{2}}$ . Теперь запишем 2 закон Ньютона для маленького шарика

в проекциях на горизонтальную,  $T \sin \alpha + \frac{kq^2}{2R^2} = \frac{N}{\sqrt{2}}$ , и на вертикальную,  $T \cos \alpha = mg + \frac{N}{\sqrt{2}}$ , оси (здесь  $\alpha$  — угол нити с вертикалью).

Из геометрии находим, что  $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{2}-1}{7}$ . Выразив  $T \cos \alpha$

и  $T \sin \alpha$  и поделив второе на первое, получаем  $\tan \alpha = \frac{\frac{Mg}{2} - \frac{kq^2}{2R^2}}{\left(\frac{M}{2} + m\right)g}$ .

Получаем  $q^2 = \frac{2R^2 g}{k} \left[ \frac{M}{2} - \left( \frac{M}{2} + m \right) \frac{2\sqrt{2}-1}{7} \right] = \frac{2mgR^2}{k}$ .

**Ф4.** В сосуд, на дне которого лежит твердый однородный шарик с малой плотностью, накачивают воздух при постоянной температуре  $T$ . После того, как давление стало равно  $P$ , шарик начал парить. Найдите массу шарика, если его радиус известен и равен  $a$ .

*Решение.* Шарик парит, если сила Архимеда, действующая на него, уравновешивает его вес. Отсюда получаем условие  $\rho_{\text{возд.}} = \rho_{\text{ш.}}$ . Осталось заметить, что  $\rho_{\text{ш.}} = \frac{P\mu}{RT}$ . Тогда масса шарика равна  $\frac{4}{3}\pi\rho_{\text{ш.}}a^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{P\mu}{RT}a^3$ .

**Ф5.** Собирающая линза имеет фокусное расстояние  $F = 15$  см. Экран расположен за линзой на расстоянии  $2F$ . Точечный источ-

ник, находящийся в плоскости, удаленной от линзы на 20 см, на расстоянии  $h = 2$  см от оптической оси, начинает двигаться по прямой по направлению к оптической оси (и пройдя оптическую ось не меняет своего направления и движется дальше). Какое расстояние нужно пройти источнику, чтобы центр того, что видно на экране, переместился на 5 см?

*Решение.* На экране было бы изображение источника, если бы источник находился на расстоянии  $2F$  от линзы. Так как источник находится на расстоянии  $\frac{4}{3}F$  от линзы, на экране будет видно пятно. Найдем координаты его крайних точек: луч, проходящий через оптический центр, пересекает экран на расстоянии  $\frac{3h}{2}$ , а луч, пущенный из источника параллельно оптической оси, за линзой пройдет через второй фокус и пересечет экран на расстоянии  $h$  от оси. Значит, размер пятна будет равен  $\frac{h}{2}$ , а расстояние от оси до ближайшего края пятна —  $h$ . Это значит, что смещение пятна на  $\frac{5h}{2} = 5$  см равносильно симметрии пятна на экране относительно центра (пересечения экрана и оптической оси). Но это означает, что и сам источник должен переместиться в точку, симметричную относительно оптической оси. Значит, ему нужно сместиться на 4 см.

## **Физико-математическая регата**

Одной из главных целей летней школы являлась подготовка ее участников к выступлению не только на индивидуальных олимпиадах, но и в командных соревнованиях. Умение прислушиваться друг к другу, вместе анализировать поставленную задачу, вести дискуссию, доказывать правильность своего мнения, помогать находить и исправлять неточности в решениях коллег и приходить к общему решению — одно из отличительных качеств студентов МФТИ. В следующей главе представлен подробный разбор физико-математической регаты, которая была проведена среди участников школы.

**1.** Назовем конечную последовательность подряд идущих натуральных чисел почти квадратной, если произведение этих чисел представимо в виде  $n^2 + 1$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Какова максимальная возможная длина почти квадратной последовательности такой, что любая ее подпоследовательность также является почти квадратной?

*Решение.* В данной постановке уже последовательность из двух членов не может быть почти квадратной: это значило бы, что оба члена последовательности (являющиеся подпоследовательностями из 1 члена) представимы в виде  $n^2 + 1$ , что невозможно.

Задача становится более содержательной, если не рассматривать подпоследовательности из 1 члена. Почти квадратная последовательность из 2 членов существует:  $a(a+1) = a^2 + a = 2 = 1^2 + 1$  при  $a = 1$ .

А для 3 членов уже не существует:  $a(a+1)(a+2) = a^3 + 3a^2 + 2a = (a+1)^3 - a - 1 = n^2 + 1$ .

$a \bmod 3$	$(a+1)^3 \bmod 3$	$(a+1)^3 - a - 2 \bmod 3$
0	1	2
1	2	2
2	0	2

Так как квадраты при делении на 3 не дают остатка 2, данное уравнение в натуральных числах не имеет решения.

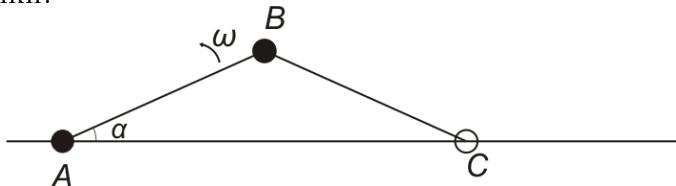
Большой длины быть не может, т. к. в таком случае последовательность большей длины содержала бы последовательность длины 3, что невозможно.

Оба решения оценивались полным баллом.

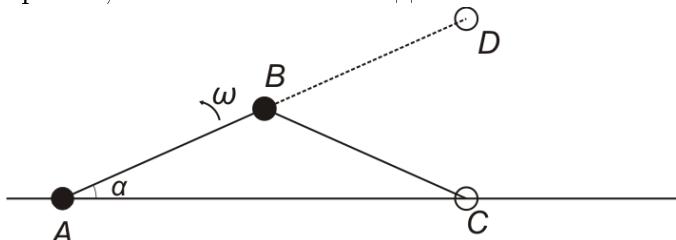
**2.** Дан треугольник  $ABC$  и три его внеписанные окружности. Точки касания со сторонами  $BC, AC, AB$  —  $A_1, B_1, C_1$  соответственно. Доказать, что  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в одной точке.

*Решение.* Отметим также точки  $A_2, B_2, C_2$  касания сторон треугольника с его вписанной окружностью. Точки  $A_1, B_1, C_1$  симметричны точкам  $A_2, B_2, C_2$  относительно середин сторон  $BC, AC, AB$  соответственно. Но для точек  $A_2, B_2, C_2$  выполнена теорема Чевы (соответствующее произведение трех отношений равно 1), так как  $AA_2, BB_2, CC_2$  пересекаются в одной точке (точке Жергонна). Значит, для точек  $A_1, B_1, C_1$  теорема Чевы также выполнена. следовательно, они пересекаются в одной точке.

3. Два стержня длины  $l$  соединены между собой шарниром  $B$ .  $C$  — бусинка, которая может скользить по оси. Левый стержень вращается со скоростью  $\omega$  вокруг точки  $A$ . Найти ускорение бусинки.



*Первое решение.* Бусинка имеет нулевую вертикальную составляющую ускорения и такую же горизонтальную составляющую ускорения, как и точка  $D$ . Тогда  $a = 2\omega^2 l \cos \alpha$ .



*Второе решение.*  $AC = 2l \cos \alpha = 2l \cos \omega t$ ;  $a = \frac{d^2}{dt^2} AC = 2\omega^2 l \cos \alpha$ .

4. Доказать, что при всех  $x, y, z > 0$  справедливо неравенство

$$9 \leqslant (x + y + z) \left( \frac{y}{x^2} + \frac{x}{z^2} + \frac{z}{y^2} \right).$$

*Решение.* Запишем неравенство о среднем геометрическом и гармоническом для чисел  $\frac{x^2}{y}, \frac{z^2}{x}, \frac{y^2}{z}$ :

$$\frac{\frac{3}{\frac{y}{x^2} + \frac{x}{z^2} + \frac{z}{y^2}}}{\frac{3}{x^2 + z^2 + y^2}} \leq \sqrt[3]{xyz}.$$

Запишем также неравенство между средним арифметическим и геометрическим для чисел  $x, y, z$ :

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}.$$

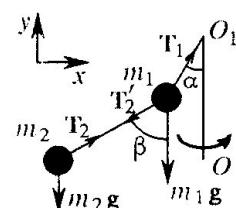
Из этих неравенств и получаем требуемое.

5. Ваня взял у деда 2 гири. На одной из них написана масса («3 кг»), а на другой — нет. Не долго думая, он связал их нитью между собой, а также привязал еще одну нить к первой гире. Затем Ваня взял другой конец этой нити в руки и начал крутиться вокруг своей оси. Помогите ему в процессе его вращения определить массу второй гири.

