БИЛЕТ 1

1. Решите уравнение $\log_{\left(3^{x-1}\right)}\left(x^2-11x+19\right)+\log_{\left(27^{x-1}\right)}\left(x^3\right)=\dfrac{2}{x-1}$.

Ответ: $x=9$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{1}{x-1}\log_3\left(x^2-11x+19\right)+\frac{3}{3(x-1)}\log_3 x=\frac{2}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_3\left(x^2-11x+19\right)+\log_3 x=2,\\ x-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\log_3\left(x^3-11x^2+19x\right)=\log_3 9,\\ x\neq 1,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^3-11x^2+19x-9=0,\\ x\neq 1,\\ x>0.\end{cases}$$

Одним из корней кубического уравнения является $x=1$. Разделив уголком на $x-1$, получаем уравнение $(x-1)\left(x^2-10x+9\right)=0$, откуда $x=1$ или $x=9$. В ОДЗ входит только корень $x=9$.

2. Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{|x+1|-2}}\leq\dfrac{1}{9+x}$.

Ответ: $x\in(-9;-7]$.

Решение.

1-й способ. Переносим в одну часть и приводим дроби к общему знаменателю: $\dfrac{\sqrt{|x+1|-2}-9-x}{(9+x)\sqrt{|x+1|-2}}\geq 0$.

Находим нули знаменателя: $9+x=0\Leftrightarrow x=-9$; $\sqrt{|x+1|-2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x=1.\end{array}\right.$

Находим нули числителя: $\sqrt{|x+1|-2}-9-x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+9\geq 0,\\ |x+1|-2=(x+9)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -9,\\ \left[\begin{array}{l}x+1=2+(x+9)^2,\\ x+1=-2-(x+9)^2.\end{array}\right.\end{cases}$

Первое уравнение совокупности не имеет решений, а из второго находим, что $x=-7$ или $x=-12$. Неравенству $x\geq -9$ удовлетворяет только $x=-7$, т.е. числитель обращается в ноль только при $x=-7$.

Находим ОДЗ: $|x+1|-2>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

Далее решаем методом интервалов: из каждого промежутка, принадлежащего ОДЗ, подставляем какое-либо значение x и определяем знак левой части в этой точке. В итоге промежутки $(-\infty;-9)$, $(-7;-3)$ и $(1;+\infty)$ не подходят, а промежуток $(-9;-7)$ – подходит. Также не забываем включить в ответ точку $x=-7$ – ноль числителя.

2-й способ. При отрицательной правой части решений нет, поэтому $x+9>0$. Умножаем обе части неравенства на *положительное* выражение $(x+9)\sqrt{|x+1|-2}$ и получаем неравенство $\sqrt{|x+1|-2}\geq x+9$, равносильное исходному. Поскольку правая часть больше нуля, возведение в квадрат является равносильным преобразованием. Получаем

$$|x+1|-2\geq x^2+18x+81\Leftrightarrow |x+1|\geq x^2+18x+83\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1\geq x^2+18x+83,\\ x+1\leq -x^2-18x-83\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+17x+82\leq 0,\\ x^2+19x+84\leq 0.\end{array}\right.$$

Первое неравенство совокупности не имеет решений, а из второго получаем, что $x\in[-12;-7]$. Учитывая ограничение $x+9>0$, окончательно находим $x\in(-9;-7]$.

3. Решите уравнение $\sqrt{3+4\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{\sqrt{3}}+3\cos x$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ x=-\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{4}+2\pi k,\ k\in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$3+4\cos^2 x=\frac{\sin^2 x}{3}+2\sqrt{3}\sin x\cos x+9\cos^2 x \qquad (*)$$

при условии $\frac{\sin x}{\sqrt{3}}+3\cos x\geq 0$. Используя основное тригонометрическое тождество ($3\to 3\cos^2 x+3\sin^2 x$) и приводя подобные слагаемые, получаем: $2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\frac{8}{3}\sin^2 x=0$. Подстановкой убеждаемся, что при $\sin x=0$ решений нет. Если разделить обе части на $2\sin^2 x$, то выходит квадратное уравнение относительно $\operatorname{ctg} x$: $\operatorname{ctg}^2 x+\sqrt{3}\operatorname{ctg} x-\frac{4}{3}=0$, решая которое, находим, что $\operatorname{ctg} x=-\frac{4}{\sqrt{3}}$ или $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $x=-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4}+\pi k$ или $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$.

Условию $\frac{\sin x}{\sqrt{3}}+3\cos x\geq 0$ удовлетворяют только значения $x=-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4}+2\pi k$ и $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$.

Примечание. Уравнение (*) с помощью формул понижения степени и двойного угла можно также преобразовать к виду $3\sqrt{3}\sin 2x+7\cos 2x=1$. Если далее решать это уравнение, вводя вспомогательный угол, то ответ может быть получен, например, в таком виде:

(а) $x=\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{2\sqrt{19}}\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{19}}+2\pi k, k\in Z$ или

(б) $\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{19}}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}+2\pi k, k\in Z, \\ x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{19}}+2\pi k, k\in Z. \end{array}\right.$

4. Число 72350 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 72350723507235072350723507235072350. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 216.

Решение. Для того, чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 5. Для делимости на 5 нужно, чтобы последней цифрой числа была 0 или 5. Значит, полученное число будет делиться на 5, если мы вычеркнем любые две цифры, кроме двух последних. Перейдём к делимости на 3.

Если в числе заменить все цифры 7 на 1, цифры 3 на 0, а цифры 5 на 2, то остаток от деления числа на 3 не изменится (остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3). Таким образом, нужно узнать, сколькими способами можно вычеркнуть две цифры из числа $X=12020120201202012020120201202012020$ так, чтобы полученное число делилось на 3. Сумма цифр числа X равна 35. Чтобы после вычёркивания сумма цифр делилась на 3, мы можем вычеркнуть либо а) две единицы, либо б) двойку и ноль. Количество способов вычеркнуть две единицы равно $C_7^2=21$; количество способов вычеркнуть один ноль и одну двойку равно $C_{14}^1\cdot C_{14}^1=14\cdot 14=196$.

Две последние цифры вычёркивать нельзя, поэтому получаем $196+21-1=216$ способов.

5. В параллелограмме $ABCD$ угол ADC равен $\arcsin\frac{\sqrt{24}}{5}$. Окружность Ω, проходящая через точки A, C и D, пересекает стороны AB и BC в точках N и L соответственно, причём $AN=11$, $BL=6$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

Ответ: $S=60\sqrt{6}$, $R=\frac{5\sqrt{265}}{4\sqrt{6}}$.

Решение. Трапеция $ADCN$ вписана в окружность, поэтому она равнобокая, $CN=AD$. Противоположные стороны параллелограмма равны: $BC=AD$. Следовательно, $CN=BC$, поэтому треугольник BNC равнобедренный. $\angle CBN=\angle ADC=\arcsin\frac{\sqrt{24}}{5}=\arccos\frac{1}{5}$. Пусть CH – высота треугольника BNC. Тогда $\frac{1}{5}=\cos\angle HBC=\frac{BH}{BC}=\frac{BN}{2BC}$. Если обозначить $BC=5x$, то $BN=2x$.

Из точки B к окружности проведены секущие BLC и BNA. По теореме о двух секущих получаем, что $BN \cdot BA = BL \cdot BC$, т.е. $2x(2x+11) = 6 \cdot 5x$, откуда $x = 2$. Значит, $BC = 10$, $AB = 15$. Поэтому площадь S параллелограмма $ABCD$ равна $AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = 15 \cdot 10 \cdot \dfrac{2\sqrt{6}}{5} = 60\sqrt{6}$.

Окружность Ω является описанной около треугольника ADC. Её радиус R равен $\dfrac{AC}{2\sin\angle ADC}$. Сторону AC находим по теореме косинусов из треугольника ADC: $AC^2 = 100 + 225 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \dfrac{1}{5} = 265$. Поэтому $AC = \sqrt{265}$, а $R = \sqrt{265} : \dfrac{4\sqrt{6}}{5} = \dfrac{5\sqrt{265}}{4\sqrt{6}}$.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases}\left(x^2 - xy + y^2\right)\left(x^2 - 36\right) \ge 0,\\ |x - 2 + y| + |x - 2 - y| \le a\,?\end{cases}$$

Ответ: $4 \le a < 8$.

Решение. Рассмотрим выражение $A(x; y) = x^2 - xy + y^2$ как квадратный трёхчлен относительно x. Его дискриминант равен $D = y^2 - 4y^2 = -3y^2$. При $y \ne 0$ дискриминант отрицателен, поэтому $A > 0$. Если $y = 0$, то $A = x^2$, т.е. $A > 0$ при $x \ne 0$ и $A = 0$ при $x = 0$. В итоге получаем, что выражение $A(x; y)$ обращается в ноль в точке $(0; 0)$ и положительно во всех остальных точках.

Следовательно, первое неравенство системы равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 = 0,\\ x^2 - 36 \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0,\\ x \in (-\infty; -6] \cup [6; +\infty). \end{array}\right.$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих этой совокупности, на координатной плоскости. Получаем все точки, лежащие на прямой $x = -6$ и левее неё, точки на прямой $x = 6$ и правее неё, а также точку $(0; 0)$.

Перейдём ко второму неравенству. Проведём на координатной плоскости прямые $x - 2 + y = 0$ и $x - 2 - y = 0$. Они разбивают плоскость на 4 области, в каждой из которых знаки выражений под модулями постоянны. Рассматриваем 4 случая.

Если $x - 2 + y \ge 0$ и $x - 2 - y \ge 0$, то неравенство принимает вид $x - 2 + y + x - 2 - y \le a \Leftrightarrow x \le 2 + \dfrac{a}{2}$.

Аналогично, если $x - 2 + y < 0$ и $x - 2 - y \ge 0$, то $-x + 2 - y + x - 2 - y \le a \Leftrightarrow y \ge -\dfrac{a}{2}$.

Если $x - 2 + y < 0$ и $x - 2 - y < 0$, то $-x + 2 - y - x + 2 + y \le a \Leftrightarrow x \ge 2 - \dfrac{a}{2}$.

Если $x - 2 + y \ge 0$ и $x - 2 - y < 0$, то $x - 2 + y - x + 2 + y \le a \Leftrightarrow y \le \dfrac{a}{2}$.

Окончательно получаем, что при $a = 0$ неравенство задаёт точку $(2; 0)$, при $a > 0$ – квадрат с центром в точке $(2; 0)$ и стороной a, а при $a < 0$ – пустое множество.

Очевидно, при $a \le 0$ система не имеет решений. При $a > 0$ для того, чтобы было единственное решение, нужно, чтобы точка $(0; 0)$ попадала в квадрат, но чтобы квадрат не пересекал прямую $x = 6$, откуда следует, что $2 \le \dfrac{a}{2} < 4$, т.е. $4 \le a < 8$.

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC = 2\sqrt{3}$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω – сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что $\angle SAB = \arccos\dfrac{1}{4}$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

Ответ: а) 0; б) 1:2; в) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Пусть O – центр сферы ω; K, L, M – основания перпендикуляров, опущенных из точки O на рёбра AS, BS, CS соответственно; SH – высота пирамиды $SABC$; r и R – радиусы сфер ω и Ω соответственно.

а) Поскольку точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AS, она равноудалена от концов этого отрезка, т.е. $OA = OS$. Аналогично $OB = OS$ и $OC = OS$. Значит, $OA = OB = OC = OS$, поэтому точка O является центром сферы Ω. Следовательно, расстояние между центрами сфер равно нулю.

б) Из равенства прямоугольных треугольников SOK, SOL и SOM ($OK = OL = OM = r$, OS – общая сторона) следует, что $SK = SL = SM$. Поскольку точки K, L, M – это середины боковых рёбер пирамиды, отсюда получаем, что боковые рёбра равны между собой. Тогда высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания (действительно, $\Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$ по катету и гипотенузе, откуда $AH = BH = CH$). Но в пирамиде $OABC$ боковые рёбра OA, OB, OC также равны между собой как радиусы сферы Ω; значит, и её высота, проведённая из вершины O проходит через центр окружности, описанной около основания. Таким образом, высота пирамиды SH проходит через точку O. Кроме того, точка H является центром окружности, описанной около основания. Поскольку треугольник ABC прямоугольный, H – это середина гипотенузы BC. Так как отрезок OH перпендикулярен плоскости основания, он равен радиусу r сферы ω.

Для нахождения соотношения между радиусами рассмотрим прямоугольный треугольник SHC. Точка M – середина гипотенузы SC, на катете SH находится точка O, причём $SO = CO = R$, $OH = OM = r$. Треугольники CHO, CMO и SMO равны по катету и гипотенузе, следовательно, $CH = CM = SM$. Значит, $CH = \frac{1}{2}SM$, $\angle HSC = 30^\circ$. Тогда из треугольника SOM находим, что $r : R = 1:2$.

в) $SC = 2CH = BC = 2\sqrt{3}$, поэтому треугольник SBC – равносторонний, $SH = SB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$. В равнобедренном треугольнике SAB известны боковые стороны $SB = SA = 2\sqrt{3}$ и угол при основании $\angle SAB = \arccos\frac{1}{4}$. Отсюда находим, что $AB = 2SA \cdot \cos\angle SAB = \sqrt{3}$. По теореме Пифагора для треугольника ABC находим, что $AC = 3$, поэтому $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}$; объём пирамиды V равен $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

8. Дан правильный 18-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 40°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответ: 216.

Решение. Опишем вокруг 18-угольника окружность. Будем считать, что длина окружности равна 18 (тогда длина дуги между соседними вершинами равна 1). Вписанный угол в 40 градусов стягивет дугу длиной 4. Значит, для данной вершины A найдутся $18 - 4 - 1 = 13$ (неупорядоченных) пар вершин (B, C), для которых $\angle BAC = 40^\circ$. Суммируя по всем вершинам, получаем $13 \cdot 18 = 234$ тройки вершин. При таком подсчёте дважды учтены 18 равнобедренных треугольников с углами 40°, 40°, 100° (положение равнобедренного треугольника однозначно определяется положением его вершины), поэтому в итоге получаем $234 - 18 = 216$ способов расположения точек.

БИЛЕТ 2

1. Решите уравнение $\log_{\left(5^x\right)}\left(x^2+9x+15\right)+\log_{\left(125^x\right)}\left(x^3\right)=\frac{2}{x}$.