Указание: гири считать точечными массами. Длина нити, соединяющей гири, в  $\sqrt{3}$  больше нити, связывающей руки мальчика и первую гирю. Ваня вращается с постоянной угловой скоростью. Углы нитей с вертикалью он на глаз замерил сам: первая (та, что у него в руках) составляет с ней угол  $30^\circ$ , а вторая —  $60^\circ$ .

*Решение.* Пусть  $l$  — длина нити, связывающей шарик массы  $m_1$  с точкой  $O_1$ . Тогда по условию длина нити между шариками равна  $l\sqrt{3}$ . Силы указаны на рисунке. Законы Ньютона дают 4 уравнения:

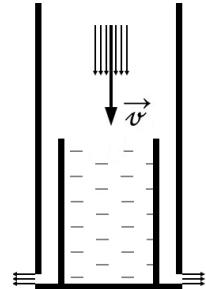
$$\begin{cases} T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta = m_1 g, \\ T_2 \cos \beta = m_2 g, \\ m_1 \omega^2 l \sin \alpha = T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \beta, \\ m_2 \omega^2 (l\sqrt{3} \sin \beta + l \sin \alpha) = T_2 \sin \beta. \end{cases}$$



Из этой системы находим  $\frac{m_2}{m_1} = 8$ .

**6.** Два соосных цилиндра радиусами  $R$  и  $R + \Delta R$  открыты сверху ( $\Delta R \ll R$ ). Высота внутреннего цилиндра  $h$ , внешнего — велика по сравнению с  $h$ . Во внутренний цилиндр по его оси подана вода струей радиуса  $r$  и скоростью  $v$ .

После того, как весь внутренний цилиндр заполнился, вода выливается через его край. Разность радиусов  $\Delta R$  оказалась такой, что вытекающая вода заполняет весь промежуток от  $R$  до  $R + \Delta R$  на высоте  $h$ . Внешний цилиндр имеет вырезанный у дна слой на стенке, из которого вода может вытекать. Его размеры подобраны так, что уровень воды остается постоянным, мало отличающимся от  $h$ . Оценить давление на дно внешнего цилиндра в слое от  $R$  до  $R + \Delta R$ . Считать, что у дна большого цилиндра вода не задерживается и вытекает сразу (скорость воды вблизи дна такова, как если бы она просто падала в поле тяжести). Вязкостью пренебречь.



$$\text{Решение. } P = \frac{F}{\Delta S} = \frac{\Delta p}{2\pi R \Delta R \Delta t} = \frac{\sqrt{2gh}\Delta m}{2\pi R \Delta R \Delta t} = \frac{\sqrt{2gh}\rho\Delta V}{2\pi R \Delta R \Delta t}.$$

Чтобы вода не поднималась выше уровня  $h$  (при условии, что она заполняет весь слой  $\Delta R$ ) необходимо, чтобы  $\Delta V$ , равное  $2\pi R \Delta R \Delta h$ , равнялось соответствующему поступающему объему воды  $\pi r^2 \Delta x$ .

$$\text{Подставляем: } P = \frac{\sqrt{2gh}\rho\pi r^2 \Delta x}{2\pi R \Delta R \Delta t} = \frac{\rho v r^2 \sqrt{2gh}}{2R \Delta R}.$$

**7.** В прямоугольнике  $ABCD$  сторона  $AD = 1$ , а  $AB = 3$ . Точки  $E$  и  $F$  делят  $CD$  на три равные части. Найдите сумму  $\angle DEA + \angle DFA + \angle DCA$ .

$$\text{Решение. } \text{Искомая сумма равна: } \arctg 1 + \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} +$$

$+\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}$ . Возьмем тангенс от последних двух слагаемых:  
 $\tg\left(\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$ . Значит, вся сумма равна  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ .

**8.** Назовем натуральное число несложным, если сумма его цифр — простое число. Докажите, что не существует бесконечной арифметической прогрессии с ненулевой разностью из несложных чисел.

*Решение.* Введем на натуральных числах функцию  $S(x)$ , равную сумме цифр числа  $x \in \mathbb{N}$ . Пусть нашлась такая бесконечная прогрессия. Тогда рассмотрим ее первый член —  $x_1 = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$  и разность прогрессии  $d$ . По условию,  $S(x_1) = p$  — простое число. Заметим следующее: через  $10^n$  членов в этой прогрессии встретится число  $x_2 = d \circ x_1$ , где  $\circ$  обозначает конкатенацию двух чисел как слов — приписывание  $d$  слева от  $x_1$ . Тогда  $S(x_2) = p + S(d)$ . Далее, очевидно, встретится  $x_3 = d \circ x_2$  и вообще  $x_n = d \circ x_{n-1}$ . Для этих чисел получаем  $S(x_n) = p + (n-1)S(d)$ . По условию, числа  $p + kS(d)$  простые при любом  $k$ . Очевидно, что так быть не может: при  $k = p$  число  $p(1 + S(d))$  делится на  $(1 + S(d))$ . Получили противоречие.

**9.** Шарик, висящий на пружине, совершает вертикальные колебания в направлении, перпендикулярном главной оптической оси линзы. Фокусное расстояние линзы  $F_1 = 20$  см. На экране (который можно перемещать) получено изображение шарика. Максимальная скорость изображения шарика оказалась в 2 раза больше максимальной скорости шарика. Найти фокусное расстояние рассеивающей линзы  $F_2$ , которую надо поместить вплотную к собирающей, чтобы максимальная скорость изображения стала в 6 раз больше максимальной скорости шарика.

*Решение.* Сначала было  $\Gamma_1 = 2$  и  $\frac{1}{d} + \frac{1}{\Gamma_1 d} = \frac{1}{F_1}$ , откуда  $d =$

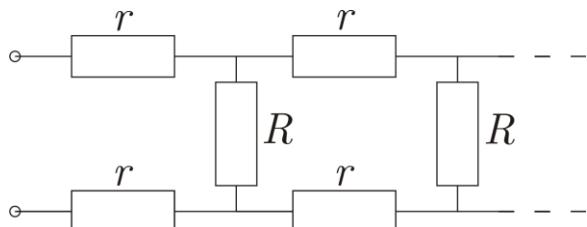
$$= F_1 \frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1}. \text{ Новое увеличение } \Gamma_2 = 6, \text{ откуда при учёте } \frac{1}{d} + \frac{1}{\Gamma_2 d} = \\ = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \text{ получаем } F_2 = F_1 \frac{(\Gamma_1 + 1)\Gamma_2}{\Gamma_1 - \Gamma_2} = -90 \text{ см.}$$

**10.** Найдите все  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такие, что  $f(f(f(n)))+f(f(n))+f(n) = 3n$ . Считать  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

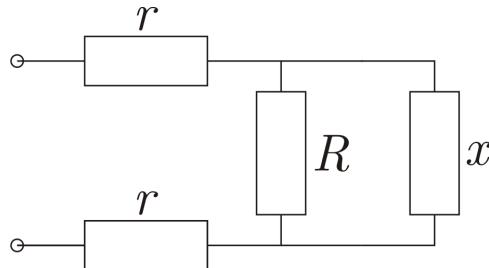
*Решение.* Обозначим  $g(n) = f(f(f(n)))+f(f(n))+f(n)$ . Очевидно, что  $f(1) = 1$ , так как каждое из трех слагаемых — хотя бы единица (значения  $f$  натуральны). Предположим, что  $f(n) = n$ . тогда  $g(n) = 3n$ . Докажем, что другого решения быть не может. Докажем, что если  $f(k) = k$  для любого  $k$ , не превосходящего некоторого натурального  $h$ , то  $f(h+1) = h+1$ . Пойдём от противного: предположим, что это не так. Тогда одно из трех слагаемых в левой сумме меньше  $h+1$ . Если это  $f(n+1)$ , то все остальные слагаемые также меньше, так как они определены, и равенство при их значениях не выполнено.

Теперь рассматриваем случай, когда  $f(f(n+1)) < h+1$ . При этом  $f(h+1) = k > h+1$ , иначе см. предыдущий пункт. Тогда получаем  $f(k) < h+1$ , а тогда  $f(f(f(k))) = f(f(k)) = f(k) < h+1$ . Тогда сумма  $f(f(f(k)))+f(f(k))+f(k) < 3h+3 < 3k$ , противоречие. Остался случай, когда  $f(f(f(n+1))) < h+1$ . При этом  $f(f(n+1)) = k > h+1$ , иначе см. предыдущий пункт. Тогда получаем  $f(k) < h+1$ . Далее аналогично предыдущему пункту.

**11.** Найдите сопротивление полубесконечной цепочки, изображенной на рисунке:



*Решение.* Пусть искомое сопротивление равно  $x$ . Тогда добавим к цепочке еще один элемент, сопротивление не изменится.



Следовательно,  $\frac{xR}{x+R} + 2r = x$ . Ответ:  $x = r + \sqrt{r^2 + 2Rr}$ .