Ответ: $x=1$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{1}{x}\log_5\left(x^2+9x+15\right)+\frac{3}{3x}\log_5 x=\frac{2}{x} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_5\left(x^2+9x+15\right)+\log_5 x=2,\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\log_5\left(x^3+9x^2+15x\right)=\log_5 25,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^3+9x^2+15x-25=0,\\ x>0\end{cases}$$

Одним из корней кубического уравнения является $x=1$. Разделив уголком на $x-1$, получаем уравнение $(x-1)\left(x^2+10x+25\right)=0$, откуда $x=1$ или $x=-5$. В ОДЗ входит только корень $x=1$.

2. Решите неравенство $\frac{1}{\sqrt{|x-3|-1}}\le\frac{1}{6-x}$.

Ответ: $x\in[5;6)$.

Решение.

1-й способ. Переносим в одну часть и приводим дроби к общему знаменателю: $\frac{\sqrt{|x-3|-1}-6+x}{(6-x)\sqrt{|x-3|-1}}\ge 0$.

Находим нули знаменателя: $6-x=0\Leftrightarrow x=6$; $\sqrt{|x-3|-1}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4,\\ x=2.\end{array}\right.$

Находим нули числителя: $\sqrt{|x-3|-1}-6+x=0\Leftrightarrow\begin{cases}6-x\ge 0,\\ |x-3|-1=(6-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 6,\\ \left[\begin{array}{l}x-3=1+(6-x)^2,\\ x-3=-1-(6-x)^2.\end{array}\right.\end{cases}$

Второе уравнение совокупности не имеет решений, а из первого находим, что $x=5$ или $x=8$. Неравенству $x\le 6$ удовлетворяет только $x=5$, т.е. числитель обращается в ноль только при $x=5$.

Находим ОДЗ: $|x-3|-1>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$.

Далее решаем методом интервалов: из каждого промежутка, принадлежащего ОДЗ, подставляем какое-либо значение x и определяем знак левой части в этой точке. В итоге промежутки $(-\infty;2)$, $(4;5)$ и $(6;+\infty)$ не подходят, а промежуток $(5;6)$ – подходит. Также не забываем включить в ответ точку $x=5$ – ноль числителя.

2-й способ. При отрицательной правой части решений нет, поэтому $6-x>0$. Умножаем обе части неравенства на *положительное* выражение $(6-x)\sqrt{|x-3|-1}$ и получаем неравенство $\sqrt{|x-3|-1}\ge 6-x$, равносильное исходному. Поскольку правая часть больше нуля, возведение в квадрат является равносильным преобразованием. Отсюда

$$|x-3|-1\ge x^2-12x+36\Leftrightarrow|x-3|\ge x^2-12x+37\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-3\ge x^2-12x+37,\\ x-3\le -x^2+12x-37\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-13x+40\le 0,\\ x^2-11x+34\le 0.\end{array}\right.$$

Второе неравенство совокупности не имеет решений, а из первого получаем, что $x\in[5;8]$. Учитывая ограничение $6-x>0$, окончательно находим $x\in[5;6)$.

3. Решите уравнение $\sqrt{1+7\sin^2 x}=2\cos x-\sqrt{3}\sin x$.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}+2\pi k,\ k\in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$1+7\sin^2 x=4\cos^2 x-4\sqrt{3}\sin x\cos x+3\sin^2 x \qquad (*)$$

при условии $2\cos x-\sqrt{3}\sin x\ge 0$. Используя основное тригонометрическое тождество ($1\to\cos^2 x+\sin^2 x$) и приводя подобные слагаемые, получаем: $3\cos^2 x-4\sqrt{3}\sin x\cos x-5\sin^2 x=0$. Подстановкой убеждаемся, что при $\sin x = 0$ решений нет. Если разделить обе части на $\sin^2 x$, то выходит квадратное уравнение относительно $\operatorname{ctg} x$: $3\operatorname{ctg}^2 x - 4\sqrt{3}\operatorname{ctg} x - 5 = 0$, решая которое, находим, что $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ или $\operatorname{ctg} x = \frac{5}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$ или $x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5} + \pi k$, $k \in \mathrm{Z}$.

Условию $2\cos x - \sqrt{3}\sin x \geq 0$ удовлетворяют только значения $x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi k$ и $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

Примечание. Уравнение (*) с помощью формул понижения степени и двойного угла можно также преобразовать к виду $4\cos 2x - 2\sqrt{3}\sin 2x = 1$. Если далее решать это уравнение, вводя вспомогательный угол, то ответ может быть получен, например, в таком виде:

(а) $x = -\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{\sqrt{7}} \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}} + 2\pi k, k \in \mathrm{Z}$ или

(б) $\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{7}} + 2\pi k, k \in \mathrm{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{7}} + 2\pi k, k \in \mathrm{Z}. \end{array}\right.$

4. Число 84605 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 84605846058460584605846058460584605. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 216.

Решение. Для того, чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 5. Для делимости на 5 нужно, чтобы последней цифрой числа была 0 или 5. Значит, полученное число будет делиться на 5, если мы вычеркнем любые две цифры, кроме двух последних. Перейдём к делимости на 3.

Если в числе заменить все цифры 8 и 5 на 2, цифры 4 на 1, а цифры 6 на 0, то остаток от деления числа на 3 не изменится (остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3). Таким образом, нужно узнать, сколькими способами можно вычеркнуть две цифры из числа $X = 21002210022100221002210022100221002$ так, чтобы полученное число делилось на 3. Сумма цифр числа X равна 35. Чтобы после вычёркивания сумма цифр делилась на 3, мы можем вычеркнуть либо а) две единицы, либо б) двойку и ноль. Количество способов вычеркнуть две единицы равно $C_7^2 = 21$; количество способов вычеркнуть один ноль и одну двойку равно $C_{14}^1 \cdot C_{14}^1 = 14 \cdot 14 = 196$.

Две последние цифры вычёркивать нельзя, поэтому получаем $196 + 21 - 1 = 216$ способов.

5. В параллелограмме $ABCD$ угол BCD равен $\operatorname{arctg}\sqrt{15}$. Окружность Ω, проходящая через точки B, C и D, пересекает стороны AB и AD в точках T и E соответственно, причём $BT = 10$, $AE = 7$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

Ответ: $S = 28\sqrt{15}$, $R = \frac{4\sqrt{17}}{\sqrt{5}}$.

Решение. Трапеция $CBTD$ вписана в окружность, поэтому она равнобокая, $CB = TD$. Противоположные стороны параллелограмма равны: $BC = AD$. Следовательно, $TD = AD$, поэтому треугольник ADT равнобедренный. $\angle DAT = \angle BCD = \operatorname{arctg}\sqrt{15} = \arccos\frac{1}{4} = \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}$. Пусть DH – высота треугольника ADT. Тогда $\frac{1}{4} = \cos\angle TAD = \frac{AH}{AD} = \frac{AT}{2AD}$. Если обозначить $AT = x$, то $AD = 2x$.

Из точки A к окружности проведены секущие AED и ATB. По теореме о двух секущих получаем, что $AT \cdot AB = AE \cdot AD$, т.е. $x(x+10) = 7 \cdot 2x$, откуда $x = 4$. Значит, $AB = 14$, $AD = 8$. Поэтому площадь S параллелограмма $ABCD$ равна $AB \cdot AD \cdot \sin\angle BAD = 14 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 28\sqrt{15}$.

Окружность Ω является описанной около треугольника BDC. Её радиус R равен $\frac{BD}{2\sin\angle BCD}$. Сторону BD находим по теореме косинусов из треугольника BDC: $BD^2 = 64 + 196 - 2 \cdot 14 \cdot 8 \cdot \frac{1}{4} = 204$. Поэтому $BD = 2\sqrt{51}$, а $R = 2\sqrt{51} : \frac{2\sqrt{15}}{4} = \frac{4\sqrt{17}}{\sqrt{5}}$.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases} \left(x^2 - xy + 3y^2\right)\left(y^2 - 25\right) \geq 0, \\ |x + 2 + y| + |y + 2 - x| \leq a? \end{cases}$$

Ответ: $4 \leq a < 6$.

Решение. Рассмотрим выражение $A(x; y) = x^2 - xy + 3y^2$ как квадратный трёхчлен относительно x. Его дискриминант равен $D = y^2 - 12y^2 = -11y^2$. При $y \neq 0$ дискриминант отрицателен, поэтому $A > 0$. Если $y = 0$, то $A = x^2$, т.е. $A > 0$ при $x \neq 0$ и $A = 0$ при $x = 0$. В итоге получаем, что выражение $A(x; y)$ обращается в ноль в точке $(0; 0)$ и положительно во всех остальных точках.

Следовательно, первое неравенство системы равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - xy + 3y^2 = 0, \\ y^2 - 25 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0, \\ y \in (-\infty; -5] \cup [5; +\infty). \end{array}\right.$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих этой совокупности, на координатной плоскости. Получаем все точки, лежащие на прямой $y = -5$ и ниже неё, точки на прямой $y = 5$ и выше неё, а также точку $(0; 0)$.

Перейдём ко второму неравенству. Проведём на координатной плоскости прямые $x + 2 + y = 0$ и $y + 2 - x = 0$. Они разбивают плоскость на 4 области, в каждой из которых знаки выражений под модулями постоянны. Рассматриваем 4 случая.

Если $x + 2 + y \geq 0$ и $y + 2 - x \geq 0$, то неравенство принимает вид $x + 2 + y + y + 2 - x \leq a \Leftrightarrow y \leq -2 + \frac{a}{2}$.

Аналогично, если $x + 2 + y < 0$ и $y + 2 - x \geq 0$, то $-x - 2 - y + y + 2 - x \leq a \Leftrightarrow x \geq -\frac{a}{2}$.

Если $x + 2 + y < 0$ и $y + 2 - x < 0$, то $-x - 2 - y - y - 2 + x \leq a \Leftrightarrow y \geq -2 - \frac{a}{2}$.

Если $x + 2 + y \geq 0$ и $y + 2 - x < 0$, то $x + 2 + y - y - 2 + x \leq a \Leftrightarrow x \leq \frac{a}{2}$.

Окончательно получаем, что при $a = 0$ неравенство задаёт точку $(0; -2)$, при $a > 0$ – квадрат с центром в точке $(0; -2)$ и стороной a, а при $a < 0$ – пустое множество.

Очевидно, при $a \leq 0$ система не имеет решений. При $a > 0$ для того, чтобы было единственное решение, нужно, чтобы точка $(0; 0)$ попадала в квадрат, но чтобы квадрат не пересекал прямую $y = -5$, откуда следует, что $2 \leq \frac{a}{2} < 3$, т.е. $4 \leq a < 6$.

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC = 4$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω – сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что угол между гранями SAB и ABC равен $\operatorname{arctg} 2$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

Ответ: а) 0; б) 1:2; в) 4.

Решение. Пусть O – центр сферы ω; K, L, M – основания перпендикуляров, опущенных из точки O на рёбра AS, BS, CS соответственно; SH – высота пирамиды $SABC$; r и R – радиусы сфер ω и Ω соответственно.

а) Поскольку точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AS, она равноудалена от концов этого отрезка, т.е. $OA = OS$. Аналогично $OB = OS$ и $OC = OS$. Значит, $OA = OB = OC = OS$, поэтому точка O является центром сферы Ω. Следовательно, расстояние между центрами сфер равно нулю.

б) Из равенства прямоугольных треугольников SOK, SOL и SOM ($OK = OL = OM = r$, OS – общая сторона) следует, что $SK = SL = SM$. Поскольку точки K, L, M – это середины боковых рёбер пирамиды, отсюда получаем, что боковые рёбра равны между собой. Тогда высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания (действительно, $\Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$ по катету и гипотенузе, откуда $AH = BH = CH$). Но в пирамиде $OABC$ боковые рёбра OA, OB, OC также равны между собой как радиусы сферы Ω; значит, и её высота, проведённая из вершины O проходит через центр окружности, описанной около основания. Таким образом, высота пирамиды SH проходит через точку O. Кроме того, точка H является центром окружности, описанной около основания. Поскольку треугольник ABC прямоугольный, H – это середина гипотенузы BC. Так как отрезок OH перпендикулярен плоскости основания, он равен радиусу r сферы ω.

Для нахождения соотношения между радиусами рассмотрим прямоугольный треугольник SHC. Точка M – середина гипотенузы SC, на катете SH находится точка O, причём $SO = CO = R$, $OH = OM = r$. Треугольники CHO, CMO и SMO равны по катету и гипотенузе, следовательно, $CH = CM = SM$. Значит, $CH = \frac{1}{2}SM$, $\angle HSC = 30^\circ$. Тогда из треугольника SOM находим, что $r : R = 1 : 2$.

в) $SC = 2CH = BC = 4$, поэтому треугольник SBC – равносторонний, $SH = SB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Пусть F – середина ребра AB. Тогда $\angle SFH = \operatorname{arctg} 2$ (угол SFH является углом между гранями SAB и ABC, т.к. $HF \perp AB$, $SF \perp AB$). Тогда $HF = SH \cdot \operatorname{ctg} \angle SFH = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$, $AC = 2 \cdot FH = 2\sqrt{3}$. По теореме Пифагора для треугольника ABC находим, что $AB = 2$, поэтому $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3}$; объём пирамиды V равен $\frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 4$.

8. Дан правильный 24-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 45°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответ: 384.

Решение. Опишем вокруг 24-угольника окружность. Будем считать, что длина окружности равна 24 (тогда длина дуги между соседними вершинами равна 1). Вписанный угол в 45 градусов опирается на дугу длиной 6. Значит, для данной вершины A найдутся $24 - 6 - 1 = 17$ (неупорядоченных) пар вершин (B, C), для которых $\angle BAC = 45^\circ$. Суммируя по всем вершинам, получаем $17 \cdot 24 = 408$ троек вершин. При таком подсчёте дважды учтены 24 равнобедренных треугольников с углами 45°, 45°, 90° (положение равнобедренного треугольника однозначно определяется положением его вершины), поэтому в итоге получаем $408 - 24 = 384$ способа расположения точек.

БИЛЕТ 3

1. Решите уравнение $\log_{\left(2^x\right)}\left(x^2-6x-15\right)+\log_{\left(8^x\right)}\left(x^3\right)=\dfrac{3}{x}$.