**12.** В плоском воздушном конденсаторе одна из пластин испускает со своей поверхности электроны: с единицы площади в единицу времени вылетает  $n$  электронов с начальной скоростью  $v_0$ , направленной по нормали в сторону противоположной пластины. Через какое время после начала испускания заряд конденсатора перестанет изменяться? Пренебречь временем перемещения электрона от одной пластины до другой. Считать известными заряд и массу электрона. Конденсатор изначально не был заряжен.

*Решение.* Излучение электронов приводит к росту заряда конденсатора. Излучающая плоскость заряжается положительно, а противоположная — отрицательно. Рост заряда прекратится в тот момент, когда напряжение внутри будет достаточно большим, чтобы затормозить электроны: они не смогут достичь противоположной пластины. Это будет тогда, когда  $eU = \frac{mv_0^2}{2}$ . Далее

$U = \frac{q}{C}$ , где  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ . Заряд конденсатора  $q = q(t)$  растет со временем: каждый перелетающий электрон увеличивает заряд конденсатора на  $e$ . Так как каждый элемент площади  $S$  излучает  $ne$  в единицу времени,  $q = enSt$ . Получаем  $\frac{qe}{C} = \frac{enStd}{\epsilon_0 S} = \frac{mv_0^2}{2}$ , откуда  $t = \frac{\epsilon_0 mv_0^2}{2e^2 nd}$ .

# **Курсы по выбору и семинары**

В ходе летней школы преподавательский состав работал над универсальной программой для участников с разным уровнем подготовки.

Именно поэтому было принято решение особое внимание уделить заданиям, сравнимым по сложности с олимпиадами МФТИ и Перечня Олимпиад РФ. Однако этого было бы недостаточно для того, чтобы раскрыть творческий потенциал участников, поддержать их стремление к новым открытиям и познанию науки во всех ее проявлениях. Для расширения кругозора наших учеников были прочитаны дополнительные курсы по выбору: олимпиадные физика и математика, астрономия, а также начала математического анализа. Вашему вниманию предлагаются конспекты семинаров и курсов по выбору, которые позволяют Вам освежить знания, полученные на выбранном Вами курсе, а также ознакомиться с материалами остальных курсов.

## Курс по выбору «Олимпиадная математика».

**Геометрия масс: отношения отрезков, доказательство пересечения прямых в одной точке, подсчет площадей, теорема Чевы.**

**1.** Теорема (о медианах): доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины.

*Решение.* Размещаем в вершинах треугольника единичные точечные массы. Тогда центр масс каждой стороны находится в ее середине. Сгруппируем две какие-нибудь массы в их центре масс — середине соответствующего отрезка. Центр масс всей системы от этого не изменится. Так как остались всего две массы, расположенные на концах медианы — центр масс лежит на ней. Аналогично получаем, что центр масс лежит и на двух других медианах тоже. Значит, медианы пересекаются в этой точке — центре масс нашей системы. Требуемое отношение  $2 : 1$  получается из отношения масс после группировки: на концах медианы расположены массы 1 и 2.

**2.** Пусть  $A_1, B_1, \dots, F_1$  — середины сторон  $AB, BC, \dots, FA$  произвольного шестиугольника. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников  $\triangle A_1C_1E_1$  и  $\triangle B_1D_1F_1$  совпадают.

*Решение.* Размещаем во всех вершинах единичные массы. Группируем их попарно в середины  $A_1, C_1, E_1$  сторон  $AB, CD$  и  $EF$  соответственно. Тогда центр масс всей системы — точка пересечения медиан  $\triangle A_1C_1E_1$ . Аналогично группируя попарно массы в середины сторон  $BC, DE, FA$ , получим, что центр масс системы — точка пересечения медиан и другого треугольника. Центр масс единственен,  $\Rightarrow$  эти центры масс совпадают.

**3.** В треугольнике  $ABC$  проведены отрезки  $AA_1, BB_1$  ( $A_1$  на  $BC$ ,  $B_1$  на  $AC$ ), пересекающиеся в точке  $O$ . Отношения отрезков  $BA_1 : A_1C = 3 : 4$ ,  $AO : OA_1 = 1 : 2$ .

- 1) Найти отношения  $AB_1 : B_1C$  и  $BO : OB_1$ .
- 2) В треугольнике провели также прямую  $C_1$  (точка пересечения с  $AB = C_1$ ) так, что  $AC_1 : C_1B = 2 : 7$ . Доказать, что  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в одной точке  $O$ .
- 3) Найти отношение площадей  $S_{OBA_1} : S_{ABC}$ .

*Указание.* Разместить подходящим образом массы в вершины, сделав  $O$  центром масс. Для пункта 2 предположить, что  $CC_1$  не проходит через  $O$ . Провести  $CC_2$  через  $O$ , где  $C_2 \in AB$ . Сравнить отношения  $AC_1 : C_1B$  и  $AC_2 : C_2B$ .

4. В треугольнике  $ABC$   $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$ . Найти отношение, в котором делятся биссектрисы треугольника точкой их пересечения.

*Указание.* Воспользоваться теоремой о биссектрисе: если в треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AA_1$ , то  $BA_1 : A_1C = AB : AC$ . Это позволяет разместить в вершины треугольника массы, численно равные длинам сторон, так, что инцентр станет центром масс. Искомое отношение  $AI : IA_1 = \frac{b+c}{a}$ .

5. Теорема (о высотах тетраэдра — пространственный аналог теоремы о медианах треугольника): доказать, что все высоты правильного тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении  $3 : 1$ , считая от вершины.

*Указание.* Поместим в вершины тетраэдра по единичной точечной массе. Тогда центры масс граней находятся в их точках пересечения медиан. Тогда центр масс всей системы находится на высоте и делит его в отношении  $3 : 1$ , считая от вершины.

Это же рассуждение верно и для произвольного тетраэдра, только вместо высот нужно взять бимедианы — отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения биссектрис противолежащих граней.

**6.** Теорема Чевы: пусть точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат на прямых  $BC, CA, AB$   $\triangle ABC$ . Прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$

*Указание.* Доказать в качестве упражнения. В одну сторону: предположить, что прямые пересекаются в одной точке. Разместить массы в  $A$  и  $B$  так, чтобы в  $C_1$  был центр масс  $AB$ , а затем, используя массу в точке  $B$ , подобрать так массу  $C$ , чтобы в  $A_1$  находился центр масс  $AC$ . Искомое отношение следует из рассмотрения стороны  $BC$ , масс в точках  $B, C$  и отношения  $BA_1 : A_1C$ .

### **Движения и их применение при решении задач (поворот, параллельный перенос, симметрия).**

**1.** Противоположные вершины параллелограмма  $ABCD$  принадлежат прямым, содержащим противоположные стороны другого параллелограмма  $MNPQ$ . Доказать, что эти параллелограммы имеют общий центр.

*Решение.* Пусть центр  $ABCD = O$ . Сделаем симметрию  $Z_O$ . Тогда  $NP$  перейдет в  $N'P' \parallel NP \parallel MQ$  (по свойствам движений, параллельные прямые переходят в параллельные). Точка  $B$  переходит в  $D$ , лежащую и на  $MQ$ , и на  $N'P'$ . Значит, эти параллельные прямые имеют общую точку, а следовательно, совпадают. Параллелограмм  $MNPQ$  при преобразовании  $Z_O$  переходит в себя  $\Rightarrow O$  — и его центр тоже.

**2.** Через каждую из двух противоположных вершин параллелограмма проведены перпендикуляры к прямым, содержащим его стороны, не проходящие соответственно через эти вершины. Доказать, что основания этих перпендикуляров — вершины прямоугольника.

*Указание.* Рассмотреть возникающие при проведении перпендикуляров два прямоугольника. Согласно предыдущей задаче, их центры совпадают с центром исходного параллелограмма. При симметрии относительно центра исходного параллелограмма искомый четырехугольник переходит в себя, а значит, это параллелограмм. В нем также равны диагонали, что находится из равенства диагоналей в прямоугольниках, образованных высотами и отрезками сторон. Это и означает, что искомый четырехугольник — прямоугольник.

**3.** Продолжения боковых сторон  $AD$  и  $BC$  равнобедренной трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $S$ . Доказать, что окружности, описанные около  $\triangle ASC$ ,  $\triangle BDS$  пересекаются в центре окружности, описанной около данной трапеции.

*Указание.* Из симметрии сразу следует, что эти окружности пересекаются в точке  $O$  на оси трапеции. Остается получить равенство расстояний от этой точки до вершин трапеции. Оно следует из равенства соответствующих дуг в данных в условии окружностях и равнобедренности треугольников  $\triangle AOD$  и  $\triangle BOC$ .

**4.** В окружность вписаны два правильных  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A_1B_1C_1$ . Пусть  $A_2$  — точка пересечения  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $B_2$  — точка пересечения  $CA$  и  $C_1A_1$ ,  $C_2$  — точка пересечения  $AB$  и  $A_1B_1$ . Доказать, что  $\triangle A_2B_2C_2$  — правильный.