Ответ: $x=8$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{1}{x}\log_2\left(x^2-6x-15\right)+\frac{3}{3x}\log_2 x=\frac{3}{x} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2\left(x^2-6x-15\right)+\log_2 x=3,\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2\left(x^3-6x^2-15x\right)=\log_2 8,\\ x>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^3-6x^2-15x-8=0,\\ x>0\end{cases}$$

Одним из корней кубического уравнения является $x=-1$. Разделив уголком на $x+1$, получаем уравнение $(x+1)\left(x^2-7x-8\right)=0$, откуда $x=-1$ или $x=8$. В ОДЗ входит только корень $x=8$.

2. Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{|x+2|-1}}\leq\dfrac{1}{5+x}$.

Ответ: $x\in(-5;-4]$.

Решение.

1-й способ. Переносим в одну часть и приводим дроби к общему знаменателю: $\dfrac{\sqrt{|x+2|-1}-5-x}{(5+x)\sqrt{|x+2|-1}}\geq 0$.

Находим нули знаменателя: $5+x=0\Leftrightarrow x=-5$; $\sqrt{|x+2|-1}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x=-1.\end{array}\right.$

Находим нули числителя: $\sqrt{|x+2|-1}-5-x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+5\geq 0,\\ |x+2|-1=(x+5)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -5,\\ \left[\begin{array}{l}x+2=1+(x+5)^2,\\ x+2=-1-(x+5)^2.\end{array}\right.\end{cases}$

Первое уравнение совокупности не имеет решений, а из второго находим, что $x=-7$ или $x=-4$. Неравенству $x\geq -5$ удовлетворяет только $x=-4$, т.е. числитель обращается в ноль только при $x=-4$.

Находим ОДЗ: $|x+2|-1>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)$.

Далее решаем методом интервалов: из каждого промежутка, принадлежащего ОДЗ, подставляем какое-либо значение x и определяем знак левой части в этой точке. В итоге промежутки $(-\infty;-5)$, $(-4;-3)$ и $(-1;+\infty)$ не подходят, а промежуток $(-5;-4)$ – подходит. Также не забываем включить в ответ точку $x=-4$ – ноль числителя.

2-й способ. При отрицательной правой части решений нет, поэтому $x+5>0$. Умножаем обе части неравенства на *положительное* выражение $(x+5)\sqrt{|x+2|-1}$ и получаем неравенство $\sqrt{|x+2|-1}\geq x+5$, равносильное исходному. Поскольку правая часть больше нуля, возведение в квадрат является равносильным преобразованием. Получаем

$$|x+2|-1\geq x^2+10x+25\Leftrightarrow |x+2|\geq x^2+10x+26\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2\geq x^2+10x+26,\\ x+2\leq -x^2-10x-26\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+9x+24\leq 0,\\ x^2+11x+28\leq 0.\end{array}\right.$$

Первое неравенство совокупности не имеет решений, а из второго получаем, что $x\in[-7;-4]$. Учитывая ограничение $x+5>0$, окончательно находим $x\in(-5;-4]$.

3. Решите уравнение $\sqrt{6+\dfrac{22}{3}\sin^2 x}=3\cos x+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin x$.

Ответ: $x=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2\pi k,\ x=-\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{6}+2\pi k,\ k\in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$6+\frac{22}{3}\sin^2 x=\frac{4\sin^2 x}{3}+4\sqrt{3}\sin x\cos x+9\cos^2 x \qquad (*)$$

при условии $\frac{2\sin x}{\sqrt{3}}+3\cos x\geq 0$. Используя основное тригонометрическое тождество ($6\to 6\cos^2 x+6\sin^2 x$) и приводя подобные слагаемые, получаем: $3\cos^2 x+4\sqrt{3}\sin x\cos x-12\sin^2 x=0$. Подстановкой убеждаемся, что при $\sin x=0$ решений нет. Если разделить обе части на $\sqrt{3}\sin^2 x$, то выходит квадратное уравнение относительно $\operatorname{ctg} x$: $\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2 x+4\operatorname{ctg} x-4\sqrt{3}=0$, решая которое, находим, что $\operatorname{ctg} x=-2\sqrt{3}$ или $\operatorname{ctg} x=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $x=-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{6}+\pi k$ или $x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi k$, $k\in\mathrm{Z}$.

Условию $\frac{2\sin x}{\sqrt{3}}+3\cos x\geq 0$ удовлетворяют только значения $x=-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{6}+2\pi k$ и $x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi k$.

Примечание. Уравнение (*) с помощью формул понижения степени и двойного угла можно также преобразовать к виду $5\sqrt{3}\cos 2x+4\sin 2x=3\sqrt{3}$. Если далее решать это уравнение, вводя вспомогательный угол, то ответ может быть получен, например, в таком виде:

(а) $x=\frac{1}{2}\arccos\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{91}}\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}+2\pi k, k\in\mathrm{Z}$ или

(б) $$\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}-\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{\sqrt{91}}+2\pi k, k\in\mathrm{Z}, \\ x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}-\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{\sqrt{91}}+2\pi k, k\in\mathrm{Z}. \end{array}\right.$$

4. Число 94850 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 94850948509485094850948509485094850. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 216.

Решение. Для того, чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 5. Для делимости на 5 нужно, чтобы последней цифрой числа была 0 или 5. Значит, полученное число будет делиться на 5, если мы вычеркнем любые цифры, кроме двух последних. Перейдём к делимости на 3.

Если в числе заменить все цифры 4 на 1, цифры 9 на 0, а цифры 8 и 5 на 2, то остаток от деления числа на 3 не изменится (остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3). Таким образом, нужно узнать, сколькими способами можно вычеркнуть две цифры из числа $X=01220012200122001220012200122001220$ так, чтобы полученное число делилось на 3. Сумма цифр числа X равна 35. Чтобы после вычёркивания сумма цифр делилась на 3, мы можем вычеркнуть либо а) две единицы, либо б) двойку и ноль. Количество способов вычеркнуть две единицы равно $C_7^2=21$; количество способов вычеркнуть один ноль и одну двойку равно $C_{14}^1\cdot C_{14}^1=14\cdot 14=196$.

Две последние цифры вычёркивать нельзя, поэтому получаем $196+21-1=216$ способов.

5. В параллелограмме $ABCD$ угол ABC равен $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}$. Окружность Ω, проходящая через точки A, B и C, пересекает стороны AD и CD в точках P и M соответственно, причём $AP=3$, $CM=6$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

Ответ: $S=20\sqrt{15}$, $R=\frac{4\sqrt{31}}{\sqrt{15}}$.

Решение. Трапеция $BCMA$ вписана в окружность, поэтому она равнобокая, $CB=MA$. Противоположные стороны параллелограмма равны: $BC=AD$. Следовательно, $MA=AD$, поэтому треугольник ADM равнобедренный. $\angle ADM=\angle ABC=\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}=\arccos\frac{1}{4}$. Пусть AH – высота треугольника ADM. Тогда $\frac{1}{4}=\cos\angle ADH=\frac{DH}{AD}=\frac{DM}{2AD}$. Если обозначить $DM=x$, то $AD=2x$.