*Решение.* При повороте  $R_O^{60^\circ}$  относительно центра окружности  $O$  вся конструкция переходит в себя, а значит,  $\triangle A_2B_2C_2$  переходит в себя.

**5.** Точка  $B$  лежит между  $A$  и  $C$ . В полуплоскости с границей  $AB$  построены правильные треугольники  $ABM$  и  $BCP$ . Точки  $K$ ,  $E$  — середины  $AP$ ,  $MC$  соответственно. Доказать, что  $\triangle BKE$  — правильный.

*Решение.* При повороте  $R_B^{-60^\circ}$  отрезок  $AP$  переходит в  $MC$ , а значит, середина  $AP$  переходит в середину  $MC$ . Треугольник  $\triangle KBE$  — равнобедренный с углом  $60^\circ$ .

**6.** Точка Торричелли (точка Ферма): на сторонах остроугольного треугольника  $ABC$  извне построены равносторонние треугольники  $ABC_1, BCA_1, CAB_1$ . Доказать, что:

- 1) Отрезки  $AA_1, BB_1, CC_1$  равны, а угол между любыми двумя из них равен  $60^\circ$ .
- 2) Три окружности, описанные около равносторонних треугольников, пересекаются в некоторой точке  $O$ .
- 3) Прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  также пересекаются в точке  $O$ .
- 4) Все стороны треугольника  $ABC$  видны из точки  $O$  под равными углами.
- 5) Точка  $O$  является той точкой плоскости, для которой сумма расстояний до вершин треугольника  $ABC$  принимает наименьшее значение.

*Указание 1).* Сделать поворот  $R_B^{60^\circ}$ . Тогда отрезок  $CC_1$  переходит в  $A_1A$ . Получаем отсюда, что эти отрезки равны, а угол между прямыми  $AA_1$  и  $CC_1$  равен  $60^\circ$ . Пересечение в одной точке следует из пересечения в одной точке описанных окружностей треугольников  $\triangle ABC_1, \triangle BCA_1, \triangle CAB_1$  (а оно, в свою очередь, следует из углов  $60^\circ$ , полученных в первом пункте). Отсюда же следует и пункт 4).

*Указание 5).* Берем внутри треугольника точку  $M$ . Делаем поворот  $R_B^{60^\circ}$ . Точка  $M$  переходит в  $M'$ . Тогда  $AM + MB + MC = AM + MM' + M'A_1$ . Эта сумма минимальна тогда и только тогда, когда  $M$  и  $M'$  лежат на  $AA_1$  (кратчайшее расстояние между  $A$  и  $A_1$  — отрезок  $AA_1$ ). Аналогично, точка  $M$  должна лежать и на других двух отрезках.

## Индукция.

**1.**  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

*Решение.* База верна:  $1 \cdot 1! = 2! - 1$ . Переход: пусть для некоторого  $n$  равенство выполнено. Тогда добавим в обе части следующее слагаемое  $(n+1) \cdot (n+1)!$  и справа получим  $(n+1+1)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1$ .

**2.** Неравенство Бернулли:  $(1+x)^n \geq 1 + nx$  при  $x > -1$  и  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Решение.* База верна. Пусть для некоторого  $n$  выполнено. Тогда  $(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$ .

*Следствие:*  $2^n > n$ . Для доказательства достаточно положить  $x = 1$  в неравенстве Бернулли.

**3.** Определим последовательность слов (состоящих только из 0 и 1):  $f_0 = 1$ ,  $f_1 = 0$ , а  $f_{n+2} = f_{n+1}f_n$  при  $n \geq 0$  ( $n+2$  слово получается приписыванием слова  $f_n$  в конец слова  $f_{n+1}$ ). Доказать, что если у слова  $f_n$  удалить два последних символа, то получится палиндром.

*Решение.* Вспомогательное утверждение: все чётные слова заканчиваются на 01, а нечётные — на 10.

База:  $n = 1$ . Для  $f_2 = f_1f_0 = 01$  — верно, суффикс 01. Для  $f_3 = f_2f_1 = 010$  также верно, суффикс 10.

Переход: пусть  $f_{2k}$  имеет суффикс 01, а  $f_{2k+1}$  имеет суффикс 10 при некотором  $k$ . Тогда  $f_{2k+2} = f_{2k+1}f_{2k}$  имеет суффикс 01, так как  $f_{2k}$  имеет этот суффикс по предположению индукции, а любой суффикс  $f_{2k}$  является суффиксом  $f_{2k+2}$  (по построению нашего слова).

Аналогично,  $f_{2k+3} = f_{2k+2}f_{2k+1}$  имеет суффикс 10, т.к  $f_{2k+1}$  имеет этот суффикс по предположению индукции.

Теперь решим исходную задачу. Докажем по индукции:

База:  $n = 2$ :  $f_2 = 01$ , тогда  $f_2$  без последних двух букв — пустое слово — палиндром.

$n = 3$ :  $f_3 = 010$ , тогда  $f_3$  без последних двух букв — 0 — палиндром.

$n = 4$ :  $f_4 = 01001$ , тогда без последних 2 букв это 010 — палиндром.

Переход: Пусть утверждение верно для  $f_{k-3}$ ,  $f_{k-2}$  и  $f_{k-1}$ . Рассмотрим слово  $f_k = f_{k-1}f_{k-2} = f_{k-2}f_{k-3}f_{k-2}$ .

Обозначим  $ab$  любую из двух комбинаций 01 или 10. По предположению индукции слова  $f_{k-3}$ ,  $f_{k-2}$  имеют вид  $(pal_1)ab$  и  $(pal_2)ba$  соответственно (здесь  $(pal_1)$  и  $(pal_2)$  — разные палиндромы, а суффиксы  $ab$  и  $ba$  имеют такой вид в силу леммы, один из них — 01, а второй — 10).

Имеем 2 случая: в первом последние 2 символа слова  $f_{k-3}$  — это 01, а слова  $f_{k-2}$  — это 10. Тогда

$$f_k = (pal_2)10(pal_1)01(pal_2)10$$

без двух последних символов является палиндромом.

Во втором случае последние 2 символа слова  $f_{k-3}$  — это 10, а слова  $f_{k-2}$  — это 01. Тогда

$$f_k = (pal_2)01(pal_1)10(pal_2)01$$

без двух последних символов также является палиндромом.

**4.** Доказать, что любые 2 соседних числа Фибоначчи взаимно просты.

*Указание.* Показать с использованием рекуррентной формулы  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , что если бы два последовательных числа Фибоначчи имели общий делитель  $c$ , то его имели бы все числа Фибоначчи. Тогда и первое число Фибоначчи, равное 1, имело бы этот делитель. Значит,  $c = 1$ .

## Комбинаторика.

**1.** Сколько слов длины  $n$  существует в алфавите из  $m$  символов?

*Ответ:*  $m^n$ .

**2.** Если символы не могут повторяться?

*Ответ:*  $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$ .

**3.** А если к тому же первая буква —  $a$ ?

*Ответ:*  $A_{m-1}^{n-1}$ .

**4.** Сколько способов разбить  $2n$  человек на пары?

*Ответ:*  $\frac{C_{2n}^2 \cdot C_{2n-2}^2 \cdots C_2^2}{n!}$  (здесь числитель означает, что мы последовательно выбирали по одной паре, а знаменатель — что последовательность выбора пар не важна, так как делим на число перестановок  $n$  пар).

**5.** Сколько различных делителей у числа 100100?

*Ответ:*  $100100 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ , способов —  $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 72$ .

**6.** Имеется  $k$  коробок и  $n$  одинаковых шаров. Сколько способов разложить шары по коробкам, чтобы все коробки были непусты (формула шаров и перегородок)?

*Ответ:*  $C_{n-1}^{k-1}$  (для получения ответа нужно расставить  $n$  шаров в ряд и выбрать из  $n-1$  мест между ними  $k-1$  мест под  $k-1$  перегородок).

**7.** То же самое, но теперь коробки могут быть пусты.

*Ответ:*  $C_{n+k-1}^{k-1}$  (теперь нужно расставить  $m$  шаров и  $k-1$  перегородок между собой. Эквивалентная задача: из  $n+k-1$  объектов выбрать те  $k-1$ , которые будут перегородками).

**8.** Сколько натуральных решений имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n?$$

*Ответ:*  $C_{n-1}^{k-1}$  (использовать формулу шаров и перегородок).

**9.** Сколько натуральных решений имеет неравенство

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n?$$

*Решение.* Добавим  $x_{k+1} = n - x_1 - x_2 - \dots - x_k$ , свели к предыдущей задаче.

### Вычисление сумм.

При вычислении сумм в данном семинаре использована формула бинома Ньютона (в частном случае  $y = 1$ ):

$$\sum_{k=0}^n C_n^k x^k = (1+x)^n.$$

**1.** Вычислить сумму  $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$ , подставив в бином  $x = -1$ .

**2.** Вычислить сумму  $\sum_{k=0}^n k C_n^k$ , продифференцировав бином по  $x$  и подставив  $x = 1$ .

**3.** Вычислить  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k$ .

*Ответ:* эта сумма равна  $\int_0^x \sum_{k=0}^n C_n^k t^k dt = \int_0^x (1+t)^n dt = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}$  в точке  $x = 1$ .

4. Вычислить сумму  $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$ .

*Указание.* Рассмотреть вспомогательное произведение многочленов  $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ . Коэффициент при  $x^n$  в правой части равен  $C_{2n}^n$ , а в левой части  $\sum_{k=0}^n C_n^k C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$ .

5. Вычислить сумму  $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k^2$  с помощью двойного дифференцирования бинома и подстановки  $x = -1$ .

6. Вычислить  $\sum_{k=0}^{n/2} C_n^{2k}$ .

*Ответ:*  $\frac{1}{2}((1-x)^n + (1+x)^n)$  при  $x = 1$ .

7. Вычислить сумму  $\sum_{k=0}^n kx^k$ .

*Указание.* Использовать дифференцирование суммы геометрической прогрессии  $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ .

8. В некоторых случаях для суммы  $\sum_{k=a}^b g(n)$  удается подобрать такую функцию  $F(n)$ , что  $F(n+1) - F(n) = g(n)$ . В этом случае сумма «схлопывается» до двух слагаемых:  $\sum_{k=a}^b g(n) = F(b+1) - F(a)$ .

Функция  $F$  называется телескопией для функции  $g$  и является дискретным аналогом первообразной, а формула суммирования — дискретный аналог формулы Ньютона-Лейбница вычисления определенного интеграла.

*Пример:* сумма  $\sum_{k=a}^b \frac{1}{k(k+1)}$  является телескопической,  
 $F(k) = \frac{-1}{k}$ .

**9.** Вычислить сумму  $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ , применив комплексификацию.

*Указание.* Воспользуемся формулой Эйлера  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . Тогда наша сумма запишется в виде  $\operatorname{Re} \sum_{k=0}^n e^{ikx}$ . Далее  $e^{ix}$  заменяется на новую переменную  $z$  и сумма вычисляется по формуле суммы геометрической прогрессии.

**10.** Вычислить  $\sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx)$ .

*Указание.* Эта сумма после замены  $\cos(kx)$  на  $\operatorname{Re}(e^{ikx})$  представляет из себя бином Ньютона  $(1 + e^{ix})^n$ . Остается взять действительную часть. Это удобнее всего сделать, представив комплексное число  $1 + e^{ix}$  в показательной форме  $re^{i\varphi}$ .

Аналогично, с применением всего аппарата этого семинара вычисляются следующие суммы:  $\sum_{k=0}^n k C_n^k \cos(kx)$ ,  $\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k \cos(kx)$ ,  
 $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k} C_n^k \cos(kx)$ .

*Задачи для самостоятельного решения:*

**а)** Вычислить сумму  $\sum_{k=0}^n C_n^k 2^{n-k} \cos(kx + \varphi)$ .

б) Вычислить сумму  $\sum_{k=0}^n k^4$ .

в) Вычислить сумму  $\sum_{k=0}^n \sum_{t=0}^m \cos(ka - tb) k C_n^t$ , указав способ подсчёта. До замкнутой формы ответа допустимо не доводить.

## Производящие функции.

1. Найти производящую функцию последовательности  $a_k = C_n^k$  (считать, что при  $k > n$   $C_n^k = 0$ ).

*Решение.* Воспользуемся формулой бинома Ньютона и заметим, что  $(1+x)^n$  — производящая функция по определению.

2. Найти производящую функцию последовательности из единиц.

*Решение.* Сумма  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$  вычисляется по формуле бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а значит, искомая производящая функция —  $\frac{1}{1-x}$ .

3. Найти производящую функцию для чисел Фибоначчи  $Fib(x)$ .

*Решение.* Запишем рекуррент для чисел Фибоначчи:  $F_0 = F_1 = 1$ ,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  при  $n \geq 2$ . Домножим на  $x^n$  и просуммируем от 0 до  $\infty$ . Обозначим  $Fib(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ . Тогда после суммирования получим слева  $Fib(x) - F_0 - F_1 x$  (в сумме есть все слагаемые со второго, так как рекуррента записана для  $n \geq 2$ , поэтому добавим первые 2 слагаемых для получения  $Fib(x)$  и вычтем их). Справа получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n = x(Fib(x) - 1) + x^2 Fib(x).$$

Находим тогда  $Fib(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ . После разложения найденной  $Fib(x)$  в ряд Тейлора получаем

$$Fib(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Получаем формулу для  $n$ -го числа Фибоначчи:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

**4.** Определения чисел Каталана. Производящая функция для чисел Каталана  $Cat(x)$ .

Числа Каталана можно определять различными способами. В данной задаче будем использовать рекуррентное задание этих чисел:  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = C_1 C_1$ , а  $C_k = C_1 C_{k-1} + C_2 C_{k-2} + \dots + C_{k-1} C_1$  при  $k \geq 3$ .

Введем  $Cat(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ . Возведем в квадрат:

$$Cat^2(x) = C_1 C_1 x^2 + (C_1 C_2 + C_2 C_1) x^3 + (C_1 C_3 + C_2 C_2 + C_3 C_1) x^4 + \dots$$

Заметим, что  $Cat^2(x) = Cat(x) - x$ , откуда получаем искомую  $Cat(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ . Знак  $(-)$  выбран потому, что  $Cat(0) = 0$ . С помощью разложения  $Cat(x)$  в ряд Тейлора можно получить явную формулу  $C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ .

**5.** Найти производящую функцию для чисел Каталана с чётными номерами.

Ответ:  $\frac{Cat(x) + Cat(-x)}{2}$ .

## *Задачи для самостоятельного решения.*

Найти производящие функции для следующих последовательностей:

- а)**  $(1, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ , где единицы стоят через  $m$  нулей между ними;
- б)**  $a_n = n$ ;
- в)**  $a_n = 2^n$ ;
- г)**  $a_n = C_{3n}$ , где  $C_k$  —  $k$ -ое число Каталана.

А теперь решим следующую задачу с помощью производящих функций.

Пусть по горизонтальной оси  $t$  откладывается время, дискретно, по одной секунде. Каждую секунду мы шагаем по вертикальной оси либо вверх, либо вниз, ровно на единицу. Начинается путь из  $(0, 0)$ . Сколько есть таких путей, что за  $n$  секунд они ни разу не опустились ниже 0 и закончились тоже в некоторой неотрицательной точке?

*Решение.* Пусть  $f(n)$  — количество таких путей за  $n$  шагов. Тогда из каждого такого пути получаются два новых хороших ( $n + 1$  шаг либо вверх, либо вниз), кроме той ситуации, когда  $n$ -ый шаг закончился на 0. Пусть  $g(n)$  — количество таких путей, что они начались в  $(0, 0)$  и закончились в  $(n, 0)$ . Тогда получаем  $f(n) = 2f(n - 1) - g(n)$ . Осталось найти  $g(n)$  и решить рекуррент.

Для нечётных  $n$  имеем  $g(n) = 0$  (кол-во шагов вверх не может равняться кол-ву шагов вниз). Для чётных  $n = 2k$  имеем  $g(2k) = C_k$  (это можно получить следующим образом: всего путей из  $(0, 0)$  в  $(2k, 0)$  —  $C_{2k}^k$ , так как выбираем из всех шагов те, что вверх). Подсчитаем те, что опускались ниже 0. Очевидно, они пересекали прямую  $x = -1$ . Возьмем первую точку пересечения пути и  $x = -1$ , отразим весь путь после этой точки относительно  $x = -1$ ,

а до этой точки оставим тот, что был. Получим биекцию между путями из  $(0, 0)$  в  $(2k, 0)$  такими, что они опускались ниже 0, и всеми путями из  $(0, 0)$  в  $(2k, -2)$ . Их  $C_{2k}^{k-1}$  (выбираем те  $k-1$  путей, что вели вверх). Поэтому  $g(n) = 0$  на нечётных  $n$  и  $g(n) = C_{2k}^k - C_{2k}^{k-1}$  при  $n = 2k$ .