Из точки D к окружности проведены секущие DMC и DPA. По теореме о двух секущих получаем, что $DM \cdot DC = DP \cdot DA$, т.е. $x(x+6) = (2x-3)\cdot 2x$, откуда $x = 4$. Значит, $CD = 10$, $AD = 8$. Поэтому площадь S параллелограмма $ABCD$ равна $AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = 10 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 20\sqrt{15}$.

Окружность Ω является описанной около треугольника ABC. Её радиус R равен $\frac{AC}{2\sin\angle ABC}$. Сторону AC находим по теореме косинусов из треугольника ABC: $AC^2 = 64 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \frac{1}{4} = 124$. Поэтому $BD = 2\sqrt{31}$, а $R = 2\sqrt{31} : \frac{2\sqrt{15}}{4} = \frac{4\sqrt{31}}{\sqrt{15}}$.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases} \left(2x^2 + 3xy + 2y^2\right)\left(49 - x^2\right) \le 0, \\ |x + 3 + y| + |x + 3 - y| \le a\,? \end{cases}$$

Ответ: $6 \le a < 8$.

Решение. Рассмотрим выражение $A(x; y) = 2x^2 + 3xy + 2y^2$ как квадратный трёхчлен относительно x. Его дискриминант равен $D = 9y^2 - 16y^2 = -7y^2$. При $y \ne 0$ дискриминант отрицателен, поэтому $A > 0$. Если $y = 0$, то $A = 2x^2$, т.е. $A > 0$ при $x \ne 0$ и $A = 0$ при $x = 0$. В итоге получаем, что выражение $A(x; y)$ обращается в ноль в точке $(0; 0)$ и положительно во всех остальных точках.

Следовательно, первое неравенство системы равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2 + 3xy + 2y^2 = 0, \\ 49 - x^2 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0, \\ x \in (-\infty; -7] \cup [7; +\infty). \end{array}\right.$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих этой совокупности, на координатной плоскости. Получаем все точки, лежащие на прямой $x = -7$ и левее неё, точки на прямой $x = 7$ и правее неё, а также точку $(0; 0)$.

Перейдём ко второму неравенству. Проведём на координатной плоскости прямые $x + 3 + y = 0$ и $x + 3 - y = 0$. Они разбивают плоскость на 4 области, в каждой из которых знаки выражений под модулями постоянны. Рассматриваем 4 случая.

Если $x + 3 + y \ge 0$ и $x + 3 - y \ge 0$, то неравенство принимает вид $x + 3 + y + x + 3 - y \le a \Leftrightarrow x \le -3 + \frac{a}{2}$.

Аналогично, если $x + 3 + y < 0$ и $x + 3 - y \ge 0$, то $-x - 3 - y + x + 3 - y \le a \Leftrightarrow y \ge -\frac{a}{2}$.

Если $x + 3 + y < 0$ и $x + 3 - y < 0$, то $-x - 3 - y - x - 3 + y \le a \Leftrightarrow x \ge -3 - \frac{a}{2}$.

Если $x + 3 + y \ge 0$ и $x + 3 - y < 0$, то $x + 3 + y - x - 3 + y \le a \Leftrightarrow y \le \frac{a}{2}$.

Окончательно получаем, что при $a = 0$ неравенство задаёт точку $(-3; 0)$, при $a > 0$ – квадрат с центром в точке $(-3; 0)$ и стороной a, а при $a < 0$ – пустое множество.

Очевидно, при $a \le 0$ система не имеет решений. При $a > 0$ для того, чтобы было единственное решение, нужно, чтобы точка $(0; 0)$ попадала в квадрат, но чтобы квадрат не пересекал прямую $x = -7$, откуда следует, что $3 \le \frac{a}{2} < 4$, т.е. $6 \le a < 8$.

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC = 2$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω – сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что $\angle SAB = \arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

Ответ: а) 0; б) 1:2; в) $\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть O – центр сферы ω; K, L, M – основания перпендикуляров, опущенных из точки O на рёбра AS, BS, CS соответственно; SH – высота пирамиды $SABC$; r и R – радиусы сфер ω и Ω соответственно.

а) Поскольку точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AS, она равноудалена от концов этого отрезка, т.е. $OA = OS$. Аналогично $OB = OS$ и $OC = OS$. Значит, $OA = OB = OC = OS$, поэтому точка O является центром сферы Ω. Следовательно, расстояние между центрами сфер равно нулю.

б) Из равенства прямоугольных треугольников SOK, SOL и SOM ($OK = OL = OM = r$, OS – общая сторона) следует, что $SK = SL = SM$. Поскольку точки K, L, M – это середины боковых рёбер пирамиды, отсюда получаем, что боковые рёбра равны между собой. Тогда высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания (действительно, $\Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$ по катету и гипотенузе, откуда $AH = BH = CH$). Но в пирамиде $OABC$ боковые рёбра OA, OB, OC также равны между собой как радиусы сферы Ω; значит, и её высота, проведённая из вершины O проходит через центр окружности, описанной около основания. Таким образом, высота пирамиды SH проходит через точку O. Кроме того, точка H является центром окружности, описанной около основания. Поскольку треугольник ABC прямоугольный, H – это середина гипотенузы BC. Так как отрезок OH перпендикулярен плоскости основания, он равен радиусу r сферы ω.

Для нахождения соотношения между радиусами рассмотрим прямоугольный треугольник SHC. Точка M – середина гипотенузы SC, на катете SH находится точка O, причём $SO = CO = R$, $OH = OM = r$. Треугольники CHO, CMO и SMO равны по катету и гипотенузе, следовательно, $CH = CM = SM$. Значит, $CH = \frac{1}{2}SM$, $\angle HSC = 30^\circ$. Тогда из треугольника SOM находим, что $r : R = 1:2$.

в) $SC = 2CH = BC = 2$, поэтому треугольник SBC – равносторонний, $SH = SB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. В равнобедренном треугольнике SAB известны боковые стороны $SB = SA = 2$ и угол при основании $\angle SAB = \arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$. Отсюда находим, что $AB = 2SA \cdot \cos\angle SAB = \sqrt{3}$. По теореме Пифагора для треугольника ABC находим, что $AC = 1$, поэтому $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3}$; объём пирамиды V равен $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$.

8. Дан правильный 30-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 30°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответ: 690.

Решение. Опишем вокруг 30-угольника окружность. Будем считать, что длина окружности равна 30 (тогда длина дуги между соседними вершинами равна 1). Вписанный угол в 30 градусов опирается на дугу длиной 5. Значит, для данной вершины A найдутся $30 - 5 - 1 = 24$ (неупорядоченных) пары вершин (B, C), для которых $\angle BAC = 30^\circ$. Суммируя по всем вершинам, получаем $30 \cdot 24 = 720$ троек вершин. При таком подсчёте дважды учтены 30 равнобедренных треугольников с углами 30°, 30°, 120° (положение равнобедренного треугольника однозначно определяется положением его вершины), поэтому в итоге получаем $720 - 30 = 690$ способов расположения точек.

БИЛЕТ 4

1. Решите уравнение $\log_{\left(5^{x-1}\right)}\left(x^2-7x+11\right)+\log_{\left(125^{x-1}\right)}\left(x^3\right)=\frac{1}{x-1}$.