Остается решить рекуррент:  $f(n+1) = 2f(n) - g(n)$ . Домножаем на  $x^n + 1$  и суммируем до бесконечности по  $n$ :

$$f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)x^{n+1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} g(n)x^n + 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Обозначаем } F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n. \text{ Тогда } F(x) = 2xF(x) - x \sum_{n=0}^{\infty} g(n)x^n = \\ &= 2xF(x) - x \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{2n}. \end{aligned}$$

$$\text{Заметим, что } \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{2n} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{2x^2}.$$

Найдём  $F(x) = \frac{1}{2x} \left( \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}} - 1 \right)$ . Обозначаем  $2x = t$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \left( \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} - 1 \right) &= \frac{1}{t} ((1+t)(1-t^2)^{-1/2} - 1) = \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^k k!} (t^{2k-1} + t^{2k}). \end{aligned}$$

Выполняем обратную замену:

$$F(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2^k k!} (2^{2k-1}x^{2k-1} + 2^{2k}x^{2k}).$$

Окончательный ответ:  $f(0) = 1$ ,  $f(2k-1) = 2^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{k!}$ ,  $f(2k) = 2f(2k-1)$ .

## Семинар по геометрии.

- 1.** Через данную точку  $P$ , лежащую на данной окружности, и данную точку  $Q$ , лежащую на данной прямой и не совпадающую с  $P$  проводится произвольная окружность, пересекающая второй раз данную окружность в точке  $R$ , а данную прямую — в точке  $S$ . Доказать, что получаемые этим построением всевозможные прямые  $RS$  пересекаются в одной точке, лежащей на данной окружности.

*Указание.* Пусть данная окружность  $\Omega$ , а данная прямая  $l$ . Проведем какую-нибудь  $RS$ . Пусть  $RS$  пересекает  $\Omega$  в точке  $M$ . Через точку  $M$  проведем новую прямую  $S'R'$ , где  $S' \in l$ ,  $R' \in \Omega$ . Несложно увидеть, что следующие углы равны:  $\angle SQP = \angle SRP = \angle S'R'P$ , что и доказывает требуемое.

- 2 (МФТИ-1987 билет 1).** На гипotenузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $\triangle ABC$  выбраны точки  $K, L$  так, что  $AK = KL = LB$ . Найти углы  $\triangle ABC$ , если известно, что  $CK = \sqrt{2} \cdot CL$ .

*Указание.* Пожалуй, самое короткое решение — обозначить  $CL = x$ ,  $CK = \sqrt{2}x$ ,  $CB = a$ ,  $BL = y$  (на  $AB$  точки идут в порядке  $A, K, L, B$ ), а затем записать формулу медианы  $CL$  для  $\triangle CKB$ .

*Ответ:*  $\cos \angle CBA = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

- 3.** Дан треугольник  $\triangle ABC$ . На его сторонах  $AB$  и  $BC$  внешним образом построены квадраты  $ABKL$  и  $BCDF$ . Доказать, что прямая, содержащая медиану  $BM$  треугольника  $\triangle ABC$ , перпендикулярна  $KF$ .

*Решение.* Обозначим  $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$ ,  $\overrightarrow{FB} = \vec{d}$ ,  $\overrightarrow{BK} = \vec{c}$ . Тогда  $2\overrightarrow{BM} = \vec{d} + \vec{b}$ , а  $\overrightarrow{KF} = \vec{c} + \vec{d}$ . Осталось перемножить  $(\vec{d} + \vec{b})(\vec{c} + \vec{d})$  и учесть перпендикулярность пар векторов  $\vec{b}, \vec{c}$  и  $\vec{d}$ .

**4.** Теорема (об ортотреугольнике). Ортотреугольник  $\triangle A_1B_1C_1$  треугольника  $ABC$  — это треугольник, вершины которого — основания высот  $\triangle ABC$ . Доказать, что в ортотреугольнике высоты  $\triangle A_1B_1C_1$  — биссектрисы.

*Указание.* Идея решения основана на подобии  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$ . Тогда получаем равенство углов  $\angle CAB = \angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$ , откуда и следует, что  $AA_1$  — биссектриса  $\angle C_1A_1B_1$ .

**5.** Дан прямоугольный  $\triangle ABC$  с прямым углом  $C$ . Внеписанные окружности, касающиеся катетов  $AC$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$ , отсекают на них отрезки  $CE = 15$ ,  $CF = 3$ . Найти площадь треугольника  $\triangle ABC$ .

*Указание.* Воспользоваться формулой площади треугольника через радиус внеписанной окружности  $S = (p - AB)r_{AB}$ , где  $p$  — полупериметр,  $r_{AB}$  — радиус внеписанной окружности, касающейся  $AB$  и продолжений двух других сторон.

*Ответ.*  $S = 15 \cdot 3$ . Ясно, что в общем виде будет  $S = r_{AC}r_{BC}$ .

**6.** Сторона квадрата равна 1. Через его центр проведена прямая. Вычислите сумму квадратов расстояний от четырех вершин квадрата до этой прямой.

*Указание.* Ввести систему координат с началом в центре квадрата. Записать сумму квадратов расстояний от каждой вершины до прямой  $y = kx$  по формуле расстояния от точки  $(x_0, y_0)$  до прямой  $ax + by + c = 0$ :  $\rho((x_0, y_0), ax + by + c) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

## Семинар по делимости и уравнениям в целых числах.

### Делимость.

**1.** Доказать, что  $n^3 + 5n \vdots 6$ .

*Решение.* Разложим на множители:  $n^3 + 5n = n(n^2 + 5)$ . Чётность очевидна (множители имеют разные чётности). Докажем делимость на 3. Выкинем  $3n$ : останется  $n(n^2 + 2)$ . Если  $n$  имеет остаток 1 или 2, то второй множитель делится на 3, а если 0, то первый.

**2.** Доказать, что при всех натуральных  $n$ :  $11^{n+2} + 12^{2n+1} \vdots 133$ .

*Указание.* Использовать индукцию.

**3.** Доказать, что если  $2^n - 2$  делится на  $n$ , то  $2^{2^n-1} - 2$  делится на  $2^n - 1$ .

*Указание.* Вынести двойку. Тогда  $2(2^{2^n-2} - 1) = 2(2^{kn} - 1) \vdots 2^n - 1$ .

**4.** Доказать несократимость дроби  $\frac{21n+4}{14n+3}$  при любых натуральных  $n$ .

*Решение.* Применим алгоритм Евклида, чтобы найти наибольший общий делитель чисел  $21n+4$  и  $14n+3$ :  $(21n+4, 14n+3) = (7n+1, 14n+3) = (7n+1, 7n+2) = 1$ , так как  $7n+1$  и  $7n+2$  — последовательные натуральные числа.

**5.** Найти наибольший общий делитель всех чисел вида  $p^2 - 1$ , где  $p$  — простое, большее трех.

*Решение.* Разложим на множители:  $(p-1)(p+1)$ . Обе скобки чётные, причём одна из них делится на 4. Значит,  $p^2 - 1$  делится на 8. Кроме того, каков бы ни был остаток от деления  $p$  на 3,  $p^2 - 1$  будет делиться на 3 (проверяется непосредственной проверкой двух случаев:  $p = 3k+1$  и  $p = 3k+2$ ). Значит,  $p^2 - 1$  делится на 24. Другого НОДа быть не может, так как при  $p = 5$  получаем  $p^2 - 1 = 24$ .

## Уравнения в целых числах.

1. Решить в натуральных числах уравнение  $xy = x + y + 3$ .

*Указание.* Разложить на множители и перебрать варианты:

$$(x - 1)(y - 1) = 4 = 4 \cdot 1 = 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4.$$

2. Доказать, что уравнение  $2^k + 31 = y^2$  не имеет решений в натуральных числах.

*Указание.* При  $k \geq 3$  правая часть имеет остаток 7 при делении на 8, а у квадратов такого остатка не бывает. Значит,  $k < 3$ .

3. Решить в натуральных числах  $3^x + 1 = 2^y$ .

*Указание.* Посмотреть остатки по модулю 8 — получим  $y \leq 2$ .

4. Решить уравнение  $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$  в натуральных числах.

*Указание.* Разложить на множители. Получим  $(1 + x)(1 + x^2) = 2^y = 2^{y_1}2^{y_2}$ . Рассматриваем  $1 + x = 2^{y_2}$ . После рассмотрения остатков от деления на 8 получаем, что  $y_2 < 3$ .

*Ответ.*  $(x, y) = (1, 1)$ .

5. Решить в натуральных числах уравнение  $3^x + 55 = y^2$ .

*Указание.* Рассмотреть последнюю цифру, прийти к тому, что  $x$  чётно. Перенести  $3^{2k}$  вправо, и разложить разность квадратов.

6. Решить в натуральных числах  $n^{k+1} - n! = 5(30k + 11)$ .

*Указание.* Заметим, что  $n$  нечётно (иначе левая часть чётна).

При  $n > 5$  получаем  $n! \vdots 5$ ,  $n^{k+1} - n! \vdots 5$ , а тогда  $n \vdots 5$ . Пусть  $n = 5p$ , где  $p \geq 2$ , так как  $n > 5$ . Тогда  $(5p)^{k+1} + (5p)! \vdots 25$ , а  $5 \cdot (30k + 11)$  не кратно 25.