Ответ: $x=5$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{1}{x-1}\log_5\left(x^2-7x+11\right)+\frac{3}{3(x-1)}\log_5 x=\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_5\left(x^2-7x+11\right)+\log_5(x)=1,\\ x-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\log_3\left(x^3-7x^2+11x\right)=\log_5 5,\\ x\neq 1,\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^3-7x^2+11x-5=0,\\ x\neq 1,\\ x>0.\end{cases}$$

Одним из корней кубического уравнения является $x=1$. Разделив уголком на $x-1$, получаем уравнение $(x-1)\left(x^2-6x+5\right)=0$, откуда $x=1$ или $x=5$. В ОДЗ входит только корень $x=5$.

2. Решите неравенство $\frac{1}{\sqrt{|x+3|-2}}\leq\frac{1}{7+x}$.

Ответ: $x\in(-7;-6]$.

Решение.

1-й способ. Переносим в одну часть и приводим дроби к общему знаменателю: $\frac{\sqrt{|x+3|-2}-7-x}{(7+x)\sqrt{|x+3|-2}}\geq 0$.

Находим нули знаменателя: $7+x=0\Leftrightarrow x=-7$; $\sqrt{|x+3|-2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5,\\ x=-1.\end{array}\right.$

Находим нули числителя: $\sqrt{|x+3|-2}-7-x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+7\geq 0,\\ |x+3|-2=(x+7)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -7,\\ \left[\begin{array}{l}x+3=2+(x+7)^2,\\ x+3=-2-(x+7)^2.\end{array}\right.\end{cases}$

Первое уравнение совокупности не имеет решений, а из второго находим, что $x=-6$ или $x=-9$. Неравенству $x\geq -7$ удовлетворяет только $x=-6$, т.е. числитель обращается в ноль только при $x=-6$.

Находим ОДЗ: $|x+3|-2>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-5)\cup(-1;+\infty)$.

Далее решаем методом интервалов: из каждого промежутка, принадлежащего ОДЗ, подставляем какое-либо значение x и определяем знак левой части в этой точке. В итоге промежутки $(-\infty;-7)$, $(-6;-5)$ и $(-1;+\infty)$ не подходят, а промежуток $(-7;-6)$ – подходит. Также не забываем включить в ответ точку $x=-6$ – ноль числителя.

2-й способ. При отрицательной правой части решений нет, поэтому $x+7>0$. Умножаем обе части неравенства на *положительное* выражение $(x+7)\sqrt{|x+3|-2}$ и получаем неравенство $\sqrt{|x+3|-2}\geq x+7$, равносильное исходному. Поскольку правая часть больше нуля, возведение в квадрат является равносильным преобразованием. Получаем

$$|x+3|-2\geq x^2+14x+49\Leftrightarrow|x+3|\geq x^2+14x+51\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+3\geq x^2+14x+51,\\ x+3\leq -x^2-14x-51\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+13x+48\leq 0,\\ x^2+15x+54\leq 0.\end{array}\right.$$

Первое неравенство совокупности не имеет решений, а из второго получаем, что $x\in[-9;-6]$. Учитывая ограничение $x+7>0$, окончательно находим $x\in(-7;-6]$.

3. Решите уравнение $\sqrt{3+\frac{25}{2}\sin^2 x}=\sqrt{6}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}+2\pi k,\ k\in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$3+\frac{25}{2}\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{2}-2\sqrt{3}\sin x\cos x+6\cos^2 x \qquad (*)$$

при условии $\sqrt{6}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\geq 0$. Используя основное тригонометрическое тождество ($3\to 3\cos^2 x+3\sin^2 x$) и приводя подобные слагаемые, получаем: $3\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x-15\sin^2 x=0$. Подстановкой убеждаемся, что при $\sin x=0$ решений нет. Если разделить обе части на $\sqrt{3}\sin^2 x$, то выходит квадратное уравнение относительно $\operatorname{ctg} x$: $\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2 x-2\operatorname{ctg} x-5\sqrt{3}=0$, решая которое, находим, что $\operatorname{ctg} x=\frac{5}{\sqrt{3}}$ или $\operatorname{ctg} x=-\sqrt{3}$. Следовательно, $x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}+\pi k$ или $x=-\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathrm{Z}$.

Условию $\sqrt{6}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\geq 0$ удовлетворяют только значения $x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}+2\pi k$ и $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$.

Примечание. Уравнение (*) с помощью формул понижения степени и двойного угла можно также преобразовать к виду $3\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=2\sqrt{3}$. Если далее решать это уравнение, вводя вспомогательный угол, то ответ может быть получен, например, в таком виде:

(а) $x=-\frac{1}{2}\arccos\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+2\pi k, k\in\mathrm{Z}$ или

(б) $\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+2\pi k, k\in\mathrm{Z}, \\ x=-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+2\pi k, k\in\mathrm{Z}. \end{array}\right.$

4. Число 83105 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 83105831058310583105831058310583105. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 216.

Решение. Для того, чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 5. Для делимости на 5 нужно, чтобы последней цифрой числа была 0 или 5. Значит, полученное число будет делиться на 5, если мы вычеркнем любые цифры, кроме двух последних. Перейдём к делимости на 3.

Если в числе заменить все цифры 3 на 0, а цифры 8 и 5 на 2, то остаток от деления числа на 3 не изменится (остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3). Таким образом, нужно узнать, сколькими способами можно вычеркнуть две цифры из числа $X=20102201022010220102201022010220102$ так, чтобы полученное число делилось на 3. Сумма цифр числа X равна 35. Чтобы после вычёркивания сумма цифр делилась на 3, мы можем вычеркнуть либо а) две единицы, либо б) двойку и ноль. Количество способов вычеркнуть две единицы равно $C_7^2=21$; количество способов вычеркнуть один ноль и одну двойку равно $C_{14}^1\cdot C_{14}^1=14\cdot 14=196$.

Две последние цифры вычёркивать нельзя, поэтому получаем $196+21-1=216$ способов.

5. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен $\operatorname{arctg}\sqrt{15}$. Окружность Ω, проходящая через точки A, B и D, пересекает стороны BC и CD в точках F и N соответственно, причём $BF=7$, $DN=1$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

Ответ: $S=15\sqrt{15}$, $R=\frac{2\sqrt{106}}{\sqrt{15}}$.

Решение. Трапеция $ABFD$ вписана в окружность, поэтому она равнобокая, $AB=FD$. Противоположные стороны параллелограмма равны: $AB=CD$. Следовательно, $FD=CD$, поэтому треугольник FCD равнобедренный. $\angle DCF=\angle BAD=\operatorname{arctg}\sqrt{15}=\arccos\frac{1}{4}=\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}$. Пусть DH – высота треугольника DFC. Тогда $\frac{1}{4}=\cos\angle DCH=\frac{CH}{CD}=\frac{CF}{2CD}$. Если обозначить $FC=x$, то $CD=2x$.

Из точки C к окружности проведены секущие CND и CFB. По теореме о двух секущих получаем $CF \cdot CB = CN \cdot CD$, т.е. $x(x+7) = (2x-1)\cdot 2x$, откуда $x = 3$. Отсюда следует, что $BC = 10$, $CD = 6$. Значит, площадь S параллелограмма $ABCD$ равна $CB \cdot CD \cdot \sin\angle BCD = 10 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 15\sqrt{15}$.