## Курс по выбору «Астрономия».

**1.** Как долго может длиться покрытие Юпитера Луной? Радиус Луны — 1734 км, а большая полуось орбиты — 384400 км.

*Решение.* Период обращения Луны — 27,3 суток, значит Луна движется по небу относительно звёзд с угловой скоростью  $\frac{360^\circ}{27,3\text{сут}} = 13,18^\circ$  в день. Так как угловой диаметр Луны примерно равен  $0,5^\circ$ , звезда может находиться за Луной не дольше, чем 0,91 часа, или 55 минут.

*Ответ:* 55 минут или меньше.

**2.** Астероид, обращающийся вокруг Солнца по круговой орбите, бывает в противостоянии ровно раз в три года. Как далеко он находится от Земли в моменты этих противостояний?

*Решение.* Из условия, синодический период астероида — 3 года. Пользуясь формулой  $\frac{1}{S} = 1 - \frac{1}{T}$ , получаем период обращения астероида  $T = 1,5$  года. Тогда по третьему закону Кеплера большая полуось 1,31 а.е., и в момент противостояния он удален от Земли на 0,31 астрономическую единицу.

*Ответ:* 0,31 а.е.

**3.** Во время приливов и отливов ежесуточно затрачивается огромная энергия. Эта энергия расходуется Луной. В чем это проявляется?

*Решение.* Это энергия «отбирается» у орбитального движения Луны, в следствии чего она медленно удаляется от Земли. Также эта энергия идёт на замедление суточного вращения Земли.

**4.** Кратеры Луны какого диаметра может разглядеть человек в телескоп с диаметром главного зеркала  $D = 150$  мм и фокусным расстоянием  $F = 1000$  мм?

*Решение.* По формуле Рэлея найдем разрешающую способность телескопа:  $1,22 \frac{\lambda}{D} = 0,92''$ . Под таким углом видны мельчайшие

разрешимые объекты. Их линейные размеры равны  $384400 \cdot \operatorname{tg}(0, 92'') = 2$  км.

*Ответ:* 2 км.

**5** Определите время экспозиции предоставленной вам фотографии.



*Решение.* Угол, который звёзды прошли относительно полюса мира, можно измерить транспортиром. Этот угол составляет около  $30^\circ$ . Период обращения звёзд относительно полюса мира равен одним звёздным суткам  $T = 23\text{ч } 56\text{м } 04\text{с}$ , тогда получаем, что за время экспозиции прошла двенадцатая часть звездных суток, или около 2 часов.

*Ответ:* около 2 часов.

**6.** Вам предоставлены астрометрические параметры Денеба:  
Лучевая скорость —  $-4,7$  км/с.  
Собственное движение —  $2,8$  mas/год.  
Параллакс —  $2,29$  mas.

Абсолютная зв. величина — 6,95 м.

Если бы светимость Денеба всегда была постоянной, какой звёздной величины достигла бы его максимальная яркость когда-нибудь?

*Решение.* Вычислим расстояние до Денеба, зная параллакс: 436,7 пк. Следовательно, его тангенциальная скорость составляет  $\tau = 5,8$  км/с. Пусть лучевая скорость  $v = -4,7$  км/с. Так как лучевая скорость отрицательна, значит звезда приближается, следовательно минимальное расстояние между Денебом и Солнцем составит:  $S = R \cdot \sin \theta$ , где  $\theta$  — угол между вектором суммарной скорости Денеба и направлением на Солнце. Выразим  $\sin \theta$  через составляющие полной скорости:  $\sin \theta = 0,777$ ;  $S = 340$  пк. Далее по формуле Погсона просто вычислить блеск Денеба на минимальном расстоянии: 0,71 м.

*Ответ:* 0,71 м.

**7.** Рассчитайте, во сколько сегодня (7 июля) в Долгопрудном (широта —  $56^\circ$ , долгота —  $37,5^\circ$ ) наступит истинная полночь, зная, что в Долгопрудном зимнее время UTC +3.

*Решение.* Время UTC — истинное Солнечное время на Гринвичском меридиане. Так как долгота равна  $37,5^\circ$ , то есть 2,5 часам, а часовой пояс — трём часам, истинная полночь наступает на полчаса позже 00 : 00, то есть в полпервого ночи.

*Ответ:* 00 : 30.

**8.** После полнолуния прошло 10 дней. В этот момент Луна была в узле своей орбиты. Оцените звёздную величину Луны.

*Решение.* За десять дней Луна сместится от точки полнолуния на угол  $131,8^\circ$ , значит, фаза Луны равна  $0,5 \cdot (1 + \cos \varphi) = 0,17$ . Значит, Луна стала на 1,9 м тусклее, чем в полнолуние, и имеет звездную величину  $-10,8$  м.

*Ответ:*  $-10,8$  м.

**9.** На какой высоте над горизонтом можно увидеть Монтаку ( $\delta = 0^\circ$ ), Альдерамин ( $\delta = 65,5^\circ$ ) и Поллукс ( $\delta = 28^\circ$ ) ровно на западе на широте Москвы ( $\varphi = 55^\circ$ )?

*Решение.* Из параллактического треугольника  $h = \frac{\arcsin(\sin \delta)}{\sin \varphi}$ . Монтака —  $0^\circ$ ; Альдерамин — не отходит от севера дальше, чем на  $23,5^\circ$ , и наблюдать его на западе невозможно; Поллукс —  $35^\circ$ .

*Ответ:* Монтака —  $0^\circ$ , Альдерамин — невозможно наблюдать на западе, Поллукс —  $35^\circ$ .

**10.** Орбиту кометы разрезали линией, проходящей через Солнце. Докажите, что комета, проходя один из полученных участков, получает ровно столько же солнечной энергии, сколько и за время прохождения оставшегося участка.

*Решение.* По второму закону Кеплера, скорость движения обратно пропорциональна заметаемой площади, то есть квадрату расстояния. Но освещенность тоже обратно пропорциональна квадрату расстояния. Получается, что проходя одинаковый центральный угол, тело получает одинаковое количество энергии. В нашем случае углы развернутые и равны между собой.

## Курс по выбору «Начала математического анализа».

Задачи подготовлены с использованием материалов из сборника задач по математическому анализу<sup>[6],[7]</sup>.

### Вычисление пределов.

**1.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{32+x} - 2}{x}$ .

*Решение.* Здесь удобно ввести новую переменную. Положим  $y = \sqrt[5]{32+x}$ , тогда получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{32+x} - 2}{x} &= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y-2}{y^5 - 32} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{1}{y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 8y + 16} = \frac{1}{80}. \end{aligned}$$

**2.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 8x^2 + 3} - \sqrt{x^4 + x^2})$ .

*Решение.* В этом случае имеется неопределенность вида  $\infty - \infty$ . Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^4 + 8x^2 + 3} - \sqrt{x^4 + x^2} &= \frac{x^4 + 8x^2 + 3 - (x^4 + x^2)}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 3} + \sqrt{x^4 + x^2}} = \\ &= \frac{7 + \frac{3}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{8}{x^2} + \frac{3}{x^4}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}. \end{aligned}$$

В силу следующих выражений

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 7 + \frac{3}{x^2} \right) = 7,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{8}{x^2} + \frac{3}{x^4}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{8}{x^2} + \frac{3}{x^4} \right)} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)} = 1,$$

получаем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 8x^2 + 3} - \sqrt{x^4 + x^2}) = \frac{7}{2}.$$

## Вычисление производных.

1. Найти производную функции

$$y = \ln \sqrt[3]{\frac{e^x}{1 + \cos x}}, \quad x \neq \pi(2n + 1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Решение.* Здесь выгодно предварительно упростить формулу, с помощью которой задана функция:

$$y = \frac{1}{3} \ln e^x - \frac{1}{3} \ln(1 + \cos x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \ln(1 + \cos x).$$

Дифференцируя, получаем:

$$y' = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \frac{(\cos x)'}{1 + \cos x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{3}.$$

2. Функция  $y = f(x)$  задана параметрическими формулами:  
 $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ ,  $t \in (0; 2\pi)$ . Найти  $y''_{xx}$ .

*Решение.* Находим  $y'_x$ :

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right).$$

Дифференцируя обе части полученного равенства по  $x$ , получим:

$$y''_{xx} = \left( \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) \right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = -\frac{1}{2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \frac{1}{1 - \cos t} = -\frac{1}{4 \sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

## Вычисление интегралов.

1. Вычислить интеграл  $\int \frac{3x - 1}{x^2 - x + 1} dx$ .

*Решение.* Представим подынтегральную функцию в виде линейной комбинации двух рациональных дробей так, чтобы числителем первой дроби была производная знаменателя, равная  $2x - 1$ , а числителем второй дроби — единица:

$$\frac{3x - 1}{x^2 - x + 1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 - x + 1}.$$

Интеграл от каждого слагаемого легко вычисляется:

$$\frac{3}{2} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} = \frac{3}{2} \ln(x^2 - x + 1) + C_1,$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x - \frac{1}{2})}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C_2.$$

Таким образом,

$$\int \frac{3x - 1}{x^2 - x + 1} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

2. Вычислить интеграл  $\int \arccos^2(x) dx$ .