Окружность Ω является описанной около треугольника BDA. Её радиус R равен $\frac{BD}{2\sin\angle BAD}$. Сторону BD находим по теореме косинусов из треугольника BDA: $BD^2 = 36 + 100 - 2\cdot 10\cdot 6\cdot \frac{1}{4} = 106$. Поэтому $BD = \sqrt{106}$, а $R = \sqrt{106} : \frac{2\sqrt{15}}{4} = \frac{2\sqrt{106}}{\sqrt{15}}$.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases} \left(2x^2 + 4xy + 3y^2\right)\left(64 - y^2\right) \le 0, \\ |x - 3 + y| + |y - 3 - x| \le a\,? \end{cases}$$

Ответ: $6 \le a < 10$.

Решение. Рассмотрим выражение $A(x; y) = 2x^2 + 4xy + 3y^2$ как квадратный трёхчлен относительно x. Его дискриминант равен $D = 16y^2 - 24y^2 = -8y^2$. При $y \ne 0$ дискриминант отрицателен, поэтому $A > 0$. Если $y = 0$, то $A = 2x^2$, т.е. $A > 0$ при $x \ne 0$ и $A = 0$ при $x = 0$. В итоге получаем, что выражение $A(x; y)$ обращается в ноль в точке $(0; 0)$ и положительно во всех остальных точках.

Следовательно, первое неравенство системы равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2 + 4xy + 3y^2 = 0, \\ 64 - y^2 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0, \\ y \in (-\infty; -8] \cup [8; +\infty). \end{array}\right.$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих этой совокупности, на координатной плоскости. Получаем все точки, лежащие на прямой $y = -8$ и ниже неё, точки на прямой $y = 8$ и выше неё, а также точку $(0; 0)$.

Перейдём ко второму неравенству. Проведём на координатной плоскости прямые $x - 3 + y = 0$ и $y - 3 - x = 0$. Они разбивают плоскость на 4 области, в каждой из которых знаки выражений под модулями постоянны. Рассматриваем 4 случая.

Если $x - 3 + y \ge 0$ и $y - 3 - x \ge 0$, то неравенство принимает вид $x - 3 + y + y - 3 - x \le a \Leftrightarrow y \le 3 + \frac{a}{2}$.

Аналогично, если $x - 3 + y < 0$ и $y - 3 - x \ge 0$, то $-x + 3 - y + y - 3 - x \le a \Leftrightarrow x \ge -\frac{a}{2}$.

Если $x - 3 + y < 0$ и $y - 3 - x < 0$, то $-x + 3 - y - y + 3 + x \le a \Leftrightarrow y \ge 3 - \frac{a}{2}$.

Если $x - 3 + y \ge 0$ и $y - 3 - x < 0$, то $x - 3 + y - y + 3 + x \le a \Leftrightarrow x \le \frac{a}{2}$.

Окончательно получаем, что при $a = 0$ неравенство задаёт точку $(0; 3)$, при $a > 0$ – квадрат с центром в точке $(0; 3)$ и стороной a, а при $a < 0$ – пустое множество.

Очевидно, при $a \le 0$ система не имеет решений. При $a > 0$ для того, чтобы было единственное решение, нужно, чтобы точка $(0; 0)$ попадала в квадрат, но чтобы квадрат не пересекал прямую $y = 8$, откуда следует, что $3 \le \frac{a}{2} < 5$, т.е. $6 \le a < 10$.

7. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $BC = 2\sqrt{3}$. Сфера ω касается плоскости основания пирамиды и касается всех трёх её боковых рёбер в их серединах. Пусть Ω – сфера, описанная около пирамиды $SABC$.

а) Найдите расстояние между центрами сфер ω и Ω.

б) Найдите отношение радиусов сфер ω и Ω.

в) Пусть дополнительно известно, что угол между гранями SAB и ABC равен $\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{3}\right)$. Найдите объём пирамиды $SABC$.

Ответ: а) 0; б) 1:2; в) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Пусть O – центр сферы ω; K, L, M – основания перпендикуляров, опущенных из точки O на рёбра AS, BS, CS соответственно; SH – высота пирамиды $SABC$; r и R – радиусы сфер ω и Ω соответственно.

а) Поскольку точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AS, она равноудалена от концов этого отрезка, т.е. $OA = OS$. Аналогично $OB = OS$ и $OC = OS$. Значит, $OA = OB = OC = OS$, поэтому точка O является центром сферы Ω. Следовательно, расстояние между центрами сфер равно нулю.

б) Из равенства прямоугольных треугольников SOK, SOL и SOM ($OK = OL = OM = r$, OS – общая сторона) следует, что $SK = SL = SM$. Поскольку точки K, L, M – это середины боковых рёбер пирамиды, отсюда получаем, что боковые рёбра равны между собой. Тогда высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания (действительно, $\Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$ по катету и гипотенузе, откуда $AH = BH = CH$). Но в пирамиде $OABC$ боковые рёбра OA, OB, OC также равны между собой как радиусы сферы Ω; значит, и её высота, проведённая из вершины O проходит через центр окружности, описанной около основания. Таким образом, высота пирамиды SH проходит через точку O. Кроме того, точка H является центром окружности, описанной около основания. Поскольку треугольник ABC прямоугольный, H – это середина гипотенузы BC. Так как отрезок OH перпендикулярен плоскости основания, он равен радиусу r сферы ω.

Для нахождения соотношения между радиусами рассмотрим прямоугольный треугольник SHC. Точка M – середина гипотенузы SC, на катете SH находится точка O, причём $SO = CO = R$, $OH = OM = r$. Треугольники CHO, CMO и SMO равны по катету и гипотенузе, следовательно, $CH = CM = SM$. Значит, $CH = \frac{1}{2}SM$, $\angle HSC = 30^\circ$. Тогда из треугольника SOM находим, что $r : R = 1 : 2$.

в) $SC = 2CH = BC = 2\sqrt{3}$, поэтому треугольник SBC – равносторонний, $SH = SB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$. Пусть F – середина ребра AB. Тогда $\angle SFH = \operatorname{arctg}\left(2\sqrt{3}\right)$ (угол SFH является углом между гранями SAB и ABC, т.к. $HF \perp AB$, $SF \perp AB$). Тогда $HF = SH \cdot \operatorname{ctg} \angle SFH = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AC = 2 \cdot FH = \sqrt{3}$. По теореме Пифагора для треугольника ABC находим, что $AB = 3$, поэтому $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}$; объём пирамиды V равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

8. Дан правильный 36-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 45°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

Ответ: 900.

Решение. Опишем вокруг 36-угольника окружность. Будем считать, что длина окружности равна 36 (тогда длина дуги между соседними вершинами равна 1). Вписанный угол в 45 градусов опирается на дугу длиной 9. Значит, для данной вершины A найдутся $36 - 9 - 1 = 26$ (неупорядоченных) пар вершин (B, C), для которых $\angle BAC = 30^\circ$. Суммируя по всем вершинам, получаем $36 \cdot 26 = 936$ троек вершин. При таком подсчёте дважды учтены 36 равнобедренных треугольников с углами 45°, 45°, 90° (положение равнобедренного треугольника однозначно определяется положением его вершины), поэтому в итоге получаем $936 - 36 = 900$ способов расположения точек.