*Решение.* Пусть  $u = \arccos^2 x$ ,  $dv = dx$ ; тогда

$$du = -\frac{2 \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad v = x.$$

Интегрируя по частям, получаем:  $\int \arccos^2 x dx = x \arccos^2 x + 2 \int \frac{x \arccos x dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ .

Для вычисления полученного интеграла еще раз воспользуемся формулой интегрирования по частям, положив  $u = \arccos x$ ,

$dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ . Тогда  $du = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$ , и, вычислив интеграл

$$v = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = - \int d\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2} + C_1,$$

возьмём  $v = -\sqrt{1-x^2}$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\sqrt{1-x^2} \arccos x - \int dx = \\ &= -\sqrt{1-x^2} \arccos x - x + C_2. \end{aligned}$$

Итак,  $\int \arccos^2 x dx = x \arccos^2 x - 2\sqrt{1-x^2} \arccos x - 2x + C$ .

3. Вычислить интеграл  $\int \frac{\sqrt{x^2-3} - 3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}} dx$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2-3} - 3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}} dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}} = \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2+3}) - 3 \ln|x + \sqrt{x^2-3}| + C, \quad |x| > \sqrt{3}. \end{aligned}$$

4. Вычислить интеграл  $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)} dx$ .

*Решение.* Разложение функции на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

Из равенства многочленов следует, что их коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  равны. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 = A + C \text{ (при } x^3\text{),} \\ 1 = -A + B + 3C \text{ (при } x^2\text{),} \\ 5 = A - B + 3C \text{ (при } x^1\text{),} \\ 1 = B + 3D \text{ (при } x^0\text{).} \end{cases}$$

Эта система имеет решение:  $A = 0$ ,  $B = 1$ ,  $C = 2$ ,  $D = 0$ .

Следовательно,  $\int \frac{2x^3 + x^2 + 5x + 1}{(x^2 + 3)(x^2 - x + 1)} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) + C$ .

## Курс по выбору «Математические методы физики».

### Физика как наука.

Чем занимается физика?

Физика измеряет, считает, предсказывает, экспериментирует.

Физика подгоняет теорию под эксперимент.

Физика связывает теорию и эксперимент.

Физика строит модель, похожую на настоящую, и описывает ее численно.

Во главе физики стоит эксперимент. Любая теория, хоть самая красивая, должна кануть в лету, если она не согласуется с экспериментом. В отличие от математики, физика — наука описательная, и должна твердо стоять на земле, не улетая в абстрактные модели. Если законы физики не описывают реальное состояние вещей, то толку от них нет.

На самом деле слово «описывают» не совсем точно. Что вообще нужно, чтобы иметь право говорить, что некий закон правильно описывает реальное состояние вещей?

Провести эксперимент.

Провести много экспериментов.

Провести много разных экспериментов.

Насколько разных?

Таких, чтобы покрывали почти все случаи.

Измерить все величины, входящие в закон.

А что, если один из экспериментов не в точности совпал с предсказанными результатами?

Тут нам понадобится понятие погрешности.

А если целый большой кусок экспериментов не совпадет? Но при этом большая часть описывается верно?

Для этого мы определим границы применимости.

## **Погрешность.**

У вас у всех наверняка были лабораторные работы, где вы считали погрешности. Для чего это делается? Дело в том, что в физике мы работаем с идеализациями. На самом деле, реальному миру плевать на наши модели. Шарик не обязан быть идеально ровным, а расстояния между засечками линейки не должны быть одинаковыми. Степень отклонения от этой идеальности мы называем погрешностью. Мы не можем ее вычислить. Если бы могли ее померить, мы бы просто вычли ее из окончательного результата и получили точный. Погрешность мы можем только оценить.

Например, погрешность линейки мы оцениваем примерно равной цене деления. А погрешность сложновычисленной величины мы оцениваем формулами, смысл которых вам объяснят на первом курсе. Да вам и самим к тому времени станет ясно.

## **Границы применимости.**

Кроме этой неточности, неточности эксперимента, есть еще неточность теории. На самом деле, ни один закон не будет работать идеально во всех условиях. Условия, при которых закон

выполняется с нужной точностью, называют границами применимости.

Нельзя гарантировать идеальную работу закона при любых значениях входящих в него чисел. Но и то, что можно определить границы применимости, уже неплохо. Какая разница, что закон Ньютона не работает при скоростях порядка скорости света, если мне нужно рассчитать падение яблока с высоты 1 метра?

## **Решение задач.**

Каждая задача по физике — небольшая модель, отражение реального физического процесса. Чтобы её решить, нужно найти подходящие законы, задающие связь между разными параметрами этого процесса, и выразить те параметры, что нам неизвестны, используя те, что известны. Иногда нужно даже самому построить небольшую модель.

## **Теоретическая механика.**

Теоретическая механика, и вообще, теоретическая физика — эссенция связи физики и математики. Однако, ввиду структурной сложности и абстрактности предмета, часто преподается недостаточно понятно, приобретая при этом отрицательные стороны как физики (недостаточная формальность), так и математики (абстрактность и ненаглядность). Но для того, чтобы обсуждать теорию механики, необходимо вначале ввести некоторые понятия.

## **Производная.**

Понятие производной широко используется во всех разделах физики. На дифференциальных уравнениях основываются практические физические знания. Производная функции — мера её изменения за малое изменение аргумента. Для тех, кто желает

более строгого изложения, уточним, что я рассматриваю только непрерывные и так называемые гладкие функции, грубо говоря, — те, что можно нарисовать плавным движением карандаша.

Приведём три интерпретации понятия производной:

1) Геометрическая интерпретация

Производной называют касательную к кривой в данной точке.

2) Численная интерпретация

Малые приращения значения функции при малых приращениях аргумента.

3) Физическая интерпретация

Если координату принять функцией времени, то скорость будет производной координаты.

### **Частная производная.**

Для функции, зависящей от нескольких переменных, введем частную производную так: замораживая одну переменную, дифференцируем по второй, воспринимая первую как постоянный параметр.

### **Метод теоретической механики.**

Рассмотрим механическую систему. Определим вначале функцию, которую назовём лагранжианом. Лагранжиан есть разность кинетической и потенциальной энергии системы:

$$L = T - \Pi$$

Заметим, что как кинетическая, и потенциальная энергия являются функциями координат и их производных (а иногда и времени), лагранжиан можно записать в общем виде так:

$$L = L(q, q', t)$$

Мы имеем в виду, что он может зависеть от каждой из этих переменных.

В курсе теоретической механики доказывается, что второму закону Ньютона в случае консервативной системы с потенциальными силами равносильно следующее уравнение Лагранжа-Эйлера:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Под буквой  $d$  понимается полная производная, а под  $\partial$  — частная. Например, в случае

$$T = \frac{mv^2}{2}, \Pi = 0$$

Лагранжиан выражается следующим образом:

$$L = \frac{mv^2}{2} - 0 = \frac{mv^2}{2}$$

Уравнение Лагранжа-Эйлера в этом случае запишется так:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q'} \frac{mv^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q} \frac{mv^2}{2} = \frac{d}{dt} \frac{2mv}{2} = m \frac{dv}{dt} = 0$$

Здесь учтено, что  $q = x, q' = v$ .

Заметим, что это то же самое, что  $ma = 0$ . Мы получили второй закон Ньютона для случая нулевой суммы сил.

## **Заключение.**

Точные науки — это фундамент нашего мира, движущая сила прогресса. Это особый взгляд на привычные вещи, который позволяет нам открывать новые горизонты как для себя, так и для всего человечества.

Мы благодарим Вас за участие в Летней школе, ведь Ваш интерес и рвение к знаниям являются показателями ответственного отношения к своей будущей профессии и судьбе науки в целом. Хочется верить, что занятия, которые мы для Вас провели, помогут Вам при подготовке к поступлению в ВУЗ, подарят новые идеи. Будем рады видеть Вас в приемной комиссии Московского Физико-Технического Института!

До новых встреч!

Ваш преподавательский состав.

## Список литературы

- [1] Прасолов В. В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу: Учебное пособие. — М.: МЦНМО, 2007. — 608 с.
- [2] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие. — 6-е изд. — М.: МЦНМО, 2007. — 640 с.
- [3] Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел: Сборник задач для математических школ. 3-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2009. — 336 с.
- [4] Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А. Комбинаторика. — М.: ФИМА, МЦНМО, 2010. — 400 с.
- [5] Понарин Я. П. Элементарная геометрия: Планиметрия, преобразования плоскости. — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2008. — 312 с.
- [6] Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: Учеб. пособие / Под ред. Л. Д. Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 496 с.
- [7] Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды: Учеб. пособие / Под ред. Л. Д. Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 504 с.